

Biofísica

Fundamentos e Aplicações



José Enrique Rodas Durán

PÁGINA EM BRANCO

JOSÉ ENRIQUE RODAS DURÁN

Biofísica

Fundamentos e Aplicações



São Paulo – 2003

Brasil Argentina Colômbia Costa Rica Chile Espanha
Guatemala México Porto Rico Venezuela

©2003 José Enrique Rodas Durán

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Pearson Education do Brasil.

Diretor Editorial: José Braga
Editor: Roger Trimer
Editora de Texto: Marileide Gomes
Preparação: Lucrécia Freitas
Revisão: Gina Monteiro / Lucila Segóvia
Ilustrador: Eduardo Borges
Consultor Técnico: Paulo Boschcov
Designer de Capa: Marcelo da Silva Françoze
Ilustração de Capa: Eduardo Borges
Editoração Eletrônica: Figurativa Arte e Projeto Editorial

Dados Internacionais de Catalogação da Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Durán, José Enrique Rodas
 Biofísica – fundamentos e aplicações / José Enrique Rodas Durán
 São Paulo : Prentice Hall, 2003

Bibliografia

ISBN: 85.87918.32-X

1. Biofísica 2. Biologia humana 3. Física – Estudo e ensino
4. Física – Problemas, exercícios etc. Física Médica I. Título

02-6029

CDD-530.07

Índices para catálogo sistemático:

1. Física: Ciências biológicas e da saúde: Estudo e Ensino 530.07

2003

Direitos exclusivos para a língua portuguesa cedidos à Pearson Education do Brasil Ltda, uma empresa do grupo Pearson Education.

Rua Emílio Goeldi, 747, Lapa
 CEP 05065-110, São Paulo, Brasil
 Tel.: (11) 3613-1222 Fax: (11) 3611-0851
 e-mail: vendas@pearsoned.com.br

Prefácio

O questionamento inicial dos estudantes que têm a disciplina de biofísica em sua estrutura curricular é: “*o que é biofísica?*”. Como acontece com todas as disciplinas que envolvem diferentes especialidades de conhecimento, não é fácil dar uma definição rápida e precisa. A biofísica, como área de conhecimento interdisciplinar, tem estado em constante evolução nas últimas décadas, porque pesquisas e estudos mais recentes na *ciência da vida* levam a novos questionamentos. Na biofísica são estudados em *escala macroscópica e microscópica* os fenômenos físico-biológicos que envolvem organismos vivos e, em *nível molecular*, os comportamentos resultantes dos vários processos da vida, além da interação e da cooperação entre os sistemas altamente organizados de macromoléculas, organelas e células. Os pré-requisitos para seu estudo são *conhecimentos fundamentais* de física, biologia, química, físico-química, bioquímica e cálculo diferencial e integral.

Pelos critérios clássicos de mecânica, acústica, eletromagnetismo e ótica, todo organismo vivo pode ser *simplesmente* visto como se fosse uma *máquina*. O aspecto molecular e celular dessas máquinas são as preocupações da biofísica para o entendimento de seu funcionamento. É o estudo desses aspectos que nos revela como a natureza tem aperfeiçoado a sofisticação já inerente desses organismos.

A física pode ser entendida como uma ciência de *métodos e modelos*, assim como a química é uma ciência da matéria. Neste texto de *biofísica*, antes de estudar e explicar determinados comportamentos de um *sistema biológico* (seja este um ser vivo evoluído, algum constituinte desse ser vivo ou simplesmente um microorganismo), sempre introduzimos previamente uma série de conhecimentos básicos e de *métodos* de uso corriqueiro na física necessários nesses estudos. Muitas vezes, apesar da complexidade do sistema biológico, são propostos *modelos* bastante simplificados que explicam satisfatoriamente seu comportamento. A nosso ver, o conhecimento dos *métodos e modelos* utilizados nos estudos de problemas que envolvem sistemas biológicos é fundamental para todos os *estudantes de ciências biológicas ou de ciências da vida em geral*.

Quanto à estrutura do livro, os Capítulos 1 e 2 fornecem os conhecimentos básicos necessários que todo estudante das ciências da vida deve ter para um entendimento amplo dos fenômenos que irá estudar. O sistema internacional (SI) de unidades adotado neste texto é descrito com maior ênfase. Por serem as ciências da vida predominantemente experimentais, sua aprendizagem exige muito trabalho em laboratórios. Levando isso em conta, são fornecidos os fundamentos necessários das teorias de erros e de gráficos para interpretar, fazer modelos e extrair conclusões de medidas experimentais. Do mesmo modo, o conceito de escala na biologia é abordado com detalhes e diversos exemplos, mostrando que seu uso em muitos problemas da biologia simplifica o tratamento de questões aparentemente complexas.

O Capítulo 3 é dedicado à biomecânica, no qual são analisados sistemas biológicos com base em princípios da mecânica técnica. Explicamos e calculamos os diversos efeitos das forças internas e externas e dos momentos em várias posições e durante diversos movimentos dos organismos vivos. Com a utilização da teoria da elasticidade de materiais sólidos, são estudadas as propriedades elásticas e as deformações permanentes de materiais biológicos, como os ossos. Os músculos estriados recebem atenção especial, com muitas aplicações, devido à sua importância em algumas atividades essenciais dos seres vivos, à sua capacidade de gerar forças e a uma grande variedade de trabalhos mecânicos.

O Capítulo 4 começa estudando a biofísica da locomoção no ar. Nesta parte, enfatizamos o mecanismo de movimento das asas, a geração das forças aerodinâmicas sobre as asas, os fenômenos relacionados ao controle da posição e da direção de um movimento no ar e as fontes de energia para o voo. Apresentamos também o conceito de trabalho e energia mecânica e o aplicamos aos casos da corrida de animais.

No Capítulo 5, estudamos a origem física e sua quantificação das várias formas de energia potencial, assim como de outras formas de energia. Enfatizamos especialmente o significado da energia biológica e seu envolvimento com as moléculas ATP e ADP. A importância da hidrólise das moléculas ATP em ADP e fosfato inorgânico é destacada com diversos exemplos. A geração da energia utilizada pelos seres vivos em suas diversas atividades a partir dos alimentos ingeridos é amplamente analisada, dando-se ênfase especial ao caso do corpo humano. Em consequência disso, discutimos o significado da taxa metabólica e a importância de sua medida para efeitos de comparação entre as diversas atividades realizadas pelos seres vivos. Com relação ao corpo humano, o texto apresenta também o significado de conservação da energia.

Os fluidos e suas diversas formas de transporte têm uma participação essencial em toda forma de vida. No Capítulo 6, dedicado a este tema, há uma interpretação física rigorosa das diversas propriedades intrínsecas dos fluidos, e nele são apresentadas algumas aplicações biológicas dessas propriedades. Ao longo do Capítulo 6 analisamos o funcionamento do sistema circulatório, por ser este um sistema de transporte fundamental para a vida e por ter um papel importante no transporte de calor dentro do corpo e de sua superfície. A difusão e o transporte de fluidos pelo interior de um organismo vivo são apresentados e quantificados em diversos casos biológicos, com ênfase especial ao estudo do *transporte em longas distâncias* em plantas muito altas. As formas de escoamento de um fluido são analisadas, sendo descritas suas diversas forças resistivas; em particular, fazemos uma análise físico-biológica da biofísica da locomoção na água, da origem das forças de propulsão ou de avanço e das forças resistivas ou de arraste.

Os conceitos básicos da bioeletricidade para o entendimento do significado físico-biológico do que é *potencial de membrana* são abordados no Capítulo 7. Há também discussões sobre modelos de biomembranas, levando-se em consideração que a maioria dos modelos parte do princípio de que todas as membranas têm em comum uma certa modelagem estrutural. Para definir o conceito de potencial de membrana,

considera-se o funcionamento físico das biomembranas como semelhante ao de um capacitor elétrico. Esse modelo físico também permite calcular valores do potencial de membrana. Como é bastante discutido no Capítulo 7, o valor desse potencial pode ter uma ação reguladora da amplitude de certos processos de transporte, e a mudança de valores desses potenciais ativa os portadores de informação e a transmissão da mesma.

O Capítulo 8 trata dos princípios da neurobiofísica, isto é, da codificação e transmissão de informações por meio de mudanças no potencial das biomembranas. É destacado o papel das biomembranas na transformação de energia metabólica em efeitos elétricos e de osmose, assim como na aquisição e processamento de informações. Os parâmetros físicos da transmissão e distribuição de informações em células nervosas ou neurônios e em fibras cardíacas são também discutidos. Finalmente, abordamos a importância das células eletorreceptoras nos peixes-elétricos. Essas células têm revelado um número extraordinário de propriedades de interesse geral para a biofísica, entre elas sua sensibilidade a gradientes de potencial com valores na faixa dos microvolts.

No Capítulo 9 estudamos a magnetobiologia, o biomagnetismo e o espectro das radiações eletromagnéticas. Como os organismos vivos estão constantemente expostos a diversas forças determinadas pelas propriedades físicas de nosso planeta, e sendo uma destas a *força geomagnética*, apresentamos um estudo dos efeitos dessa força em algumas espécies do reino animal. Para isso, utilizamos dois tipos de quantificação: um relacionado com o fator físico externo e outro com a reação fisiológica. A seguir, discutimos em detalhes o biomagnetismo das bactérias magnéticas e com ênfase menor o de outras espécies do reino animal. Este capítulo termina com a interpretação do espectro eletromagnético e a descrição de uma série de bioefeitos devidos à ação das radiações eletromagnéticas sobre sistemas biológicos. A biofísica das radiações tem seu interesse maior nos processos primários físicos e químicos dessas radiações e nos efeitos biológicos atribuídos a eles.

O Capítulo 10 começa apresentando as propriedades físicas das ondas mecânicas, com grande ênfase nas ondas sonoras. No tópico da *bioacústica*, destacamos o *estímulo externo* (onda sonora) que causa excitação às células sensoriais localizadas no ouvido interno, transformando o estímulo em um sinal elétrico que possibilita a transmissão e o processamento da informação presente nesse estímulo. A seguir, explicamos a relação entre a fonação em humanos e o transporte dos gases respiratórios desde o meio externo aos pulmões e vice-versa. Dedicamos também um estudo especial ao ultra-som, por sua importância nas ciências da vida, tanto por sua ampla gama de aplicações médico-biológicas como pelo fato de ser utilizado como meio de comunicação, localização e movimentação de muitas espécies do reino animal.

O Capítulo 11, último do livro, começa apresentando as leis e princípios da ótica física, necessária ao estudo inicial da biofísica da visão dos seres vivos. Neste capítulo explicamos em detalhes a função das células fotorreceptoras, que é semelhante à de um intérprete que traduz um estímulo visual na linguagem do sistema nervoso. O estímulo visual meramente dispara o processo biológico de transdução da célula fo-

torreceptora. Nessa operação, os fótons incidentes liberam energia somente a uma ou a algumas moléculas da célula sensorial, alterando o potencial de membrana da célula inteira. A seguir apresentamos princípios da ótica geométrica, que são utilizados para explicar a ótica da visão dos humanos e de algumas espécies do reino animal. Destacamos a importância da propriedade de polarização da luz — e em particular da radiação solar — em certas espécies vivas. Por fim, descrevemos os diversos defeitos na visão dos humanos.

Este livro cobre diversos tópicos da biofísica com um sólido embasamento na física básica. Essa variedade de tópicos permite que os leitores e/ou professores selecionem os capítulos de maior interesse ou que sejam mais adequados para uma primeira abordagem do assunto, o que faz deste um texto flexível e adaptável aos mais diversos interesses.

José Enrique Rodas Durán

São Paulo, novembro de 2002

Agradecimentos

A elaboração deste livro é resultado de muitos anos de experiência lecionando as disciplinas de biofísica e física aplicadas à medicina e à biologia.

As diversas turmas de estudantes que nos ouviram merecem um agradecimento especial porque eles, com suas opiniões e constantes questionamentos, mostraram-me a necessidade de escrever um livro com o conteúdo aqui apresentado.

Durante esta fase e em períodos diferentes os srs. Glauber F. Furlan, Eder R. Moraes, Nilo A. Menezes e Túlio C. S. dos Santos (hoje todos doutores) que atuaram como meus bolsistas PAE (Programa de Aperfeiçoamento de Ensino) deram uma contribuição importante nas discussões dos exercícios de aplicação, muitos desses exercícios estão propostos neste livro. A todos eles meu reconhecimento e agradecimento por esta importante contribuição.

Dedico meus cordiais e sinceros agradecimentos a muitos colegas do meu Departamento de Física e Matemática da FFCLRP – USP, que me incentivaram a elaborar esta obra. Em especial ao colega Oswaldo Baffa Filho pelo seu constante encorajamento durante todo o processo e pelas valiosas discussões. Estendo também minha gratidão ao colega José R. Drugowich de Felício, por seu permanente incentivo e estimulantes colocações com relação ao conteúdo do livro.

Finalmente, minha fiel companheira, Maria de Lourdes, e meus filhos Franklin e Henrique, recebam minha especial gratidão pelo apoio que sempre me deram enquanto investia parte do meu tempo neste projeto.

J.E.R.D.

PÁGINA EM BRANCO

Sumário

CAPÍTULO 1: UNIDADES, PADRÕES, GRANDEZAS, ESCALAS E TAMANHOS

1.1	Introdução	1
1.2	Medidas: unidades fundamentais	2
1.3	Padrões	3
1.4	Algarismos significativos, precisão e certeza	4
1.5	Escala e tamanho dos objetos	6

CAPÍTULO 2: GRÁFICOS, DECAIMENTO EXPONENCIAL, CRESCIMENTO EXPONENCIAL E ESCALA NA BIOLOGIA

2.1	Gráficos	11
2.2	Construção de escalas	12
	Escala linear	12
	Escala logarítmica	13
2.3	Decaimento e crescimento exponencial	16
2.4	Escalas na biologia:	19
	Crescimento de uma célula	19
	Resistência em organismos de tamanhos diferentes	20
	Forma e tamanho	22

CAPÍTULO 3: MOVIMENTOS, BIOMECÂNICA E ELASTICIDADE

3.1	Introdução	29
3.2	Movimento no plano	30
	Deslocamento e velocidade média	30
	Velocidade instantânea	30
	Aceleração	31
	Primeira aplicação: velocidade da caminhada	32
	Segunda aplicação: velocidade de corrida dos seres humanos	33
3.3	Movimento composto ou parabólico	35
	Primeira aplicação	36
	Segunda aplicação	37
3.4	Movimento relativo	38
3.5	Forças e biomecânica	39
	Forças fundamentais e derivadas	39
	Forças elásticas	40
	Forças de atrito	44
	Força muscular	45
3.6	Momento: alavancas	49
	Centro de massa de um corpo	51

CAPÍTULO 4: DINÂMICA: VÔOS, TRABALHO, ENERGIA E POTÊNCIA MECÂNICA

4.1	Introdução	61
4.2	Dinâmica dos movimentos aéreos dos animais	62
	Aplicação: movimento de pára-quedismo	63
	2ª aplicação: movimento de planeio	64
4.3	Vôos propulsionados	65
4.4	Trabalho, energia cinética e potência	72
	Teorema trabalho-energia	72
	Velocidade de corrida de animais	74
	Potência total no vôo de animais	76

CAPÍTULO 5: ENERGIA POTENCIAL, OUTRAS FORMAS DE ENERGIA E CONSERVAÇÃO DA ENERGIA NO CORPO HUMANO

5.1	Introdução	83
5.2	Energia potencial gravitacional	83
	Energia mecânica dos humanos ao fazerem um salto	85
5.3	Energia potencial elástica	88
5.4	Energia potencial molecular	90
5.5	Outras formas de energia:	
	Lei da conservação da energia	91
	Energia térmica	91
	Energia química	92
	Energia interna e razão metabólica	94
	Utilização de energia pelos vários órgãos do corpo humano	96
	Realização de trabalho externo	97
	Perda de calor pelo corpo	98
5.6	Conservação da energia no corpo humano	99

CAPÍTULO 6: FLUIDOS, TENSÃO SUPERFICIAL, CAPILARIDADE E TRANSPORTE EM UM MEIO INFINITO

6.1	Introdução	105
6.2	Pressões atmosférica e hidrostática	106
	Aplicação: variação da pressão arterial no corpo humano	107
	Flutuação: o princípio de Arquimedes	108
6.3	Tensão superficial e atração capilar	110
6.4	Pressão no interior de uma bolha de ar	113
6.5	Transporte em um meio infinito	114
	Difusão: 1ª lei de Fick	115
	Viscosidade e difusão	117
	Osmose: pressão osmótica	120
6.6	Escoamento de fluidos	122
	Escoamento laminar: equação de Poiseuille	123
	Número de Reynolds	125
	Lei de Stokes	126
	Forças resistivas em um fluido	128

CAPÍTULO 7: BIOELETRICIDADE, LEI DE NERNST-PLANCK, TRANSPORTE ATIVO DE ÍONS

7.1	Introdução	137
	Campo elétrico: lei de Coulomb	138
	Potencial elétrico e energia potencial	139
	Capacitores	141
7.2	Potencial de uma membrana celular	142
7.3	Corrente elétrica e lei de Nernst-Planck	146
7.4	Potenciais de Nernst e Donnan	150
7.5	Transporte ativo de íons: bomba de sódio-potássio	154

CAPÍTULO 8: MEMBRANAS EXCITÁVEIS, POTENCIAIS DE AÇÃO, ELETORRECEPTORES E PEIXES-ELÉTRICOS

8.1	Introdução	163
8.2	Condutância elétrica e membranas excitáveis	163
8.3	Potencial de ação de membranas excitáveis	169
8.4	Potencial de ação nas fibras cardíacas	176
	Efeitos da corrente elétrica no corpo humano	177
8.5	Peixes-elétricos: os eletorreceptores	178

CAPÍTULO 9: GEOMAGNETISMO, BIOMAGNETISMO E RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA

9.1	Introdução	187
9.2	Campo magnético e força magnética	188
	Efeitos do campo magnético sobre cargas em movimento	190
9.3	Geomagnetismo	191
	Barras magnetizadas em campos magnéticos	193
9.4	Orientação magnética	194
	Bactérias magnéticas	195
	Orientação magnética de abelhas e pombos	197
9.5	Campos eletromagnéticos	200
	O espectro eletromagnético	201
	Diversos efeitos das radiações não-ionizantes	203
	Efeitos das radiações ionizantes	204

CAPÍTULO 10: ONDAS MECÂNICAS, BIOACÚSTICA E COMUNICAÇÃO SONORA

10.1	Introdução	211
	Pulsos ondulatórios: reflexão e transmissão	211
	Ondas harmônicas: energia e intensidade	214
10.2	Ondas mecânicas longitudinais	217
	Ondas estacionárias	219
10.3	O som	222
	Efeito Doppler	223
10.4	Bioacústica	227
	O ouvido humano	227
	Transmissão e recepção das ondas sonoras pelo ouvido	229
	Características da percepção auditiva	230
	A barreira do som	231

	A voz humana	232
10.5	Ondas ultra-sônicas	235
	Propriedades e algumas aplicações do ultra-som	236
10.6	Ecolocalização	239

CAPÍTULO 11: ÓPTICA FÍSICA E GEOMÉTRICA, BIOFÍSICA DA VISÃO E INSTRUMENTOS ÓPTICOS

11.1	Introdução	251
	Reflexão e refração da luz	253
	Fibras ópticas	255
	Raios luz atravessando meios transparentes	256
	Coeficientes de reflexão e transmissão	257
11.2	Biofísica da visão	259
	Olho composto de um inseto	259
	Transmissão da luz pelo rabinho	260
	Fotorreceptor óptico	260
	Princípios físicos da fotorreceptividade	261
	Função e formas das células da visão dos vertebrados	262
11.3	Difração e interferência da luz	265
	Difração por uma fenda circular	267
	Poder de resolução	268
11.4	O olho humano	271
	Visão noturna	272
	Visão do ultravioleta	273
11.5	Polarização da luz	274
11.6	Lentes e instrumentos ópticos	277
	Formação de uma imagem	278
	Convergência de uma lente	282
	Lente de aumento e lupa simples	283
	Microscópio óptico	285
11.7	Defeitos visuais do olho humano	287
	Ametropias oculares	287

APÊNDICE A

	Unidades derivadas do SI	301
	Constantes	302

APÊNDICE B

	Fatores de conversão de unidades	303
	Tabela de conversão de energia	304
	Unidades de radiação	304
	Equivalências massa-energia	304

APÊNDICE C

	Relações matemáticas úteis	305
--	----------------------------------	-----

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS ÍMPARES	307
--	------------

ÍNDICE	315
---------------------	------------

Capítulo 1

Unidades, Padrões, Grandezas, Escalas e Tamanhos



1.1 INTRODUÇÃO

Geralmente a ciência procura estabelecer relações entre conjuntos de observações, com as quais tenta desenvolver generalizações e, a partir disso, elaborar conceitos teóricos para as interpretações. As observações e comparações quantitativas geralmente nos levam a generalizações quantitativas, hipóteses e teorias quantitativas. A dificuldade para se fazer generalizações quantitativas está diretamente relacionada com as observações feitas, que muitas vezes são bastante complexas, mas é justamente isso que torna as ciências uma permanente fonte de conhecimentos. As leis do movimento de Newton, a teoria atômica de Dalton e a elaboração dos princípios da hereditariedade de Mendel são exemplos notáveis de que as generalizações a partir de observações deram origem a conhecimentos importantíssimos.

Quando fazemos um conjunto de observações, ou seja, um experimento, dados similares poderão ser obtidos outras vezes se o experimento for repetido nas mesmas condições. A generalização sempre é consequência de uma série de experimentos similares. Na prática, é difícil garantir que dois experimentos sejam exatamente iguais em todas as variáveis, de modo que não podemos assegurar resultados exatamente iguais. Os dados numéricos deverão variar dentro de uma faixa, o que é denominado erro experimental, e as generalizações deverão levar em conta este erro ou incerteza.

A física e a química, ciências com grande tradição experimental, apresentam generalizações baseadas em resultados com um bom grau de reprodutibilidade, pois na maioria dos casos a incerteza pode ser reduzida a proporções desprezíveis. Já na biologia, o problema da incerteza é bastante sério, pois a maioria das experiências é feita com organismos vivos, que são altamente complexos, o que gera resultados altamente variáveis, ou seja, como a incerteza é muito grande, é difícil a reprodução exata de uma experiência. Para minimizar o problema, reduzir essa incerteza seria uma providência imediata, porém a tarefa de identificar e controlar todas as fontes de incerteza é algo impossível. Além disso, seria um risco muito grande supor que qualquer organismo-padrão possa representar toda uma espécie ou população. Ante essa realidade, devemos procurar meios para conduzir nossos experimentos, apresentando observações e analisando os resultados de maneira que possamos extrair conclusões com uma precisão conhecida.

Técnicas experimentais e métodos teóricos típicos da física e da química são extremamente úteis para as generalizações quantitativas feitas na biologia. Procuramos sempre garantir que as incertezas tenham uma influência mínima em nossas observações, e, muitas vezes, só o fato de conseguirmos identificar as prováveis fontes da incerteza permite que estas generalizações quantitativas constituam uma contribuição importante no entendimento da biologia. Nas ciências biológicas, as observações experimentais, que requerem justificativas bastante detalhadas, para se chegar a generalizações quantitativas, exigem um conhecimento muito claro dos fundamentos do cálculo vetorial, diferencial e integral, e também de vários princípios da física e da química. O principal objetivo aqui é entender como métodos e princípios da física são utilizados para se chegar às generalizações quantitativas de observações nas ciências biológicas, utilizando-se ferramentas matemáticas fundamentais e princípios de certas ciências, toda vez que necessário.



1.2 MEDIDAS: UNIDADES FUNDAMENTAIS

Como foi dito anteriormente, a generalização de uma série de observações é consequência da repetição de experimentos similares. Isso exige uma certa habilidade para *medir* as grandezas que são variáveis do experimento. Para que a quantidade resultante tenha algum significado, ao se fazer uma *medida*, sua *magnitude* deve estar acompanhada da respectiva *unidade*. Na biologia, à semelhança do que ocorre na física e na química, são bastante diversas as grandezas que medimos. As unidades do Sistema Internacional (SI)⁽¹⁾, ou *unidades métricas*, são as mais utilizadas para expressar as medidas de uma grandeza. Neste texto utilizaremos, para as grandezas que serão definidas, este sistema de unidades. Mas não deixaremos de mencionar, quando for necessário, outras unidades também utilizadas para expressar as medidas de algumas grandezas. As unidades básicas do SI são: o *metro* (*m*), o *quilograma* (*kg*) e o *segundo* (*s*) para medir comprimento, massa e tempo, respectivamente. Muitas grandezas derivadas são expressas em termos destas unidades básicas; por exemplo, as medidas de *energia* têm como unidades o $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$, que é denominado *joule* (*J*). Algumas grandezas exigem outras unidades básicas, além daquelas já

mencionadas. No SI estas são: o *kelvin* (*K*), o *ampère* (*A*), a *candela* (*cd*) e o *mole* (*mol*) para medidas da temperatura termodinâmica, da corrente elétrica, da intensidade luminosa e de quantidades de substância, respectivamente. Na Tabela 1.1 apresentamos as unidades básicas do SI.

Algumas vezes as medidas de uma grandeza são muito pequenas ou muito grandes quando comparadas com os *padrões* das unidades básicas do SI,

Tabela 1.1 Unidades Básicas no SI

Grandeza	Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	ampère	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Intensidade luminosa	candela	cd
Quantidade de substância	mole	mol

como por exemplo 1 milissegundo (ms) = 10^{-3} s; 1 quilômetro (km) = 10^3 m ou 1 microampère (μA) = 10^{-6} A. Quando estes múltiplos dos padrões vão expressos em potências de 10, os prefixos das unidades básicas têm nomes específicos, como se vê na Tabela 1.2. Esses prefixos também são aplicáveis a qualquer outro tipo de unidade.

As medidas de grandezas também podem ser expressas em *unidades não pertencentes ao SI*, e em *unidades derivadas*, ou seja, unidades criadas a partir das unidades básicas do SI. No Apêndice A apresentaremos algumas dessas unidades.

Tabela 1.2 Prefixos e as respectivas potências de 10

Prefixo	Símbolo	Potência de 10
tera	T	10^{12}
giga	G	10^9
mega	M	10^6
quilo	k	10^3
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}

Exemplo: O número de Reynolds ($\mathcal{R}$), indicador do fluxo de um fluido, é definido para um fluido de densidade ρ e coeficiente de viscosidade η como: $\mathcal{R} = 2\rho a \bar{v} / \eta$, onde a é o raio do tubo de escoamento e $\bar{v}$, a velocidade média do fluido. Sendo $\mathcal{R}$ adimensional, determine as unidades de η no SI.

Resolução: No SI, a unidade resultante da quantidade física $\rho a \bar{v}$ será: unidade de $\rho \times$ unidade de $a \times$ unidade de $\bar{v} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$. Para que $\mathcal{R}$ seja adimensional, a unidade de η no SI deve ser: $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.



1.3 PADRÕES

Sempre que *medimos* uma grandeza estamos comparando-a com o respectivo *padrão* de referência. Este padrão é a *unidade* da grandeza. Quando o sistema métrico foi estabelecido, a unidade de comprimento *metro* foi definida como 10^{-7} vezes a distância do Equador ao Pólo Norte, medido ao longo do meridiano que passa por Paris; posteriormente, em 1889, a Conferência Geral de Pesos e Medidas, considerando que todo padrão unitário deve ter *durabilidade e reprodutibilidade*, definiu o *metro* como a distância entre dois traços paralelos sobre uma determinada barra de platina iridiada. Os inconvenientes deste padrão unitário eram ter de se fazer muitas réplicas do objeto, para disponibilizá-las a outros países, e de ser necessário comparar periodicamente estas réplicas com o padrão internacional. Assim, em 14 de outubro de 1969, a Conferência Geral *alterou* a definição deste padrão internacional, utilizando uma unidade *natural* de comprimento baseada na radiação atômica. É aceito agora, como padrão de medida de comprimento, o *comprimento de onda* da luz vermelho-alaranjada emitida pelos átomos excitados do isótopo criptônio 86. Foi definido que *exatamente* 1 650 763,73 comprimentos desta onda constituem 1 metro. Este

padrão pode ser reproduzido em muitos laboratórios do mundo inteiro, evitando assim a necessidade de deslocamento, para fazer comparações com um padrão.

O *padrão de massa*, por sua vez, é um cilindro de platina iridiada, definido como *um quilograma*. Infelizmente, ainda não foi adotado um padrão atômico de massa, tal como se fez com o padrão internacional de medida de comprimento. Certamente, quando houver condições tecnológicas para se poder determinar com precisão a massa do quilograma-padrão, em termos de uma massa atômica-padrão, uma nova definição deverá surgir.

O *padrão de tempo* é o *segundo*, que originalmente foi definido como o tempo igual a $1/86\,400$ de um *dia solar médio*. Esta definição não era muito conveniente para trabalhos de alta precisão, por depender da velocidade de rotação da Terra. Em 1967 foi estabelecida uma unidade *natural* para o tempo, que, assim como a definição do padrão de comprimento, é um padrão atômico. Desta vez foram utilizadas as características vibracionais do elemento césio 133. Atualmente, *um segundo* é definido como o tempo necessário para que o césio realize $9\,192\,631\,770$ vibrações completas.



1.4 ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS, PRECISÃO E CERTEZA^[2,3]

As medidas nunca são feitas com *precisão absoluta*. Suponha que pretendemos medir a massa de uma tartaruga. Dispomos de uma balança graduada de 1 em 1 g. Esta balança fornece com *precisão* o valor da medida em gramas, e qualquer fração dessa unidade deverá ser *estimada*. Assim, para expressar nossa medida, esta deverá conter todos os *algarismos precisos* mais o *algarismo estimado*. A leitura na balança da Figura 1.1 é 16,5 g. Se a escala desta balança permitisse ler com precisão até décimos de gramas, a leitura seria 16,50 g. Ou seja, teríamos um aumento na *precisão* da medida.

Os algarismos que compõem o resultado de uma medida são chamados de *algarismos significativos*. Deles fazem parte todos os algarismos precisos *mais um e somente um* algarismo estimado. É sobre este último que incide o *desvio absoluto* da medida. Observações:

1. Os zeros à esquerda do primeiro algarismo não nulo *não são significativos*, pois o número de algarismos significativos não depende da unidade adotada. Assim, a medida

$$7,5 \text{ cm} = 0,075 \text{ m} = 0,000075 \text{ km} = 75 \times 10^3 \mu\text{m}$$

tem só *dois* algarismos significativos nos quatro casos acima.

2. Os zeros à direita do último algarismo não nulo *serão significativos* se indicarem um valor realmente medido. Assim, a medida

0,0750 m tem *três* algarismos significativos e

7,5000 cm tem *cinco* algarismos significativos.



Figura 1.1 Medida da massa de uma tartaruga.

Para *medir uma grandeza*, podemos fazer apenas uma ou várias medidas repetidas, dependendo das condições experimentais particulares ou ainda da postura adotada frente ao experimento. Em qualquer caso, deve-se extrair do processo de medida um valor que *melhor represente* a grandeza e ainda um *limite de erro*, dentro do qual deve estar compreendido o valor real. Veja ao lado uma explicação sobre *desvios e limites de erro*.

Teremos uma *precisão maior* quanto menor for o desvio absoluto. Sempre é desejável obter a maior precisão possível. Se, ao fazer a medida de uma grandeza, encontrarmos um desvio absoluto muito grande e o diminuirmos arbitrariamente, então essa redução arbitrária da faixa de desvio lança dúvidas sobre a *certeza* de que o valor da medida feita estará dentro da nova faixa de valores, pois esta se tornou mais estreita. Portanto, *precisão* e *certeza* estão relacionadas, e não podemos modificar arbitrariamente uma delas sem que a outra seja modificada. Vejamos, com um exemplo, como esta relação aparece quando lidamos com várias medidas de uma mesma grandeza:

Para fazer medidas, sob condições de repouso, do potencial de Nernst devido aos íons Na^+ no axônio de um nervo de lula, utilizamos um voltímetro graduado em décimos de milivolt (mV). Foram feitas dez medidas; veja abaixo os resultados em mV encontrados:

$V_1 = 54,20$	$V_2 = 54,16$	$V_3 = 54,15$	$V_4 = 54,15$
$V_5 = 54,17$	$V_6 = 54,20$	$V_7 = 54,23$	$V_8 = 54,25$
$V_9 = 54,22$	$V_{10} = 54,24$		

Queremos encontrar o melhor valor para expressar este potencial de Nernst e saber qual é o desvio sobre este valor.

♦ O melhor valor é certamente o *valor médio ou valor mais provável*:

$$\bar{V} = \frac{1}{10} \sum_i V_i = 54,20 \text{ mV}$$

♦ Vamos supor que, para ter boa *precisão*, consideramos um desvio pequeno, por exemplo 0,01 mV. Neste caso, somente duas medidas, entre as dez feitas, estão no intervalo $(54,20 \pm 0,01)$ mV, ou seja, 80% dos valores estão fora deste intervalo. Dizemos que este resultado nos dá muito pouca *certeza*, pois só duas em dez medidas têm o mesmo resultado. Se considerarmos o desvio como 0,02 mV, teremos *quatro medidas* dentro do intervalo $(54,20 \pm 0,02)$ mV. Com um desvio de 0,03 mV, serão *seis medidas* dentro do novo intervalo. Se considerarmos o desvio como 0,05 mV, teremos *todas as medidas* dentro do intervalo $(54,20 \pm 0,05)$ mV. Neste último caso, teremos uma *certeza* total, mas a *precisão* diminui muito.

Desvios e limites de erro

Se $x_1, x_2, \dots, x_n$ são os valores de uma série de n medidas de uma grandeza, o *valor mais provável* da grandeza medida é dado pela *média aritmética* ou *valor médio* do conjunto de medidas, ou seja,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

O *desvio absoluto* de cada medida é definido como o módulo da diferença da medida considerada e o valor médio da grandeza:

$$\Delta x_i = |x_i - \bar{x}|.$$

Enquanto o *desvio médio absoluto* do conjunto de n medidas de uma grandeza é a média aritmética dos desvios de cada medida:

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i,$$

o *desvio padrão* desse conjunto de n medidas é definido como:

$$\sigma_x = \pm \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}.$$

O *resultado final* da medida da grandeza pode-se admitir, com um alto grau de confiança, que está compreendido no intervalo $\bar{x} - \Delta \bar{x}$ e $\bar{x} + \Delta \bar{x}$. É comum representar o valor final da grandeza pela notação $x = \bar{x} \pm \Delta \bar{x}$.

Na prática, o intervalo $\pm \Delta \bar{x}$ do valor final da grandeza corresponde ao valor maior entre o desvio médio absoluto e o desvio avaliado absoluto. Sendo que o *desvio avaliado absoluto* é o valor correspondente à metade da menor divisão da escala do instrumento utilizado nas medidas. Isso faz com que esse desvio tenha um único algarismo significativo.

Por exemplo, se depois de fazer várias medidas do diâmetro médio de um olho humano chegamos ao valor $(2,87 \pm 0,05)$ cm, o *desvio absoluto* dessas medidas é $\pm 0,05$. Isto significa ser *pouco provável* que o verdadeiro valor seja menor que 2,82 cm ou maior que 2,92 cm. O termo *provável* é empregado aqui em termos estatísticos.

♦ Como para conciliar *certeza* e *precisão* não adianta ter uma certeza muito grande e uma precisão pequena, ou vice-versa, então podemos expressar este potencial de Nernst de duas maneiras: $(54,20 \pm 0,03)$ mV ou $(54,20 \pm 0,04)$ mV. No primeiro caso a precisão é boa, e a certeza é de 60% (seis em dez medidas); no segundo, a certeza aumenta para 80%, mas a precisão diminui.



1.5 ESCALA E TAMANHO DOS OBJETOS

Vamos considerar o conceito de *escala*, partindo de objetos com formas geométricas regulares. Na Figura 1.2 mostramos dois cubos, um com lado l , e outro com lado $l' = 2l$; e duas esferas, uma com raio r , e outra com raio $r' = 3r$. Neste caso, um cubo tem o lado duas vezes maior que o outro; este fator 2, ou L , em geral é denominado *fator de escala*. Ao comparar o tamanho de seus raios, o *fator de escala* L para as esferas será 3. Se compararmos as áreas das superfícies externas e os volumes destas figuras de *formas semelhantes*, veremos que:

♦ a razão entre *áreas superficiais* dos cubos é $6l'^2 : 6l^2 = 4 : 1$, ou em função do fator de escala $L^2 : 1$. Ao compararmos as superfícies das esferas, encontraremos o mesmo resultado com a diferença de que no segundo caso temos $9 : 1$, pois $L = 3$. Em geral,

área superficial $\propto$ (comprimento característico)².

♦ a razão entre os *volumes* dos cubos é $l'^3 : l^3 = 8 : 1$, ou em função do fator de escala $L^3 : 1$. O mesmo resultado é encontrado ao compararmos os volumes das esferas, lembrando que neste caso $L = 3$. Em geral,

volume $\propto$ (comprimento característico)³.

Quando dois objetos têm *densidade uniforme*, formas geométricas semelhantes e um fator de escala L , a comparação entre suas *massas* satisfaz a razão $L^3 : 1$. Em geral,

massa $\propto$ (comprimento característico)³.

Normalmente, para objetos com densidade uniforme, formas semelhantes e fator de escala L , é satisfeita a razão:

$$\frac{\text{área superficial}}{\text{volume}} \propto \frac{(\text{comp. característico})^2}{(\text{comp. característico})^3} \propto (\text{comp. característico})^{-1}$$

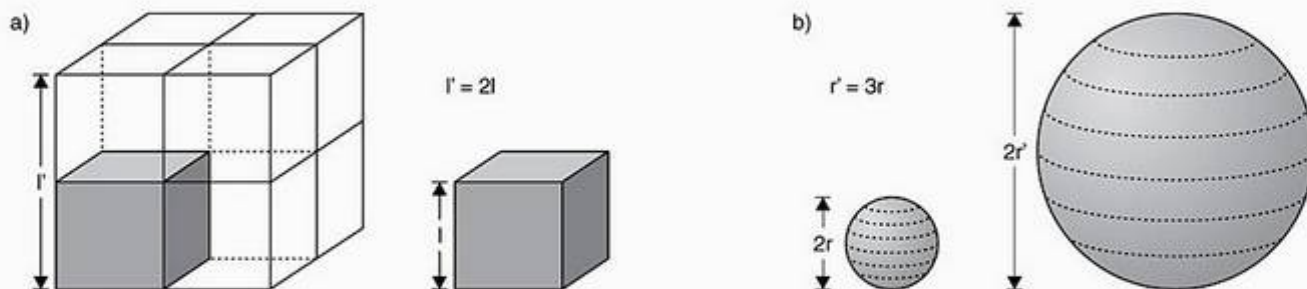


Figura 1.2 a) cubos com lados l' e l e fator de escala $L = l'/l = 2$;
b) esferas com raios r' e r e fator de escala $L = r'/r = 3$.

As relações entre comprimento característico de um objeto com sua área, volume ou massa podem ser igualmente aplicadas a partes do mesmo objeto, de modo que, ao compararmos estas partes com regiões similares de outro objeto de *forma semelhante*, as razões encontradas em função do fator de escala L sejam satisfeitas. Na Figura 1.3, por exemplo, as áreas $A \propto l^2$ e $A' \propto l'^2$ satisfazem a razão $A'/A \propto L^2$.

Com muita cautela, também podemos utilizar estes procedimentos para comparar objetos irregulares, mas de *formas similares*. Por exemplo, na Figura 1.4, uma vez definido o comprimento característico dos objetos e o correspondente fator de escala, pode-se concluir que $A'/A \propto L^2$. É fácil definir o *comprimento característico* de objetos com formas regulares. Porém, no caso de objetos irregulares – frequentemente encontrados –, a escolha do comprimento característico do objeto normalmente é algum *comprimento predominante* do objeto. Mesmo assim, esta escolha pode não ser a única. Na Figura 1.5 mostramos três corpos típicos da biologia⁽⁴⁾, e os *comprimentos característicos* escolhidos são l para o osso, h para o leão e d para o cachorro.

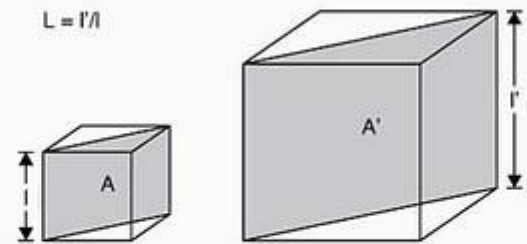


Figura 1.3 Cubos com lados l' e l e fator de escala L . A razão entre as áreas A' e A é L^2 .

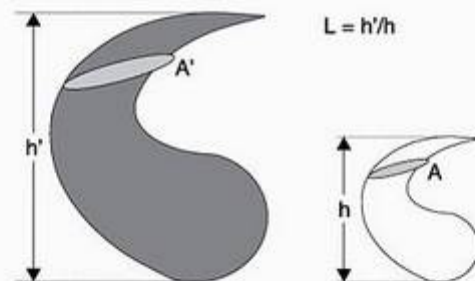


Figura 1.4 Objetos com forma semelhante e fator de escala L . A razão entre as áreas A' e A é L^2 .

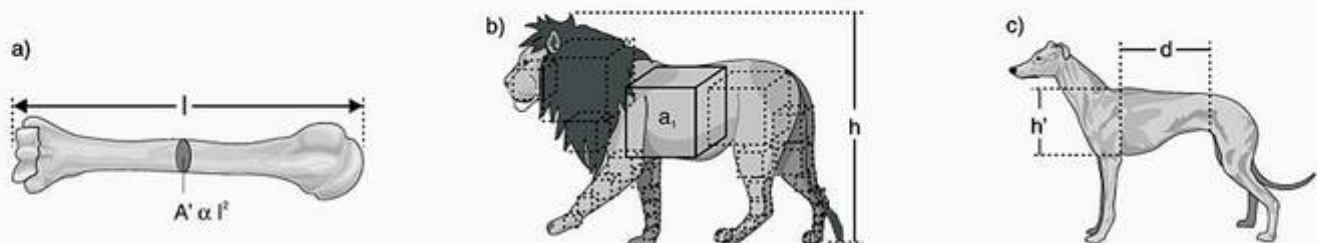


Figura 1.5 a) osso de vertebrado com comprimento característico l , e área de uma seção transversal $A' \propto l^2$; b) corpo de forma irregular com comprimento característico h , e lado do cubo $a_i \propto h$; logo seu volume é $V \propto h^3$; c) quadrúpede com comprimento característico d . A altura h' do tronco pode ser relacionada com d .

A Figura 1.5a mostra o fêmur de um mamífero, com *comprimento característico* l . Tanto o volume como a massa desse osso serão $\propto l^3$; a área superficial A e de uma seção transversal A' serão $\propto l^2$. Na figura 1.5b mostramos o corpo de um animal, representado por um conjunto de cubos de tamanhos diferentes, cada um com lado a_i . Escolhendo a *altura* h do animal como *comprimento característico*, os lados de cada cubo podem ser escritos como $\propto h$. Poderíamos ter escolhido o comprimento l do corpo do animal, ou sua largura w , como comprimento característico, que o raciocínio seguinte não se modificaria:

Se V é o volume total dos cubos que cabem dentro do corpo, este poderá representar, com um erro de aproximação relativamente pequeno, o volume do corpo do animal, ou seja,

$$V = v_1 + v_2 + \dots + v_n = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = \sum_{i=1}^n a_i^3$$

onde v_i é o volume de um cubo com lado a_i . Como $a_i = c_i h$, sendo c_i um fator numérico positivo, então: $a_i^3 = c_i^3 h^3$, logo

$$V = h^3 \sum_{i=1}^n c_i^3 \propto h^3.$$

Tanto h como a_i e V são quantidades variáveis. Para qualquer valor da dimensão linear h , o lado a_i e o volume V estão univocamente determinados. Por um raciocínio similar, podemos subdividir a *superfície* do corpo do animal em um número grande de quadrados com lados diferentes. Se A é a superfície total do corpo, então pode-se provar que $A \propto h^2$.

Na Figura 1.5c, mostramos outro critério para escolher o *comprimento característico* do corpo de um animal. Neste caso, optamos pela distância entre dois pontos de seu corpo, como a *distância* d ombro-quadril. Esse comprimento característico é muito usado em animais quadrúpedes, pois facilita a comparação entre espécies com formas semelhantes, a partir da razão $d : h'$, sendo h' a altura do tronco.



PROBLEMAS

Para as grandezas físicas das primeiras dez questões adotamos as unidades do Sistema Internacional. As respostas a estas questões deverão ser dadas em função das unidades básicas do SI.

1. A *força* resultante F , experimentada por uma partícula de massa m quando tem aceleração a , é $F = ma$. A unidade da força é o newton (N). Escreva explicitamente esta unidade.
2. A *energia cinética* K , de uma partícula de massa m , com velocidade v , é $K = mv^2/2$. A unidade da energia é o joule (J). Escreva explicitamente esta unidade.
3. Duas massas m_1 e m_2 estão separadas por uma distância r ; a *energia potencial* U deste sistema é $U = -Gm_1m_2/r$. A unidade da energia é o joule (J). Escreva as unidades da constante universal G .
4. A *taxa metabólica* R em animais, quando realizam uma quantidade de trabalho w , no tempo t , pode ser escrita como $R = w/\epsilon t$, onde a eficiência do animal ϵ é uma quantidade sem unidades. Escreva as unidades de R .
5. A magnitude da *força de empuxo* E , exercida por um fluido de densidade ρ sobre um corpo de volume V , é $\rho g V$, onde g é a aceleração devido à gravidade. Escreva as unidades de ρ .
6. A *viscosidade* η , de um líquido que flui através de um tubo de comprimento L e raio r , pode ser representada por $\eta = F_v/4\pi v_m L$, onde F_v é a força de viscosidade

do fluido, e v_m é a velocidade do fluido ao longo do centro do tubo. A unidade de η é o poiseuille (PI). Escreva explicitamente esta unidade.

7. A pressão osmótica p_{os} de uma solução, à temperatura absoluta T , é dada por cRT , onde c , a concentração molar da solução, é o número de moles do soluto por unidade de volume do solvente, e R é uma constante. Escreva as unidades de R .
8. Em um meio sólido de densidade ρ , a velocidade do som é dada por $v = \sqrt{Y/\rho}$, onde Y é o módulo de Young do sólido. Escreva as unidades de Y .
9. A intensidade da força elétrica F_e , entre duas cargas q_1 e q_2 , separadas por uma distância r , é dada por $F_e = kq_1q_2/r^2$, onde k é uma constante elétrica universal. Escreva as unidades de k .
10. Uma corrente I percorre um fio metálico de raio r e comprimento L . Se a corrente por unidade de área é proporcional à diferença de potencial V por unidade de comprimento, então $(I/A) = \sigma(V/L)$, onde σ é a condutividade do metal. Escreva as unidades de σ .
11. Quantos algarismos significativos tem cada uma das seguintes quantidades:

a) 2;	b) 2,00;	c) 0,136;	d) 2,483;
e) $2,483 \times 10^3$;	f) 310;	g) $3,10 \times 10^2$;	h) $3,1 \times 10^2$.
12. Faça as seguintes operações considerando os algarismos significativos:

a) $0,23 + 450,25 + 20,5 + 5,1517$;	b) $99,543 - 2,75$;
c) $3,19463 \times 2,75$;	d) $68,72 : 23,1$.
13. Na medida dos lados a e b de um prisma retangular, obtivemos os seguintes resultados: Lado a : 20,2 cm; 20,1 cm; 19,7 cm; 20,2 cm; e 19,8 cm.
Lado b : 10,3 cm; 9,8 cm; 10,0 cm; 9,7 cm; e 10,2 cm.
Determine a maneira correta para exprimir:

a) o lado a ;	b) o lado b ;
c) a área do retângulo;	d) o perímetro do retângulo.
14. Supondo que o cálculo envolvendo diversas medidas forneceu os resultados abaixo, faça o arredondamento dos algarismos significativos para uma casa decimal:

a) 23,532 cm;	b) 57,478 mm;	c) 1,45481 m;
d) 36,555 mm;	e) 2,3590 cm;	f) 3,1416 mm.
15. Temos um conjunto de medidas da massa de uma pessoa: 61,235 kg; 61,915 kg; 60,781 kg; e 61,008 kg. Calcule o valor médio da massa e seu desvio absoluto.
16. Se $x = (23,5 \pm 0,1)\text{cm}$, $y = (17,8 \pm 0,4)\text{cm}$ e $z = (93,9 \pm 0,2)\text{cm}$, determinar o valor de $x + y - z$ e o desvio absoluto desta quantidade.
17. Se $x = (0,743 \pm 0,005)\text{s}$ e $y = (0,384 \pm 0,005)\text{s}$, calcule $2x + 5y$ e o desvio absoluto desta quantidade.
18. Foram feitas doze medidas do comprimento de uma barra metálica, por doze pessoas. Cada uma utilizou uma régua cuja menor escala é a de milímetros. Os resultados obtidos foram: 16,3 cm; 16,2 cm; 16,3 cm; 16,5 cm; 16,4 cm; 16,1 cm; 16,2 cm; 16,3 cm; 16,0 cm; 16,3 cm; 16,1 cm; e 16,5 cm. Determine o valor médio do comprimento da barra e seu desvio absoluto.

19. Em um trabalho de laboratório, foi utilizado um voltímetro cuja escala estava graduada em décimos de volt. Os estudantes tomaram as seguintes medidas para o potencial aplicado a um músculo: 5,40 V; 5,42 V; 5,39 V; 5,42 V; 5,43 V; 5,41 V; 5,39 V; 5,42 V; 5,42 V; 5,39 V; 5,40 V; 5,45 V; 5,40 V; 5,40 V; e 5,38 V. Calcule o valor médio do potencial aplicado e seu desvio absoluto.
20. Uma célula de forma esférica, com volume V , tem uma área externa A .
 - a) Expressar V em função de A .
 - b) Se duplicarmos V , qual a variação em A ?
 - c) Se duplicarmos A , qual a variação em V ?
21. As dimensões lineares de um corpo de forma geométrica regular aumentam uniformemente, de modo que seu volume aumenta 60%. Quanto aumentará sua superfície externa?
22. Uma pulga de massa m salta com facilidade uma altura H , cem vezes maior que seu tamanho. A energia necessária para este salto é mgH . Se a pulga fosse dez vezes maior em seu tamanho, poderia saltar proporcionalmente mais alto? Admita que os músculos envolvidos no salto têm uma resistência proporcional a seu volume.
23. Suponha que todas as dimensões lineares de um animal aumentem em 10%. Qual será o incremento de sua superfície, volume e peso?
24. Os comprimentos d e h na Figura 1.5c, para uma pantera adulta, são: $d = 89$ cm e $h = 45$ cm. Encontre uma relação empírica entre d e h , de modo que a razão $d : h^n$ seja da ordem de 7,03. Utilizando esta relação empírica entre d e h , para um lhama adulto, qual será o valor de h para este quadrúpede, se $d = 125$ cm?

Referências Bibliográficas

1. EDITOR'S PAGE. International System of Units. *Health Physics*, v. 59, n.1, p. 5-7, July, 1990.
2. BEVINGTON, P.R.; ROBINSON, D.K. *Data reduction and error analysis for the physical science*. New York: McGraw-Hill, 1992.
3. VUOLO, J.H. *Fundamentos da teoria de erros*. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
4. ALEXANDER, R.M. Design by numbers. *Nature*, v. 412, n. 6847, p. 591, August, 2001.

Capítulo 2

Gráficos, Decaimento Exponencial, Crescimento Exponencial e Escala na Biologia



2.1 GRÁFICOS

Normalmente um conjunto de valores teóricos ou mesmo as medidas feitas em *trabalhos experimentais* são colocados no papel (ou no computador) para compor *gráficos*. Dessa maneira, podemos ter uma idéia imediata do comportamento das grandezas observadas. Assim, o *gráfico* é um dos modos mais convenientes para visualizar e/ou interpretar uma relação entre duas ou mais grandezas. Um gráfico pode evidenciar uma relação entre grandezas, que seria difícil de estabelecer só inspecionando uma tabela. Antes de levar os valores das grandezas para a folha de gráfico, é necessário definir dois ou mais eixos que servirão para representar os valores das grandezas. Para construirmos um gráfico, devemos estabelecer uma *escala* para cada eixo, de modo que os pares de valores possam ser colocados no gráfico, independente do intervalo de variação desses valores e dos comprimentos dos eixos. As folhas para gráficos mais utilizadas apresentam *dois tipos de escalas*: a milimetrada e a logarítmica. A combinação dessas *escalas* dá origem a três tipos de folha para gráficos:

- ♦ *Milimetrado*: a folha apresenta *escalas lineares*.
- ♦ *Mono-log*: a folha apresenta uma *escala logarítmica* e outra linear.
- ♦ *Di-log*: a folha apresenta *escalas logarítmicas*.

A seguir daremos algumas regras muito úteis para a construção de um gráfico:

- ♦ Em uma mesma folha é possível construir vários *gráficos*; basta usar símbolos diferentes (♣, ♦, ♥, ▲...) e uma legenda que identifique cada tipo de ponto.
- ♦ Quando o valor das grandezas já tem seu desvio absoluto definido, o gráfico deve trazer esta informação. Por exemplo, se a grandeza representada no *eixo y* tem desvio $\pm \Delta y$ e a representada no *eixo x* tem desvio $\pm \Delta x$, então a representação desses desvios na folha para gráfico será

$$\begin{array}{c} +\Delta y \\ | \\ \bullet \\ | \\ -\Delta y \end{array} + \begin{array}{c} -\Delta x \text{-----} +\Delta x \end{array} = \begin{array}{c} +\Delta y \\ | \\ -\Delta x \text{-----} +\Delta x \\ | \\ -\Delta y \end{array} .$$

♦ Na medida do possível, convém representar os gráficos por uma reta. Muitas vezes, para isso, basta fazermos mudanças convenientes das grandezas que definem o gráfico.



2.2 CONSTRUÇÃO DE ESCALAS^(1,2)

Escala Linear

Considere um eixo de comprimento L . Nesse eixo queremos colocar um conjunto de valores positivos e negativos de uma *grandeza* X . Se a diferença entre os valores máximo e mínimo da grandeza é Δ , o *passo da escala* a ser utilizado é o seguinte: $p = L/\Delta$. Na medida do possível, convém *arredondarmos* o valor de Δ , a fim de que p seja inteiro ou, pelo menos, semi-inteiro. Com o passo da escala definido, há condições para colocar todos os valores da grandeza X no eixo. Por exemplo, para uma *escala linear* o passo é p , como mostra a Figura 2.1.

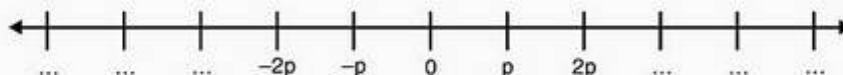


Figura 2.1 Escala linear com passo p .

Considere um conjunto de medidas de duas grandezas G e G' , sendo u e u' , respectivamente, as unidades dessas grandezas. Agora vamos levar os valores dessas grandezas para a folha de gráfico cujas escalas são *lineares*.

Inicialmente definimos os passos p_x e p_y para os eixos horizontal e vertical, respectivamente. Colocamos os dados de G e G' na folha e finalmente traçamos o gráfico. A Figura 2.2 mostra uma *relação linear* entre as grandezas G e G' .

Para encontrarmos uma *relação funcional* entre G e G' a partir do gráfico destas grandezas, procedemos da seguinte maneira:

- ♦ Determinamos o *declive (inclinação) da reta*

$$m = \frac{15 - 5}{8 - 0} = \frac{10 u'}{8 u} = 1,25 u'/u.$$

- ♦ Determinamos o valor de G' quando $G = 0$

$$G = 0 \Rightarrow G' = 5 u'.$$

- ♦ Como o gráfico das grandezas G e G' é uma *reta*, teremos

$$G' = 5 u' + 1,25 \frac{u'}{u} \cdot G.$$

Em geral, toda vez que o gráfico correspondente a duas grandezas G e G' for uma reta, a relação funcional entre essas grandezas será

$$G' = b + mG,$$

onde b é o valor de G' quando $G = 0$; e m é o declive ou inclinação da reta.

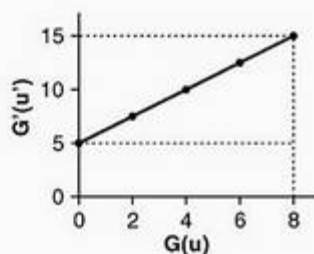


Figura 2.2 Relação linear entre as grandezas G e G' .

Exemplo: A velocidade de um animal em função do tempo foi medida. Os dados encontrados são apresentados a seguir.

$v(\text{m/s})$:	9	13	17	21	25	29
$t(\text{s})$:	2	4	6	8	10	12

- Em uma folha milimetrada faça o gráfico $v \times t$.
- Que relação há entre velocidade e tempo?
- Encontre uma relação funcional entre essas grandezas.

Resolução: Colocaremos os valores de v no eixo vertical e os de t , no horizontal. Os passos das escalas dos eixos vertical e horizontal serão, respectivamente,

$$p_v = L_v/\Delta_v \quad \text{e} \quad p_t = L_t/\Delta_t,$$

onde L_v e L_t são os comprimentos dos eixos vertical e horizontal, respectivamente,

$$\Delta_v = 29 \text{ m/s} - 9 \text{ m/s} = 20 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad \Delta_t = 12 \text{ s} - 2 \text{ s} = 10 \text{ s}.$$

- A Figura 2.3 mostra o gráfico das grandezas velocidade e tempo.

- A inclinação da reta será

$$m = AB/BC = (25 \text{ m/s} - 17 \text{ m/s})/(10 \text{ s} - 6 \text{ s}) = 2 \text{ m/s}^2.$$

- Quando $t = 0$, teremos $v = 5 \text{ m/s}$; logo, a relação funcional entre essas grandezas será

$$v = 5 + 2t, \text{ em m/s.}$$

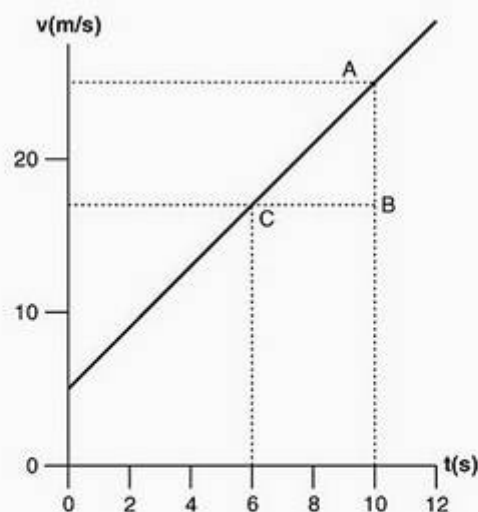


Figura 2.3 Gráfico das grandezas velocidade e tempo.

Escala Logarítmica

Se tivermos um conjunto de valores $x_1, x_2, \dots, x_n$, e quisermos colocar em um eixo os logaritmos na base decimal desses valores, então podemos calcular os logaritmos de cada um dos x_n valores e colocá-los em um *eixo cuja escala é linear* ou ainda colocar os x_n valores diretamente em um *eixo de escala logarítmica*.

Na Figura 2.4 mostramos um eixo horizontal de comprimento L , que será denominado *ciclo da escala*. Esse ciclo será dividido em intervalos proporcionais à diferença $\log(m+1) - \log m$, sendo $m = 1, 2, \dots, 9$. Dessa forma, teremos construído um *eixo logarítmico*. Em geral as folhas para gráfico com escalas logarítmicas têm vários ciclos nos eixos vertical e/ou horizontal.

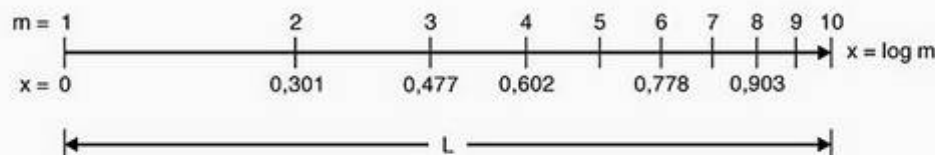


Figura 2.4 Escala logarítmica em um ciclo de escala L .

O comprimento L do ciclo é proporcional à diferença $\log 10 - \log 1 = 1$; ou, em geral, L é proporcional à diferença $\log 10^{n+1} - \log 10^n$, onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Se $x = \log m$ e $L = 10$ cm, então dentro de cada ciclo a diferença entre os logaritmos de

- ♦ $m = 2$ e $m = 1$ será 0,301 e portanto $L = 3,01$ cm.
- ♦ $m = 3$ e $m = 1$ será 0,477 e portanto $L = 4,77$ cm.
- ♦ $m = 9$ e $m = 1$ será 0,954 e portanto $L = 9,54$ cm.

Quando a folha para gráfico tem vários ciclos, como se vê na Figura 2.5, os extremos de cada ciclo tomam valores correspondentes a potências inteiras de 10.

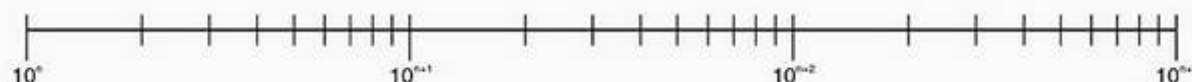


Figura 2.5 Eixo logarítmico, com três ciclos. Os extremos de cada ciclo são potências inteiras de 10.

Novamente temos um conjunto de medidas de duas grandezas G e G' , sendo u e u' as respectivas unidades dessas grandezas. Ao levarmos essas medidas para uma folha de gráfico cuja escala é linear, obtemos uma curva que corresponde a uma função potência, então, a relação geral entre essas grandezas será

$$\blacktriangleright G' = BG^m, \quad (2.1)$$

onde B e m são constantes, podendo assumir valores positivos ou negativos. Se, além do gráfico, precisarmos determinar a relação funcional entre G e G' , será necessário determinar os valores das constantes B e m . Às vezes a escala linear contém o valor 1 da grandeza G ; nesse caso, o valor correspondente de G' será B . Quando isso não acontece, para determinar B e m , recorremos ao gráfico onde os valores dessas grandezas são apresentados em uma folha de gráfico di-log.

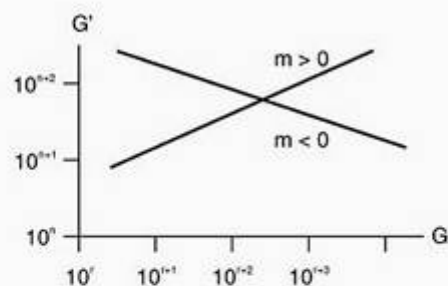


Figura 2.6 Gráfico em uma folha di-log de uma função potência. A inclinação da reta pode ser positiva ($m > 0$) ou negativa ($m < 0$) e n e r podem ter valores inteiros $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Na Figura 2.6 mostramos em uma folha di-log as possíveis formas do gráfico das grandezas G e G' , quando a função potência é a relação funcional entre elas. Se em (2.1) tomarmos os logaritmos, teremos

$$\log G' = \log B + m \log G.$$

Fazendo $\log G' = y$; $\log G = x$ e $\log B = b$, teremos a equação

$$\blacktriangleright y = b + mx, \quad (2.2)$$

que é a equação de uma reta com inclinação m . O valor de b é igual ao de y , quando $G = 1$.

Exemplo: A taxa metabólica R de um espécime com massa M indica a quantidade de energia que um organismo usa por unidade de tempo para executar uma função. A seguir apresentamos alguns valores de R ,

Espécimes:	rato	coelho	gato	cão	homem
R (kcal/h):	2,5	5,4	7,3	24,3	85,5
Massa (kg):	0,7	2,0	3,0	15,0	80,0

- Encontre uma relação funcional para essas grandezas.
- Quais serão os valores de R para um camundongo de 20 g e para um cavalo de 800 kg?

Resolução:

- A Figura 2.7 mostra o gráfico $R = f(M)$ construído em uma folha com *escalas lineares*, onde M é a massa do espécime. Esse gráfico representa uma *função potência*, logo a relação funcional entre essas grandezas é: $R = BM^m$. Nesse caso, a escala da grandeza M contém o valor $M = 1$ kg; assim, podemos determinar o correspondente valor de R que, por sua vez, também será o valor de B . Logo,

$$M = 1 \text{ kg} \Rightarrow R = B = 3,25 \text{ kcal/h} \quad \therefore R = 3,25 M^m.$$

A Figura 2.8 mostra o gráfico $R = f(M)$ feito em uma folha com *escalas logarítmicas*. Esse gráfico é uma *reta*, cuja inclinação m é determinada a partir do ΔABC :

$$m = AB/BC = (\log 18 - \log 5)/(\log 10 - \log 1,78) = 0,742 \approx 3/4.$$

Logo, a relação funcional entre essas grandezas será

$$R = 3,25 M^{3/4}.$$

- Admitindo que a extrapolação é válida e utilizando essa relação funcional, encontramos, para o camundongo, $R = 0,173$ kcal/h e, para o cavalo, $R = 488,9$ kcal/h.

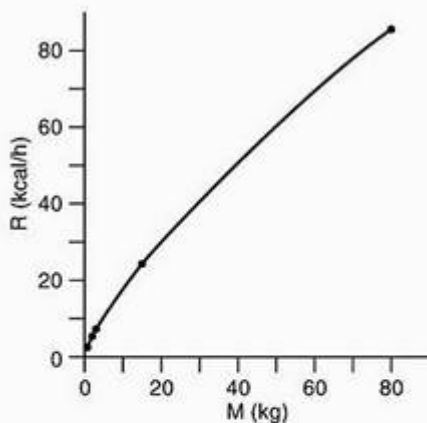


Figura 2.7 As grandezas R e M seguem uma relação de potência. Quando $M = 1$ kg, temos $R = 3,25$ kcal/h.

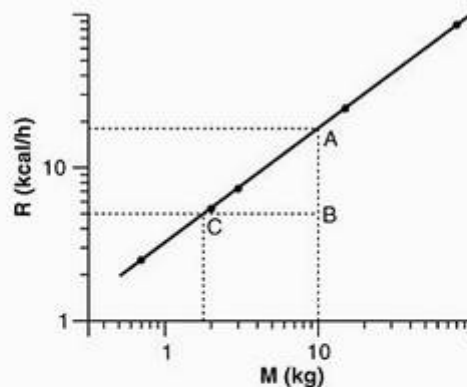


Figura 2.8 Gráfico das grandezas R e M feito em uma folha di-log. Do ΔABC calculamos que a inclinação da reta é $m = 0,742$.

2.3 DECAIMENTO E CRESCIMENTO EXPONENCIAL

Toda função da forma $y = Bq^x$ é denominada *função exponencial*. Nessa função, tanto y quanto x são quantidades variáveis; sendo x uma quantidade real e B e q , dois parâmetros, onde $q > 0$. Muitas observações experimentais na biologia têm comportamentos que seguem uma *função exponencial*. Essa função é muito importante nos tratamentos matemáticos e estatísticos de vários problemas nas ciências da vida, sendo, por isso, conveniente conhecer suas principais propriedades. A *função exponencial* na forma $y = Bq^x$ não é prática para ser diferenciada e/ou integrada, a menos que seja introduzida uma base especial, como o número $e = 2,718281828459...$. Com essa base, a *função exponencial* toma a forma $y = Be^{ax}$, onde e é uma base natural, e a , um parâmetro positivo ou negativo.

Tendo um conjunto de medidas de duas grandezas G e G' e, levando esses dados a uma folha de gráfico com *escala linear*, se o gráfico obtido corresponder a uma *função exponencial*, então a relação funcional entre essas grandezas será da forma

$$G' = B \cdot \exp(aG) = B e^{aG}, \quad (2.3)$$

onde B e a são constantes, podendo assumir valores positivos ou negativos. Nas Figuras 2.9 e 2.10 mostramos a *forma da função exponencial*, usando *escalas lineares* para os casos em que o parâmetro a respectivamente é positivo ou negativo. Se:

♦ $a > 0$, então G tem um *crescimento exponencial* com relação a G' , caso da Figura 2.9.

♦ $a < 0$, então G tem um *decaimento exponencial* com relação a G' , caso da Figura 2.10.

Na equação (2.3), note que, ao fazer $G = 0$, o valor de G' correspondente será o valor do parâmetro B .

Para que a *relação funcional* entre essas grandezas esteja completamente determinada, falta conhecer o valor do parâmetro a . Para isso, recorreremos ao gráfico dos valores dessas grandezas construído em uma folha *mono-log*.

Na Figura 2.11 temos a *forma do gráfico* apresentado em uma folha *mono-log* das grandezas G e G' . Se em (2.3) tomarmos os logaritmos, teremos

$$\log G' = \log B + (a \cdot \log e)G. \quad (2.4)$$

Fazendo em (2.4) $\log G' = y$; $\log B = b$ e $a \cdot \log e = m$, teremos

$$y = b + mx, \quad (2.5)$$

que é a equação de uma reta com inclinação m . Entretanto, como a escala de G' é logarítmica, deve-se lembrar que, para dois valores g'_2 e g'_1 lidos diretamente na escala logarítmica, sua diferença $(\log g'_2 - \log g'_1)$ é o valor que será utilizado no cálculo de m .

O parâmetro a é determinado a partir da relação

$$a = m / \log e = m / 0,4343. \quad (2.6)$$

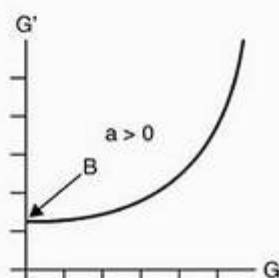


Figura 2.9 Função crescimento exponencial. O valor de B é o valor de G' , quando $G = 0$.

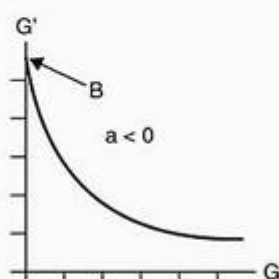


Figura 2.10 Função decaimento exponencial. O valor de B é o valor de G' , quando $G = 0$.

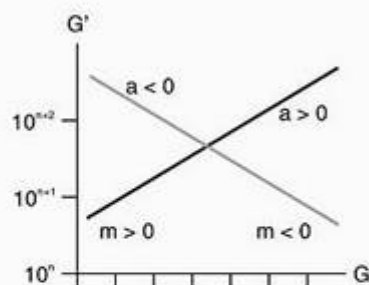


Figura 2.11 Gráficos em uma folha *mono-log* das funções: crescimento (—) e decaimento (---) exponencial.

Assim, vemos que o uso de uma folha mono-log evita o cálculo dos logaritmos das medidas da grandeza G' , além de permitir, por um cálculo bastante simples, a determinação do parâmetro a .

Exemplo: Um organismo unicelular se reproduz por *divisão binária* a uma taxa constante. Se, inicialmente, há *duas bactérias* e cada uma se divide em *duas* a cada 20 minutos, teremos o resultado a seguir.

Número de bactérias N:	2	4	8	16	32	...
Tempo t (minutos):	0	20	40	60	80	...

- Determinar, a partir de um gráfico de N e o tempo t , uma relação funcional entre essas grandezas.
- Calcular o número de bactérias quando $t = 1$ h e $t = 2$ h.

Resolução:

- A Figura 2.12 mostra o gráfico $N = f(t)$ construído com *escalas lineares*. Este gráfico representa uma *função de crescimento exponencial*; portanto, a relação funcional entre essas grandezas será $N = B \cdot \exp(at)$ ou $N = B \cdot e^{at}$, com $a > 0$. Do gráfico obtemos $N = 2$ bactérias, quando $t = 0$; isto implica que $B = 2$. Logo a relação funcional entre N e t será $N = 2\exp(at)$ ou $N = 2 \cdot e^{at}$.

Na Figura 2.13 tem-se o gráfico $N = f(t)$ apresentado em uma folha *mono-log*. Este gráfico é uma *reta*, cuja inclinação m é determinada a partir do ΔABC :

$$m = AB/BC = (\log 16 - \log 4)/(60 - 20) = 0,015$$

Utilizando a equação (2.6), calculamos $a = 0,0346$. $\therefore N = 2\exp(0,0346t)$ ou $N = 2 \cdot e^{0,0346t}$ será a relação funcional entre N e t . Note que a taxa de variação do *número total* de bactérias é proporcional a esse número, ou seja, $(dN/dt) = 0,0346 N$.

Observe que a unidade de $a = 0,0346$ é t^{-1} .

- Da equação determinada em (a), encontraremos:
 - ♦ 1 hora depois de iniciada a *divisão*, 16 bactérias
 - ♦ 2 horas depois de iniciada a *divisão*, 128 bactérias.

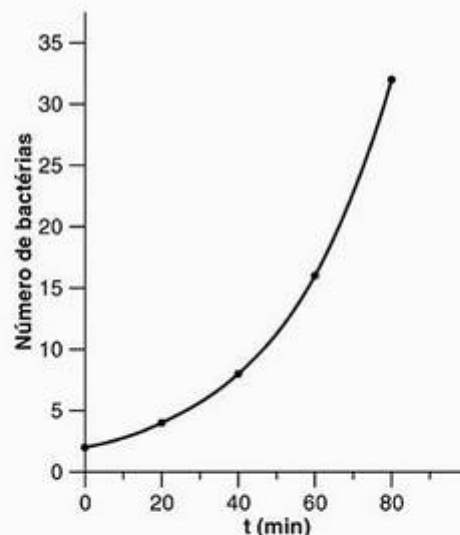


Figura 2.12 As grandezas N e t seguem uma lei de crescimento exponencial. Quando $t = 0$, temos $N = 2$ bactérias.

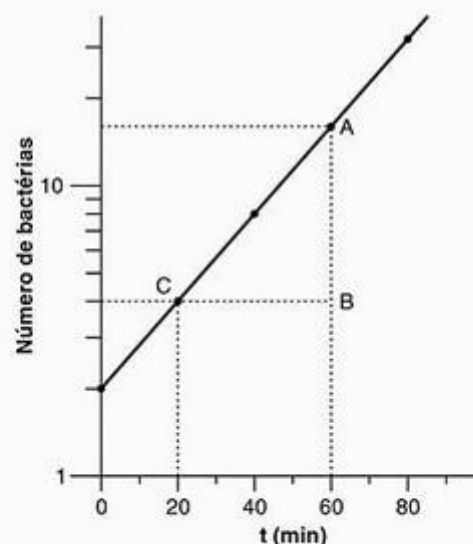


Figura 2.13 Gráfico $N = f(t)$ em escala mono-log. Do ΔABC calculamos que a inclinação da reta é $m = 0,015$.

Exemplo: Considere uma substância que contém átomos radioativos de tecnécio (^{99}Tc). Foram feitas medidas da atividade relativa (A) desse átomo (a definição da *atividade* de uma amostra é dada no final do exemplo) a cada 2 horas, e foram encontrados os valores abaixo:

A:	1	0,79	0,63	0,50	0,40	0,32	0,25
t(h):	0	2	4	6	8	10	12

Determine:

- A partir do gráfico $A = f(t)$, a relação funcional entre essas grandezas.
- Os tempos em que a atividade relativa do ^{99}Tc é 0,5 (50%) e $0,3679 = e^{-1}$.

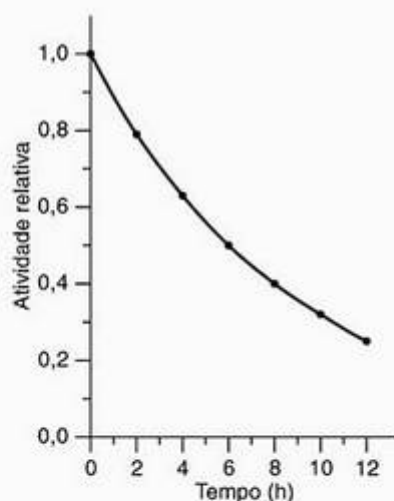


Figura 2.14 As grandezas A e t seguem uma lei de decaimento exponencial. Quando $t = 0$, temos $A = 1$.

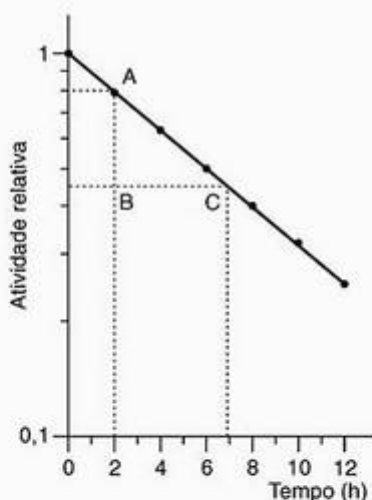


Figura 2.15 Gráfico $A = f(t)$ em escala mono-log. Do ΔABC calculamos que a inclinação reta é $m = -0,05$.

Resolução:

- A Figura 2.14 mostra o gráfico $A = f(t)$ construído com *escalas lineares*. Este gráfico representa uma *função de decaimento exponencial*; portanto, a relação funcional entre essas grandezas será: $A = B \cdot \exp(at)$ ou $A = B \cdot e^{at}$, com $a < 0$. Do gráfico obtemos $A = 1$, quando $t = 0$; isto implica que $B = 1$. Logo a relação funcional entre A e t será $A = \exp(at)$ ou $A = e^{at}$.

Na Figura 2.15 tem-se o gráfico $A = f(t)$ construído em folha *mono-log*. Este gráfico é uma *reta*, cuja inclinação m é determinada a partir do ΔABC :

$$m = AB/BC = (\log 0,8 - \log 0,45)/(2 - 7) = -0,05$$

Utilizando a equação (2.6), calculamos

$a = -0,115$. $\therefore A = \exp(-0,115t)$ ou $A = e^{-0,115t}$ será a relação funcional entre A e t .

- Da equação determinada em (a), encontraremos:

- ♦ $A = 0,5$, quando $t = 6$ horas (tempo de meia-vida dos átomos)
- ♦ $A = 0,3679$, quando $t = 8,69$ horas (tempo de vida média)
- ♦ A *atividade* A de uma amostra de qualquer material radioativo é a taxa pela qual *os núcleos* dos átomos que constituem essa amostra *decaem*. Se em um dado instante t a amostra tem N núcleos, sua atividade A é dada por $A = -dN/dt$. A é expresso em desintegrações/s. A Figura 2.15 mostra que a variação da atividade em função do tempo segue uma *lei de decaimento exponencial*, ou seja, $A = A_0 \cdot \exp(-\lambda t)$ ou $A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$. Onde λ é a constante de decaimento radioativo desses átomos e A_0 é a atividade em $t = 0$.
- ♦ O *tempo de meia-vida* $T_{1/2}$ desses átomos é o tempo necessário para que a atividade A caia a $\frac{1}{2}A_0$ ou $A_0/2$ ou metade. $\therefore T_{1/2} = \ln 2 / \lambda = 0,693 / \lambda$. No caso do ^{99}Tc , $T_{1/2} = 0,693 / 0,115 = 6$ horas.
- ♦ O *tempo de vida média* T , característico do decaimento, é o tempo médio que um núcleo sobrevive antes de decair. $\therefore T = 1 / \lambda = T_{1/2} / 0,693$. Para o ^{99}Tc , $T = 8,69$ horas. (observe que os produtos $\lambda \cdot \text{tempo}$ são constantes, $\lambda T_{1/2} = \ln 2 = 0,693$ e $\lambda T = 1$.)



2.4 ESCALAS NA BIOLOGIA⁽³⁾

Os cientistas às vezes podem ser classificados como os que *ajuntam ou separam* fatos que ocorrem na natureza. Os que *ajuntam*, geralmente os *físicos*, descrevem leis que ligam fenômenos aparentemente diversos entre si. Os que *separam*, geralmente os das *ciências da vida*, relatam mais a diversidade. Mas há exceções, como é o caso do problema da *escala biológica*, em que ambas as tendências reunidas permitem melhorar a compreensão de fatos conhecidos.

Como relacionar as mudanças de várias características de organismos vivos (duração da vida, frequência cardíaca, rapidez com que convertem energia, etc.) com o tamanho de seus corpos? Para relacionar a *função biológica* dos organismos com seu *tamanho*, recorremos ao conceito de *escala*.

Na biologia o *tamanho* de um *organismo* está diretamente relacionado com suas características e *funções*. Assim, vários problemas da biologia podem ser analisados de maneira simples, relacionando a *forma* e/ou o *tamanho* e/ou o *peso* dos organismos com algumas de suas funções biológicas. Quando nos referimos a um *organismo*, este pode ser único ou constituído de organismos menores.

As propriedades biológicas de um *organismo* são bastante dependentes de seu comprimento, área superficial, volume e massa. Tendo em vista um *comprimento característico* para um organismo complexo, interessa à biologia saber como suas diversas partes dependem desse comprimento. Por exemplo, ao considerarmos 1,80 m de altura como *comprimento característico* para um ser humano, suas diversas partes ou constituintes terão tamanho, volume ou massa associados ao valor desse *comprimento característico*. Como as *funções* dessas partes ou do organismo total podem estar relacionadas com esse comprimento característico? Poderíamos tentar avançar um pouco mais, fazendo o seguinte questionamento: considerando alguma função biológica de um ser humano de *comprimento característico* l , podemos prever essa mesma função biológica para outro ser humano de *comprimento característico* l' ? Ou ainda: podemos prever essa mesma função biológica para uma parte correspondente de outro ser vivo com forma semelhante à do ser humano? Alguns exemplos que apresentamos a seguir ajudarão a chegar a uma resposta.

Crescimento de uma célula

Vamos admitir que uma *célula* tem *forma esférica* de raio r . Quando esta célula *cresce*, sua área superficial aumenta ao longo de duas dimensões ($\propto r^2$), mas o volume aumenta ao longo de três dimensões ($\propto r^3$). Sua *sobrevivência* exige uma certa harmonia entre crescimento superficial e de volume. Isso é devido ao fato de que o fluxo de íons e moléculas como O_2 e CO_2 ou, generalizando, o fluxo de nutrientes através de sua superfície desenvolve-se com ritmo mais lento que o de sua *capacidade metabólica*, que é proporcional ao seu volume.

Além disso, vamos admitir também que as propriedades físico-químicas dos componentes celulares não experimentam alterações importantes que possam influenciar seu mecanismo de sobrevivência.

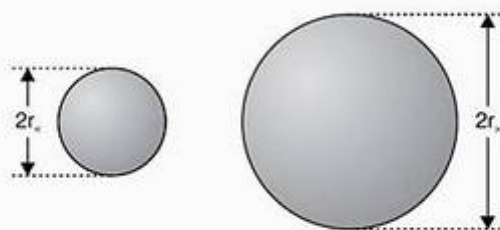


Figura 2.16 Dimensões críticas de uma célula. Toda célula de raio r terá condições para sobreviver, se $r_c < r < r_s$.

Se as dimensões críticas de uma célula são caracterizadas pelos raios r_c e r_s , como se vê na Figura 2.16, então toda célula com raio r *colapsará* se:

- ♦ $r < r_c$, pois seu metabolismo não será suficiente para dar conta do influxo de nutrientes através de sua superfície;
- ♦ $r > r_s$, pois o fluxo de nutrientes através de sua superfície não acompanhará sua capacidade metabólica.

Logo, somente as células com raio $r_c < r < r_s$ conseguirão *sobreviver*. O *fator de sobrevivência* f_s de uma célula pode ser avaliado pela razão entre o fluxo de nutrientes através da superfície celular e sua capacidade metabólica. Isto significa que o desempenho do radiador biológico deve acompanhar o desempenho do motor biológico.

Se o *comprimento característico* desse organismo é r , então o fator de sobrevivência será $f_s \propto 1/r$. Enquanto a célula está *crescendo*, teremos $f_s > 1$, mas quando $r \rightarrow r_s$ o valor de f_s decresce continuamente até chegar a $f_s \equiv 1$.

Considere uma célula com raio igual a r_s e outra com raio r sendo $r_c < r < r_s$. O *fator de escala* entre estas células com formas semelhantes será $L = r_s/r$. Enquanto a célula de raio r estiver crescendo, teremos $L > 1$, e o valor limite do *fator de escala* será $L = 1$. Biologicamente, quando $L < 1$, a célula que está crescendo não conseguirá sobreviver. Logo, quando esta célula atingir um raio $r \equiv r_s$, ela deverá *parar de crescer ou se dividir*. Se a célula se *dividir*, as novas células terão cada uma $f_s > 1$, repetindo-se novamente o ciclo de vida desse organismo.

Resistência em organismos de tamanhos diferentes

As aplicações mais comuns do conceito de *escala* às atividades de animais relacionam-se com a *capacidade*:

- ♦ que seu esqueleto tem para suportar o próprio peso; e
- ♦ para suportar pesos externos, sem afetar seu funcionamento normal.

Há questões relacionadas com o *tamanho de seres vivos*. Por exemplo, pode um rato ser do *tamanho* de um gato ou uma formiga do *tamanho* de um ser humano? Há também questões relacionadas com o *peso* que esses seres vivos podem suportar ou carregar. Estas poderão ser respondidas com *precisão razoável* se encontrarmos uma relação entre o *tamanho* do ser vivo e alguma propriedade relacionada com o *conjunto de atividades* que ele realiza para sobreviver. Os ossos e/ou músculos destes seres são os principais elementos responsáveis por sua *resistência* aos diversos esforços a que são submetidos. Apresentaremos a seguir alguns argumentos que utilizam os conceitos de *comprimento característico* e *escala*, que permitiram esclarecer o papel dos ossos e dos músculos nas atividades desses seres vivos.

♦ A *capacidade de um osso* para suportar uma compressão direta ou uma tensão de carga é proporcional à área de sua secção transversal, ou seja, $\propto l^2$, onde l é o comprimento característico do organismo que contém o osso. Conseqüentemente, um animal duas vezes mais alto que outro animal semelhante terá membros capazes para suportar quatro vezes mais carga que o animal menor.

♦ A massa suportada pelos membros de um ser vivo é proporcional a seu volume, ou seja, $\propto l^3$. Portanto, um animal três vezes mais alto que outro animal semelhante suportará uma massa 27 vezes maior que o animal menor.

Na natureza os *pequenos mamíferos* têm formas geométricas diferentes daquelas observadas nos mamíferos de *grande porte*; estes últimos têm ossos avantajados e se sustentam mantendo os membros eretos e pouco vulneráveis a esforço de arqueamento. A Figura 2.17 mostra o que acontece ao úmero no membro anterior de um cavalo, quando este osso experimenta uma força F devido à compressão de suas articulações e uma força P devido à massa do animal. A seção transversal do osso de área A e com diâmetro médio d experimenta os efeitos das forças F e P . O osso se encontra em equilíbrio, logo tomando o momento em relação ao ponto O :

$$F \cdot d = P \cdot b \Rightarrow F = Pb/d,$$

sendo $P \propto l^3$, $d \propto l$ e $b \propto l$, então $F \propto l^3$. Como $A \propto l^2$, a força F que produz o momento capaz de dobrar o osso *cresce* com taxa maior que a capacidade para resistência do osso. Em resumo, *as forças capazes de dobrar um osso, assim como as forças de carga que o comprimem, crescem com taxa maior que a capacidade de resistência deles.*

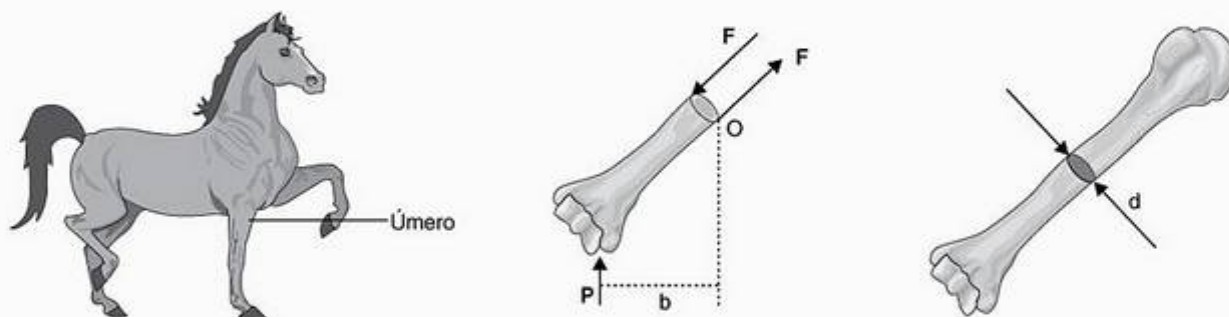


Figura 2.17 Análises das forças transmitidas ao úmero de um cavalo em repouso e seu efeito na seção transversal de diâmetro d . A força $F \propto l^3$ deve ser transmitida através de uma área A do osso, que é $\propto l^2$.

♦ Os músculos, assim como os ossos, também contribuem para a resistência dos seres vivos aos esforços externos e internos. Esse tecido contrátil, além de converter energia química em movimento, assegura a resistência às forças externas. Os músculos estriados dos vertebrados estão organizados em células alongadas ou pacotes de fibras.

A resistência R de um músculo é, com grande aproximação, diretamente proporcional ao número de fibras no músculo, ou seja, à área de sua seção transversal que, por sua vez, é proporcional à área de sua seção transversal característica (como se vê na Figura 2.18). $\therefore R \propto l^2$.

Quando comparamos a resistência muscular a esforço, ou compressão, entre seres vivos de formas semelhantes, a *grandeza mais significativa* é a que mede a razão entre resistência e massa do ser vivo, que denominaremos *resistência específica* R_e . Em função do comprimento característico l do ser vivo, teremos

$$R_e = \frac{\text{Resistência}}{\text{Massa}} \propto \frac{l^2}{l^3} = l^{-1}.$$

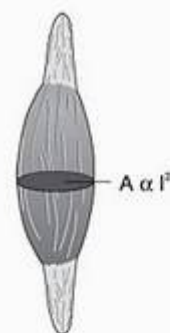


Figura 2.18 Músculo estriado de um vertebrado.

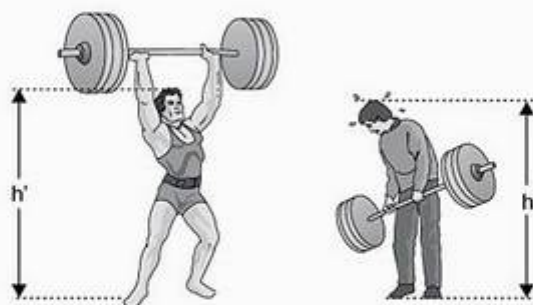


Figura 2.19 A resistência específica de dois organismos pode ser comparada a partir do fator de escala $L = h'/h$.

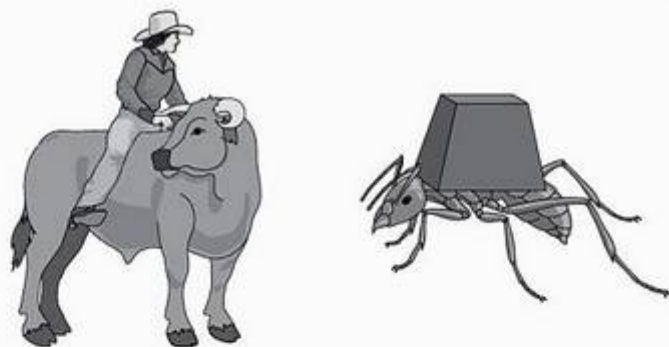


Figura 2.20 O esforço específico dos organismos vivos depende da capacidade muscular deles.

Ao comparar a *resistência específica* de dois seres vivos a partir do fator de escala, como mostra a Figura 2.19, devemos levar em conta que alguns seres vivos utilizam sua capacidade muscular de maneira mais eficiente. Para avaliarmos a *massa* que um ser vivo pode levantar em relação a seu tamanho, devemos analisar a razão entre essa massa e a massa do próprio organismo. Essa razão se denomina *esforço específico* E_e .

Em função do comprimento característico l do organismo teremos

$$E_e = \frac{\text{Massa máxima que levanta}}{\text{Massa do organismo}} \propto \frac{l^2}{l^3} = l^{-1}.$$

Observe que a força experimentada pelo ser vivo, devido à massa máxima que ele pode levantar, dependerá da seção transversal de seus músculos; ou seja, essa força será $\propto l^2$. De acordo com a Figura 2.20, para comparar os *esforços específicos* de dois seres vivos, pode-se usar fator de escala L ; mas, como veremos a seguir, as formas dos organismos também são variáveis a serem consideradas.

Forma e tamanho

Tanto os animais como as plantas crescem até atingir a altura adulta, de modo a suportar a massa corporal nas diversas fases do ciclo de vida. Desenvolver regras, utilizando o conceito de *escala* para explicar a *forma e o tamanho* desses organismos, enquanto suas *proporções se alteram*, tem como ponto de partida as regras de Kleiber⁽⁴⁾. Regras essas resultantes das observações da energia calorífica irradiada por animais com relação a sua massa, para animais com tamanho variando desde um rato até um novilho (boi novo). As conclusões obtidas são um caso em que, *excepcionalmente*, uma lei biológica é derivada de forma muito simples, de leis físicas; e mostram que na biologia, quando há dados suficientes e são usadas as ferramentas matemáticas adequadas, também é possível fazer generalizações quantitativas como talvez seja mais freqüente na física e na química. A Figura 2.21 mostra, em um formato *di-log*, as observações de Kleiber, sendo a inclinação dessa reta $\frac{3}{4}$ (ou 0,75).

À medida que o tamanho dos animais aumenta, desde o pequeno musaranho à enorme baleia-azul, a freqüência cardíaca diminui e a duração da vida aumenta. Um rato simplesmente usa essas pulsações mais rapidamente do que um novilho. Este e vários outros fenômenos variam com o tamanho do corpo, de acordo com um princípio matemático preciso: a *escala de um quarto de potência*. O modelo físico proposto para explicar o que causa certos tipos de escala de quarto de potência pode estender-se ao reino vegetal.

A lei de Kleiber diz que a taxa metabólica de um gato é cerca de 31,6 maior do que a de um camundongo. Mas essa relação, dependente da massa corporal, parece manter-se em todo o reino animal, desde o musaranho até a baleia-azul, e foi posteriormente generalizada aos organismos unicelulares e até mesmo às *mitocôndrias* presentes no interior das células.

A seguir, utilizando o conceito de *escala*, analisaremos a relação que deve existir entre a *altura* h , que as árvores podem atingir, e o *diâmetro* d , de seu tronco. E logo aplicaremos as conclusões ao caso dos animais. Vamos utilizar o modelo físico de um *cilindro* de altura h , suficientemente fino com diâmetro d , e com massa W atuando no centro de massa do cilindro. Aplicando-se os conceitos de esforço e deformação (a definição desses conceitos encontra-se no Capítulo 3, Seção 3.5) a um material de densidade ρ , mostrou-se⁽⁶⁾ que a altura crítica h_{cr} , para a coluna começar a curvar-se, tem a seguinte dependência em relação a seu diâmetro d :

$$\blacktriangleright \quad h_{cr} = 0,851[Y/\rho]^{1/3} d^{2/3}, \quad (2.7)$$

onde Y é um parâmetro relacionado com a elasticidade do material. Para chegarmos à equação (2.7), considerou-se que o cilindro é *suficientemente fino*, equivalendo a uma relação $\lambda = (h/d) > 25$. Essa razão se aplica à grande maioria das árvores. Se considerarmos que a massa W está distribuída ao longo de toda a extensão do cilindro, a equação (2.7) sofre uma pequena alteração, sendo, nesse caso,

$$\blacktriangleright \quad h_{cr} = 0,792[Y/\rho]^{1/3} d^{2/3}. \quad (2.8)$$

Guardadas as diferenças entre as equações (2.7) e (2.8) pode-se dizer com muita prudência, que, para a estabilidade elástica do cilindro considerado, a *altura crítica do cilindro é proporcional a seu diâmetro elevado à potência 2/3*. Ao aplicarmos essa relação a um *tronco (pedúnculo) de árvore (gramínea)*, a altura crítica do cilindro em (2.7) ou (2.8) será a própria altura da árvore (gramínea).

Vejamos o exemplo a seguir. Um *caule de gramínea* muda suas proporções geométricas quando cresce substancialmente. Seu crescimento é caracterizado pelo parâmetro $\lambda = h/d$ comentado na equação (2.7). Como seria de esperar, o valor de λ para uma família de árvores é um valor médio.

A Tabela 2.1 traz as alturas médias e os valores máximos de λ para algumas *gramíneas*. Para o pé de centeio considerou-se que $d \approx 0,3$ cm, de modo que $\lambda_{máx} \approx 500$ caracteriza seu crescimento. Para que o pinheiro tenha $\lambda_{máx} = 42$, seu diâmetro deverá ser $\approx 1,70$ m.

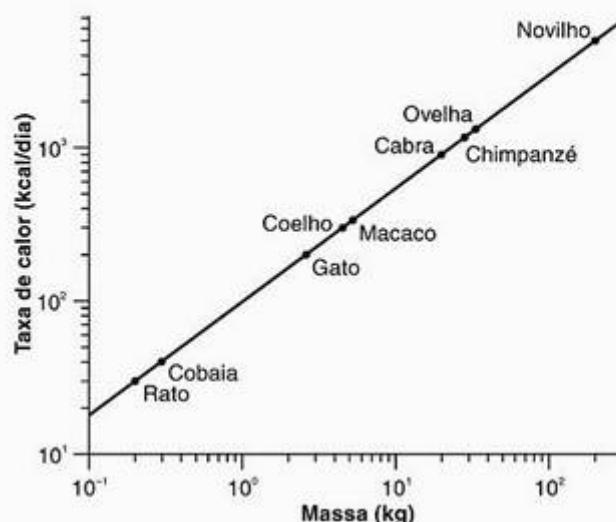


Figura 2.21 Calor produzido por um animal em função de sua massa. A reta tem inclinação $3/4$ — adaptação de Kleiber⁽⁵⁾.

Tabela 2.1 Valores máximos de λ para algumas gramíneas e árvores⁽⁷⁾

	h (m)	$\lambda_{máx}$
Centeio	1,5	500
Bambu	25 - 40	133
Palmeira	30 - 40	60
Pinheiro	70	42
Eucalipto	130	28

É pouco provável encontrar na natureza uma árvore com diâmetro dessa magnitude. Mas como encontraremos um valor de λ que corresponda aos diâmetros dessas árvores? A resposta exige que saibamos qual é a relação mais freqüente entre h e d para essas árvores. As equações (2.7) ou (2.8) terão a resposta?

Se admitirmos uma forma *cilíndrica* para o tronco, pelo conceito de *escala*, para uma estrutura de altura h , seu volume será $V \propto h^3$, sua massa será $M \propto h^3$, e a resistência interna do tronco $R \propto$ área A da seção transversal será $\propto h^2$. Assim, enquanto h aumenta, M aumenta com taxa maior do que a de R . Logo, a árvore chegará a uma certa altura acima da qual *colapsará* devido a seu próprio peso. Para evitar isso é necessário que a área da seção transversal *aumente com taxa maior* que a de h^2 . Se, por tentativa, considerarmos que $A \propto h^3$, como $A \propto d^2$, então $d^2 \propto h^3$ ou $d \propto h^{3/2}$, essa é a relação que está mais de acordo com os valores encontrados para h e d da maioria das árvores. Além disso, *coincide* com a equação (2.8) e satisfaz a *condição de suficientemente fino*, ou seja, $\lambda = (h/d) > 25$.

Na Tabela 2.2 mostramos valores típicos da altura h de diversas árvores, onde os valores dos diâmetros d são valores médios. Acrescentamos, também, uma coluna dos valores correspondentes de λ . Esses valores de λ estão de acordo com a regra $d^2 \propto h^3$ e principalmente com as estruturas biológicas dos sistemas vivos. Assim, podemos concluir que, *enquanto h aumenta, λ diminui drasticamente*.

No gráfico $d = f(h)$ (com escalas logarítmicas), apresentado na Figura 2.22, a inclinação da reta é $\cong 3/2$.

Tabela 2.2 Valores mais comuns de altura de árvores e os valores de λ correspondentes

h (m)	d (m)	λ
1,5	0,003	500
3,0	0,008	375
9,0	0,04	225
18	0,12	144
36	0,35	102
72	1,0	72
144	2,8	52
288	8,0	36

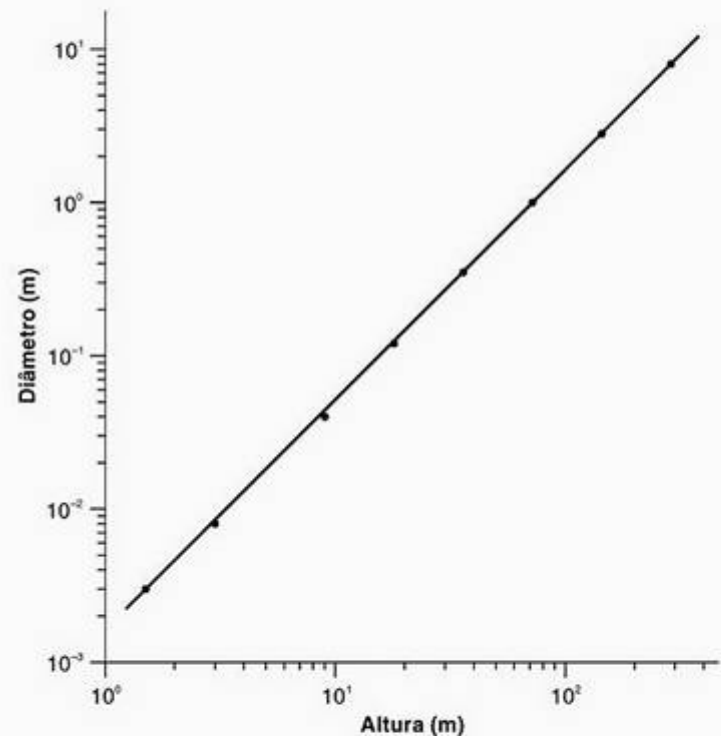


Figura 2.22 Gráfico do diâmetro médio de árvores em função de sua altura. Confirma-se a relação $d^2 \propto h^3$.

Agora considere o quadrúpede da Figura 2.23. Nesses animais, pode-se considerar que a parte onde se concentra a maior massa é a região destacada na figura.

Admitiremos que o comprimento l do quadrúpede é a medida entre seu ombro e o quadril, e d , a largura, mede a espessura média do corpo do animal. O tronco do animal é comparado a um cilindro de diâmetro d e comprimento l , sustentado em seus extremos. Rashevsky⁽⁸⁾ admite que o tronco é como uma viga carregada de modo uniforme e utiliza teoria linear para analisar a relação entre l e d , tendo em vista evitar o dobramento axial da viga. Assim, mostrou que

$$l \propto d^{2/3}. \quad (2.9)$$

Nesse modelo, ao considerar o tronco do animal como uma viga, é o próprio peso da viga que poderá fazê-la ceder ou vergar. Considere, também, que a área da seção transversal dos membros do animal é proporcional ao peso do tronco. A razão $\eta = l/d^{2/3}$ está limitada até um certo valor η_{cr} , de modo que, para todo $\eta > \eta_{cr}$, a viga colapsará. Na Tabela 2.3, apresentamos valores de η para cinco quadrúpedes. Esses valores dependem das unidades de l e de d . É claro que o tronco de um animal é bem mais complexo que uma simples viga, pois tem ossos, músculos e outros órgãos. Portanto, ao aplicarmos à equação (2.9) as dimensões de um quadrúpede, esta nos limitará de modo bastante aproximado os valores de l e d . A Tabela 2.3 mostra que o comprimento do arminho é três vezes sua largura. Se fosse $10 \times$ maior, $l = 1,20$ m, $d \approx 0,40$ m e $\eta \approx 2,2$; a equação (2.9) prevê que o animal seria tão compacto, que provavelmente não conseguiria se deslocar. Seu tronco ficaria encostado no chão.

Se W é a massa do animal, considerando que suas partes (cabeça, tronco e membros) se alteram na mesma proporção, conforme varia seu tamanho, a massa de qualquer dessas partes será uma fração de W . Pelo conceito de escala $W \propto ld^2$ e pela equação (2.9),

$$l \propto W^{1/4}; d \propto W^{3/8}. \quad (2.10)$$

Esta equação (2.10) tem sido utilizada em trabalhos^(10,11) que verificaram esta proporcionalidade entre l , d e W .

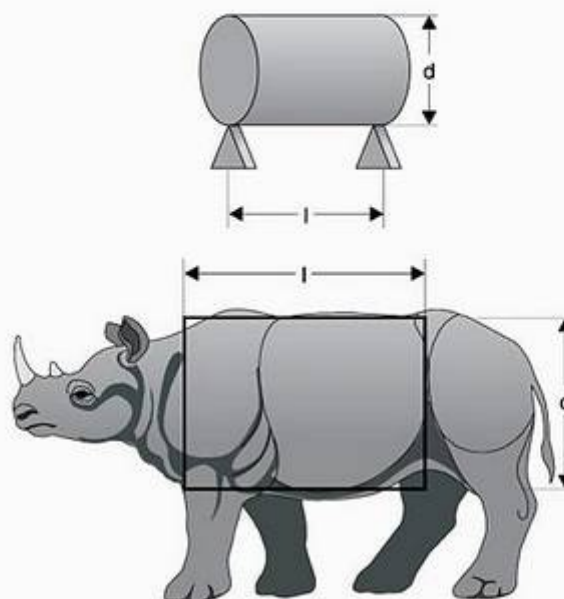


Figura 2.23 Formato típico de um animal quadrúpede. Seu comprimento é l , e sua altura é d .

Tabela 2.3 Valores de l , d e $\eta^{(9)}$ para cinco quadrúpedes.

	l (m)	d (m)	η
Arminho	0,12	0,04	1,03
Cachorro	0,35	0,12	1,44
Tigre da Índia	0,90	0,45	1,53
Lhama	1,22	0,73	1,51
Elefante da Índia	1,53	1,35	1,25



PROBLEMAS

1. A experiência feita com dois conjuntos A e B de pés de milho, para verificarmos o efeito do adubo, está resumida na tabela abaixo. Admita que as alturas são valores médios.

t (semana)	Altura das plantas (cm)	
	A	B
0	0	0
1	15	28
2	28	58
3	47	82
4	60	110

- a) Encontre uma relação entre altura e tempo.
b) Calcule a taxa de crescimento para os conjuntos A (plantas controle, cultivadas sem adubo) e B (cultivadas com adubo).

2. A taxa de mortalidade M em certas populações (número de mortes por unidade de população, por unidade de tempo) aumenta linearmente com a idade t , ou seja, $M = \alpha + \beta t$, onde α e β são constantes. Encontre a população P em função do tempo t , sendo P_0 a população inicial.
3. Na tabela abaixo temos a massa molecular M e o raio r de algumas moléculas.

Substâncias	M (Da)	$r \times 10^{-10}$ (m)
Glicose	180	3,9
Sacarose	390	4,8
Rafinose	580	5,6
Inulina	5 000	12,5
Ribonuclease	13 500	18,0
Lactoglobulina	35 000	27,0
Hemoglobina	68 000	31,0

- a) Faça um gráfico que permita chegar a uma relação linear entre M e r .
b) Determine o raio das moléculas para $M = 250.000$ (catalase), $M = 18$ (H_2O) e $M = 32$ (O_2).

4. Guttman⁽¹²⁾ fez medidas da dependência do tempo t em relação à temperatura T , necessários para que um pulso de corrente contínua excite o axônio de uma lula. As medidas a seguir foram obtidas nesta experiência.

T (°C):	5	10	15	20	25	30	35
t (ms):	4,1	3,4	1,9	1,4	0,7	0,6	0,4

- a) Faça um gráfico com estes dados.
b) Encontre uma relação empírica entre T e t .
5. Os dados a seguir são valores de concentração C de etanol no sangue, em função do tempo t , após a ingestão do etanol (Lynn, et al).⁽¹³⁾

C (mg/dl):	134	120	106	93	79	65	50
t (min):	90	120	150	180	210	240	270

- a) Faça um gráfico a partir desses dados.
 - b) Discuta a taxa de metabolização do álcool.
6. Uma fonte de ouro radioativo (^{198}Au) tem inicialmente 1×10^8 átomos. Passados 2,7 dias, a fonte terá 5×10^7 átomos radioativos; após 5,4 dias, ela terá 25×10^6 átomos; após 8,1 dias, terá $12,5 \times 10^6$ átomos, e assim por diante.
- a) Faça um gráfico desses dados.
 - b) Determine o tempo de *meia-vida* desse elemento.
7. Uma dose D de uma droga, depois de ser aplicada em uma pessoa, faz aumentar a sua concentração plasmática de 0 para C_0 . Depois, a concentração C começa a ter um *decaimento exponencial*.
- a) Em um certo instante τ , que dose da droga deve ser aplicada na pessoa, para elevar sua concentração plasmática novamente a C_0 ?
 - b) O que acontecerá se a dose original for administrada sempre em intervalos τ ?
8. Suponha que células cancerígenas no interior do corpo se reproduzem a uma razão r , tal que o número N de células tem um *crescimento exponencial*, em relação ao tempo t . Em determinado momento, um agente quimioterápico é aplicado para destruir uma fração f das células existentes.
- a) Faça um gráfico de N em função de t , para várias administrações de droga em intervalos de tempo T .
 - b) Que casos diferentes podem ser considerados para relacionar T e r ?
9. Uma célula esférica de raio R divide-se em duas células filhas iguais, cada uma com raio r .
- a) Encontre o fator de escala das células.
 - b) Determine a razão entre a área superficial da célula filha e da célula mãe.
 - c) Qual é a razão entre o volume da célula filha e da célula mãe?
10. Compare a força muscular de pessoas com formas semelhantes, tendo 1,5 m e 1,8 m de altura.
11. Uma mulher tem 1,6 m de altura e 55 kg de massa. Tomando esses dados como referência, qual deverá ser a massa de outra mulher com forma semelhante, tendo 1,7 m de altura?
12. Compare a força relativa de uma formiga gigante (tamanho de um humano adulto) com a de uma formiga normal. Calcule a massa que a formiga gigante conseguiria carregar.
13. Em mamíferos, o volume do coração vezes seu ritmo cardíaco (número de batidas por segundo) é proporcional a sua *taxa metabólica*. Se o fator de escala entre um homem e um determinado macaco for L , qual será a relação entre seus ritmos cardíacos?
14. A energia usada por um mamífero marinho durante o mergulho é igual a sua *taxa metabólica* vezes o tempo que dura a imersão. Se o fator de escala entre dois mamíferos semelhantes for L , qual será a relação entre os tempos em que ambos os mamíferos podem ficar dentro da água?

15. Um homem normal pode levantar objetos com massa de até metade de sua própria massa. Já um gafanhoto pode levantar objetos com massa até 15 vezes maior que a sua. Explique, usando o conceito de *escala*, se isso significa que o gafanhoto é mais forte que o homem.
16. Compare o número de passos por unidade de tempo e o tempo gasto para dar um passo entre animais de formas semelhantes, porém de tamanhos diferentes. Aplique seu raciocínio ao caso de dois homens com 1,8 m e 1,5 m de altura.
17. Qual é a razão entre a altura máxima a que uma pessoa de 1,3 m pode elevar uma massa e a maior massa que uma pessoa de 1,65 m pode levantar? Admita formas e estruturas semelhantes para estas pessoas.
18. Discuta, usando o conceito de *escala*, se é possível que um rinoceronte adulto seja do tamanho de um cachorro adulto.
19. Qual é a relação entre a velocidade de caminhada de duas pessoas com alturas h e h' , sendo $h' > h$.
20. Discuta, utilizando o conceito de *escala*, se é biologicamente possível haver um rato:
 - a) com dimensão linear 10 vezes maior que a de um rato normal; e
 - b) com dimensão linear 10 vezes menor que a de um rato normal.
21. Há árvores com mais de 100 m de altura, com parâmetro λ tendo um valor máximo de 15. Qual será o valor máximo dos diâmetros dessas árvores?
22. Animais que vivem no deserto andam grandes distâncias sem beber água. Usando o conceito de *escala*, encontre uma relação entre a distância máxima que um animal pode caminhar no deserto e seu tamanho.

Referências Bibliográficas

1. MAYNARD, SMITH J. *Mathematical ideas in Biology*. Cambridge University Press, 1980.
2. BATSCHELET, E. *Introduction to mathematics for life scientists*. New York: Springer-Verlag, 1973.
3. STAHL, W.R. Similarity and dimensional methods in biology. *Science*. v.137, n. 3525, p. 205, 1962.
4. KLEIBER, M. *The fire of life: An introduction to animal energetic*. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1961.
5. Idem, ibidem.
6. McMAHON, T. Size and shape in biology. *Science*. v. 179, n. 4079, p. 1201-1204, 1973.
7. RASHEVSKY, N. *Mathematical biophysics: Physico-Mathematical Foundations of biology*. 3rd edition. New York: Dover, 1960. v. I and v. II.
8. Idem, ibidem.
9. BATSCHELET, Op. cit
10. BRODY, S. *Bioenergetics and Growth*. Reinhold, New York, 1945.
11. STAHL, W.R.; GUMMERSON, J.Y. Systematic allometry in 5 species of adult primates (systematic allometry in primates). *Growth*. v. 31, n. 1, p. 21, 1967.
12. GUTTMAN, R. Temperature characteristics of excitation in space-clamped squid axons. *J. Gen. Physiol.* v. 49, n. 5, p. 1007, 1966.
13. LYNN, J.; BENNION, M.D.; TING-KAI, M.D.L. Alcohol metabolism in American Indians and whites. *New England J. Med.* v. 294, n. 1, p. 9-13, 1976.

Capítulo 3

Movimentos, Biomecânica e Elasticidade



3.1 INTRODUÇÃO

Para realizar suas tarefas cotidianas, freqüentemente os seres vivos precisam se *movimentar*. Muitas vezes, esses movimentos são importantes para a própria sobrevivência – seja para se alimentar ou se defender. Aplicando-se as leis físicas aos corpos em movimento, estes *movimentos* geralmente são bastante simples de ser analisados. Na física, os movimentos mais simples são os unidimensionais, sendo um pouco mais complexos os compostos ou bidimensionais. Qualquer análise de um movimento exige determinações das variáveis *deslocamento*, *velocidade* e *aceleração*. Essas variáveis são *quantidades vetoriais*; portanto, representadas por um *vetor*. A seguir faremos um resumo das principais propriedades dessas quantidades⁽¹⁾ (veja a Figura 3.1 e a Figura 3.2).

Para representar uma quantidade vetorial, é necessário conhecer sua magnitude, ou intensidade, e sua direção (normalmente é o ângulo em relação à direção horizontal), sendo sua representação um *vetor*. Por exemplo, na Figura 3.1, o vetor **V** tem magnitude de 3 unidades e inclinação de 30° em relação à direção horizontal.

Para fazermos operações usando *quantidades vetoriais*, é conveniente que os vetores sejam representados por um sistema de eixos cartesianos.

Por exemplo, na Figura 3.2, está representado o vetor **V**, de magnitude *V* e direção θ .

Os componentes desse vetor nas direções *x* e *y* são

$$V_x = V \cos \theta ; V_y = V \sin \theta,$$

e sua inclinação é

$$\theta = \text{tg}^{-1} (V_y / V_x).$$

Logo, o vetor **V** terá a seguinte representação

$$\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j},$$

onde **i** e **j** são vetores unitários (magnitude um) nas direções *x* e *y*, respectivamente.

Note que $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$.

♦ Se temos um conjunto de *n* vetores: **A**₁, **A**₂, ..., **A**_{*n*}, cada um com os componentes, *A*_{*ix*} e *A*_{*iy*}, (*i* = 1, 2, ..., *n*), então a soma desses vetores será o vetor

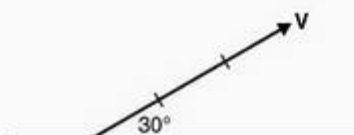


Figura 3.1 Vetor **V** de magnitude 3 e direção de 30°.

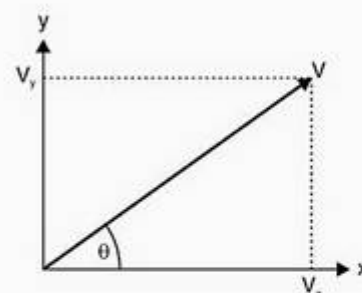


Figura 3.2 Vetor de magnitude *V* e direção θ com os componentes *V*_{*x*} e *V*_{*y*}.

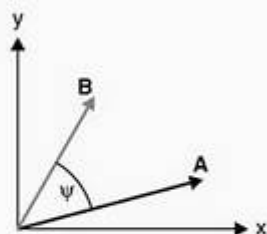


Figura 3.3 Vetores **A** e **B** formando um ângulo ψ .

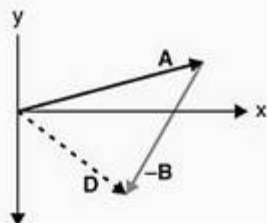


Figura 3.4 Vetor diferença $D = A + (-B) = A - B$.

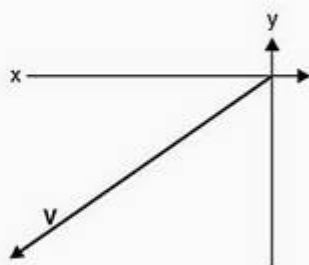


Figura 3.5 Vetor produto vetorial $V = AB \sin \psi \mathbf{i} \times \mathbf{j}$.

$$\mathbf{S} = S_x \mathbf{i} + S_y \mathbf{j} = \sum_i \mathbf{A}_i = (\sum_i A_{ix}) \mathbf{i} + (\sum_i A_{iy}) \mathbf{j} \quad (3.1)$$

de magnitude $S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$ e inclinação $\theta = \tan^{-1}(S_y/S_x)$.

♦ Se considerarmos os vetores $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j}$, então

• a *diferença* entre esses vetores será

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x) \mathbf{i} + (A_y - B_y) \mathbf{j};$$

• o *produto escalar* desses vetores será

$$E = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y = AB \cos \psi;$$

• o *produto vetorial* desses vetores será

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{i} \times \mathbf{j} = AB \sin \psi \mathbf{i} \times \mathbf{j}.$$

Na Figura 3.3 estão representados os vetores **A** e **B** e nas figuras 3.4 e 3.5, os vetores **D** e **V**, respectivamente.

Note que o produto escalar de vetores é uma quantidade *escalar*, enquanto o produto vetorial é um *vetor*, de magnitude $AB \sin \psi$, orientado na direção perpendicular ao plano formado pelos vetores **A** e **B**.



3.2 MOVIMENTO NO PLANO

Movimento no plano é o movimento que um corpo realiza ao longo de uma *trajetória curva* sobre um plano fixo. Quando conhecemos

♦ o *movimento*, então podemos encontrar a velocidade, a aceleração e a força aplicada ao corpo que está se movimentando;

♦ a *força aplicada ao corpo*, então podemos conhecer a equação do movimento.

Deslocamento e velocidade média

A Figura 3.6 apresenta uma trajetória curva em um plano xy. Quando um corpo se *desloca* do ponto P até Q, ao longo de sua trajetória, esse *deslocamento* é representado pelo vetor $\Delta \mathbf{r}$. Se Δt é o tempo que o corpo gasta para ir de P até Q, então definimos o vetor *velocidade média* como

$$\mathbf{V}_m = \Delta \mathbf{r} / \Delta t, \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{V}_m$ tem a mesma direção de $\Delta \mathbf{r}$, e $\mathbf{V}_m$ é o mesmo para qualquer trajetória que leve o corpo de P até Q no tempo Δt .

Velocidade instantânea

Velocidade instantânea é definida em módulo, direção e sentido, como o limite para o qual tende $\mathbf{V}_m$, quando Q se aproxima cada vez mais de P. Ou seja,

$$\mathbf{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \mathbf{r} / \Delta t) = d\mathbf{r} / dt. \quad (3.3)$$

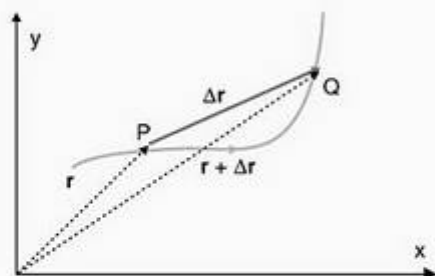


Figura 3.6 Trajetória de curva de um corpo em movimento. P e Q são pontos dessa trajetória, com vetores na posição $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$, respectivamente.

À medida que $Q \rightarrow P$, a direção de $\Delta \mathbf{r}$ se aproxima da direção da tangente da trajetória em P. Portanto, a velocidade instantânea $\mathbf{V}$ em qualquer ponto da trajetória é tangente à trajetória nesse ponto. Na Figura 3.7 mostramos as velocidades instantâneas $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}'$ nos pontos P e Q, respectivamente.

Aceleração

De acordo com a Figura 3.7, a velocidade do móvel, ao ir de P até Q, experimentou uma variação $\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V}' - \mathbf{V}$. Como o tempo gasto é Δt , sua aceleração média será

$$\mathbf{a}_m = \Delta \mathbf{V} / \Delta t, \quad (3.4)$$

quando Q se aproxima cada vez mais de P. Ou seja, quando $\Delta t \rightarrow 0$, a aceleração em P é a *aceleração instantânea*, isto é,

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \mathbf{V} / \Delta t) = d\mathbf{V}/dt. \quad (3.5)$$

A Figura 3.8 mostra os vetores velocidade e aceleração instantâneas no ponto P da trajetória.

Em geral, de acordo com a Figura 3.9, $\mathbf{a}$ pode ser decomposto em componentes nas direções *normal* ($a_\perp$) e *tangencial* ($a_\parallel$) à trajetória. O componente $a_\parallel$ surge da variação no *módulo* de $\mathbf{V}$, enquanto $a_\perp$ surge da variação na *direção* de $\mathbf{V}$.

Todo movimento realizado com $\mathbf{a}$ constante é denominado *movimento uniformemente acelerado* (MUA). As equações (3.5) e (3.3), depois de integradas, nos darão a velocidade e a posição em qualquer instante t :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \quad (3.6)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2, \quad (3.7)$$

onde $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{r}_0$ são, respectivamente, a velocidade e a posição no instante $t = 0$. Sendo $\mathbf{a} = \text{constante}$, tanto a direção como o módulo do vetor aceleração não mudam. Se o MUA gerar uma trajetória na direção horizontal x , ou seja, $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$ e $\mathbf{a} = a_0\mathbf{i}$, então as equações (3.6) e (3.7) ficam simplificadas para a forma

$$v = v_0 + a_0 t \quad (3.8)$$

e

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2, \quad (3.9)$$

onde v_0 e x_0 são, respectivamente, a velocidade e a posição no instante $t = 0$. Os termos nas equações (3.8) e (3.9) são *escalares*, pois o movimento, por ser unidimensional, não exige variáveis vetoriais. Nas Figuras 3.10 e 3.11 estão representados, respectivamente, os gráficos das equações 3.8 e 3.9.

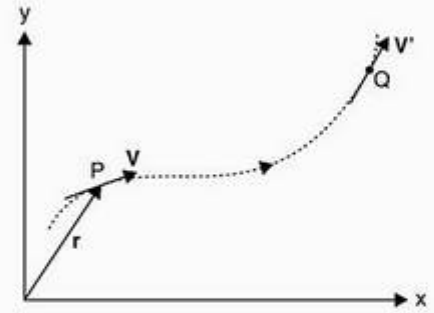


Figura 3.7 Os vetores velocidade instantânea $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}'$ são respectivamente tangentes à trajetória nos pontos P e Q.

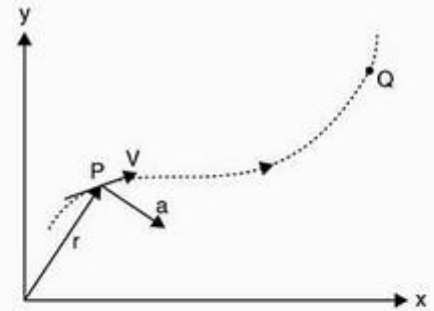


Figura 3.8 O vetor aceleração instantânea $\mathbf{a}$ no ponto P da trajetória do movimento.

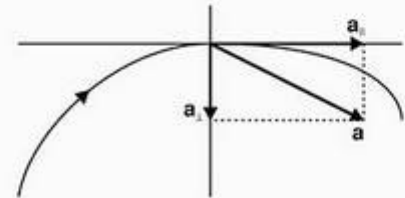


Figura 3.9 O vetor aceleração instantânea $\mathbf{a}$ tem componentes normal ($a_\perp$) e tangencial ($a_\parallel$) à trajetória.

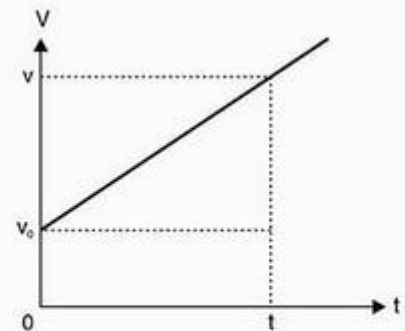


Figura 3.10 Gráfico $V = f(t)$ para um MUA; a inclinação da reta é o valor a_0 da aceleração.

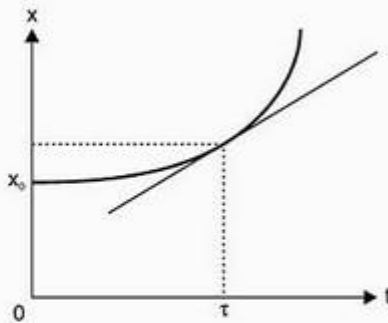


Figura 3.11 Gráfico $x = f(t)$ para um MUA; a inclinação da tangente ao gráfico, no instante τ , é a velocidade neste instante.

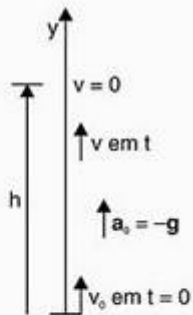


Figura 3.12 MUA com aceleração negativa, para uma trajetória vertical no sentido de baixo para cima.

Na Figura 3.10 encontramos $a_0 = (v - v_0)/t$, ou $t = (v - v_0)/a_0$. Substituindo este valor do tempo em (3.9), encontramos a seguinte relação para a velocidade:

$$\triangleright v^2 = v_0^2 + 2a_0(x - x_0). \quad (3.10)$$

O movimento de *queda livre* gera uma trajetória vertical (direção y); nesse tipo de movimento os corpos experimentam uma aceleração constante $a_0 = g = 9,8 \text{ m/s}^2$, na direção vertical e no sentido de cima para baixo. Logo trata-se de um MUA que, de acordo a Figura 3.12, terá as seguintes equações quando o movimento for de baixo para cima:

$$\triangleright v = v_0 - gt \quad (3.11)$$

$$\triangleright y = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2. \quad (3.12)$$

Como o corpo está sofrendo uma desaceleração constante, em determinado momento sua velocidade poderá ser nula ($v = 0$). Quando isto acontecer, ele terá alcançado uma altura h , que dependerá da velocidade inicial v_0 :

$$\triangleright v_0^2 = 2gh. \quad (3.13)$$

Primeira aplicação: velocidade da caminhada

Considere uma pessoa cuja *perna* tem comprimento l , e T é o tempo necessário para que o mesmo pé toque o chão em duas passadas consecutivas. Logo $T/2$ será o tempo necessário para dar só um passo. Segundo o conceito de *escala*, podemos dizer que, ao dar um passo, o humano avança aproximadamente l . Se N for o número de passos por unidade de tempo, então $N = 1/(T/2) \propto 1/T$. Como a caminhada pode ser considerada um movimento periódico de amplitude l e período T , assim como está representado na Figura 3.13, então $T \propto \sqrt{l}$. A *velocidade de caminhada* v_c é N vezes a distância correspondente a um passo, logo,

$$v_c = N \cdot l \propto l / \sqrt{l} \propto \sqrt{l}.$$

Discussões baseadas no custo energético da forma *bipedal*, usada pelos seres humanos para caminhar, argumentam que assim é possível cobrir grandes distâncias de maneira econômica^(2,3). Porém, alguns biólogos sustentam que, devido a essa forma de caminhar, a locomoção dos seres humanos é mais *ineficiente* se for comparada com a de outros animais.

O conceito de *andadeiro* tem sido aplicado principalmente à locomoção terrestre sobre pernas ou patas, porém é usual aplicar-se a outras formas de locomoção^(4,5).

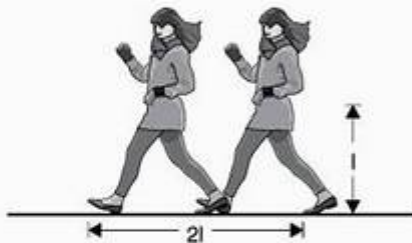


Figura 3.13 Jovens caminhando: cada passo é $\approx l$, onde l é o comprimento da perna.

Segunda aplicação: velocidade de corrida dos seres humanos

Inicialmente devemos saber se a corrida é de *longa, média ou curta distância*, pois, em cada caso, a velocidade média $\bar{v}$ alcançada pelos atletas é diferente. Durante um tempo limitado, geralmente o atleta mantém uma velocidade igual a sua velocidade máxima. Se calcularmos as velocidades médias $\bar{v}$ correspondentes às provas típicas das *competições de atletismo*, notaremos que, no caso dos homens, $\bar{v}$ *aumenta* em corridas de até $d \approx 200$ m, enquanto em corridas para $d > 200$ m $\bar{v}$ *decrece*. A Figura 3.14 mostra esse comportamento de $\bar{v}$ em função da distância d . Os valores de $\bar{v}$ foram calculados com base nos últimos tempos *recordes mundiais* conseguidos nas respectivas provas de atletismo.

Na Figura 3.15 mostramos como varia a velocidade v de um atleta em função do tempo t para uma prova de 200 m. Após $t \approx 2$ s, o atleta atinge uma velocidade próxima de 10,5 m/s, sua *velocidade máxima*. Para essa distância, a velocidade média é *menor* que a velocidade máxima e, se o período de aceleração é aproximadamente *o mesmo* para um corredor de distâncias curtas, então, como mostra a Figura 3.14, a velocidade média para $d = 200$ m é *maior* que para $d = 100$ m.

Para *médias e longas distâncias*, a velocidade média do atleta começa a *decrecer* à medida que a distância *aumenta*, pois o suprimento de O_2 começa a diminuir, tornando-se insuficiente para a demanda. O atleta inicia seu esgotamento de O_2 entre 200 m e 400 m.

Observações feitas em primatas^(6,7), correndo com dois ou quatro membros, mostram que o consumo de energia é o mesmo em ambas as situações. Como o custo energético para transportar o corpo é o *mesmo*,

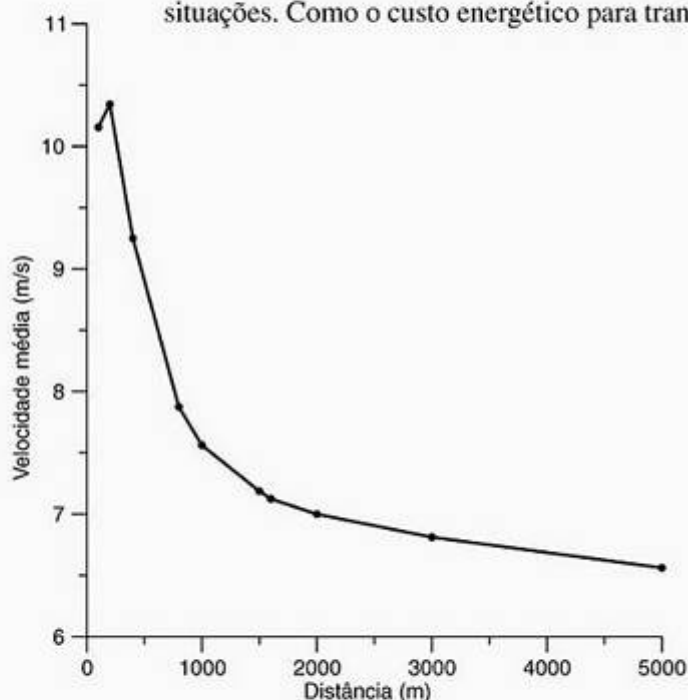


Figura 3.14 Velocidades médias observadas nas corridas de curta, média e longa distância. Os tempos correspondem aos recordes mundiais para cada distância em agosto de 2002.

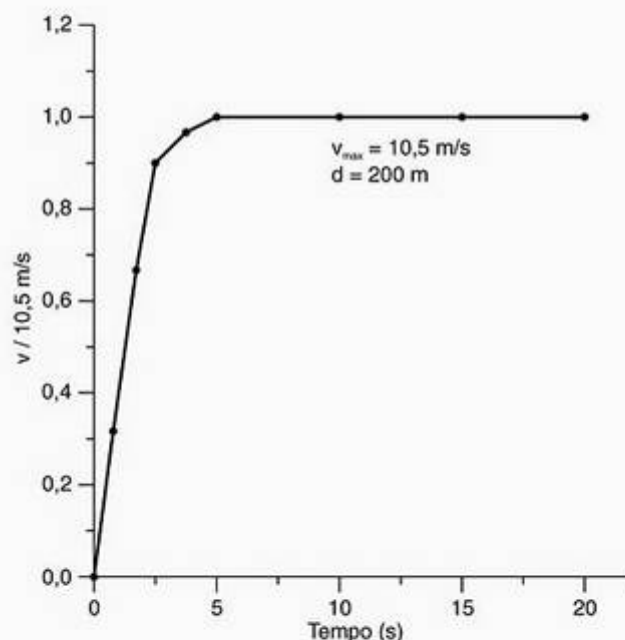


Figura 3.15 Variação do valor v normalizado em função de t para uma corrida de curta distância (200 m).

seja usando quatro ou dois membros, é preciso outro argumento para explicar a vantagem ou a desvantagem que o ser humano teria por se locomover com dois membros^(8,9). Logo adiante analisaremos a transformação da energia nas diferentes formas de locomoção de animais e seres humanos.

Exemplo: Um objeto com velocidade constante $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ m/s iniciou seu movimento da origem de um plano xy. Qual será sua posição 10 s depois de ter iniciado o movimento?

Resolução: A velocidade tem componentes constantes: $v_x = 2$ m/s e $v_y = 4$ m/s. Logo após 10 s, o objeto terá avançado nas direções

$$\text{horizontal: } x = v_x t = 20 \text{ m}$$

$$\text{e vertical: } y = v_y t = 40 \text{ m}$$

$\therefore$ a posição do objeto será

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = 20\mathbf{i} + 40\mathbf{j} \text{ m.}$$

Exemplo: Admita que a posição de um objeto movimentando-se na direção x seja dada por $x = 5 + 2t + 10t^2$, sendo x expresso em metros e t, em segundos. Em relação ao objeto, qual será sua

- Posição inicial?
- Velocidade em qualquer instante?
- Aceleração?

Resolução:

- Quando $t = 0$, a posição do objeto será $x_0 = 5$ m.
- Para determinar a velocidade em qualquer instante, tomamos a derivada da posição em relação ao tempo, ou seja,

$$v = \frac{dx}{dt} = 2 + 20t \text{ m/s.}$$

- A aceleração será a derivada da velocidade em relação ao tempo, ou seja,

$$a = \frac{dv}{dt} = 20 \text{ m/s}^2.$$

Logo, o objeto tem um MUA.

Exemplo: Um gato precisa se deslocar 100 m para alcançar um ratinho morto. Quando o gato começa a correr, com aceleração uniforme de 1 m/s^2 , uma coruja, que está 20 m acima do gato, tem uma velocidade de 5 m/s. Se a coruja seguir uma trajetória retilínea, qual deverá ser sua aceleração para alcançar o ratinho juntamente com o gato?

Resolução: O gato tem uma velocidade inicial nula, e um MUA, com $a = 1 \text{ m/s}^2$. Logo, se t for o tempo necessário para o gato chegar até o ratinho, então

$$100 \text{ m} = \frac{1}{2} (1 \text{ m/s}^2) t^2 \Rightarrow t = 14,14 \text{ s.}$$

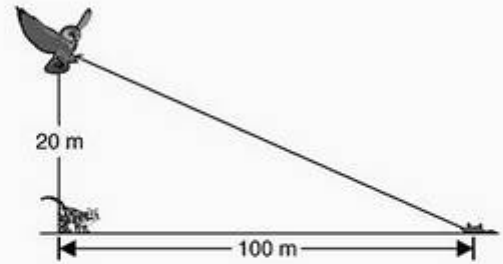
A coruja, para alcançar o ratinho nesse mesmo tempo t , precisa percorrer uma distância

$$d = \sqrt{20^2 + 100^2} = 101,98 \text{ m.}$$

Como a coruja tem MUA, velocidade inicial de 5 m/s e aceleração desconhecida, então

$$101,98 \text{ m} = (5 \text{ m/s})(14,14 \text{ s}) + \frac{1}{2} a (14,14 \text{ s})^2 \Rightarrow a = 0,31 \text{ m/s}^2.$$

Esta deve ser sua aceleração para alcançar o ratinho juntamente com o gato.



Exemplo: Quanto tempo leva um objeto para cair de uma altura de 40 m , partindo do repouso? Que distância esse mesmo objeto percorreria no dobro do tempo?

Resolução: O objeto tem um movimento de queda livre, com velocidade inicial nula,

$$\therefore 40 \text{ m} = \frac{1}{2} (9,8 \text{ m/s}^2) t^2 \Rightarrow t = 2,86 \text{ s}$$

será o tempo necessário para cair 40 m . Para um tempo $2t = 5,72 \text{ s}$, o objeto terá uma queda de

$$H = \frac{1}{2} (9,8 \text{ m/s}^2) (5,72 \text{ s})^2 = 160 \text{ m.}$$

3.3 MOVIMENTO COMPOSTO OU PARABÓLICO

Movimento composto é o movimento resultante da *composição* de um movimento com *velocidade uniforme* na direção horizontal, e um MUA com aceleração uniforme $a = g$ na direção vertical. A trajetória resultante é *parabólica*, como mostra a Figura 3.16. As equações desse movimento são as seguintes

direção x : $a_x = 0$

$$v_x = v_{0x}$$

$$x = x_0 + v_{0x} t,$$

direção y : $a_y = -g$

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} gt^2.$$

A Figura 3.16 mostra a posição (x_0, y_0) , a velocidade inicial (v_{0x}, v_{0y}) e a velocidade em qualquer instante t .

Note que, no movimento de subida e descida, as velocidades para uma mesma altura têm o mesmo módulo.

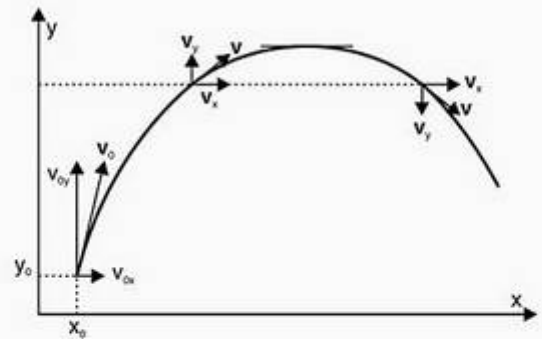


Figura. 3.16 Trajetória parabólica de um movimento composto, com velocidade inicial v_0 e posição inicial (x_0, y_0) .

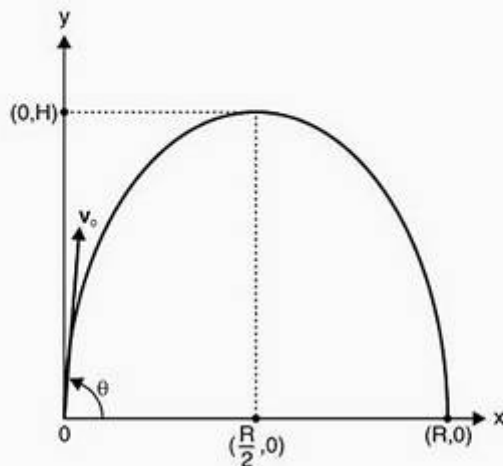


Figura 3.17 Movimento parabólico com velocidade inicial v_0 . A trajetória alcança a altura e o afastamento máximos H e R , respectivamente.

Considere $x_0 = y_0 = 0$, conforme a Figura 3.17. Se a velocidade inicial v_0 tem inclinação θ , então

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

A altura máxima dessa trajetória tem coordenadas $x = R/2$ e $y = H$. Nessa posição, $v_y = 0$, logo,

$$v_{0y} = g\tau,$$

ou seja,

$$\tau = v_0 \sin \theta / g \quad (3.14)$$

será o tempo empregado para alcançar a *altura máxima* H , portanto,

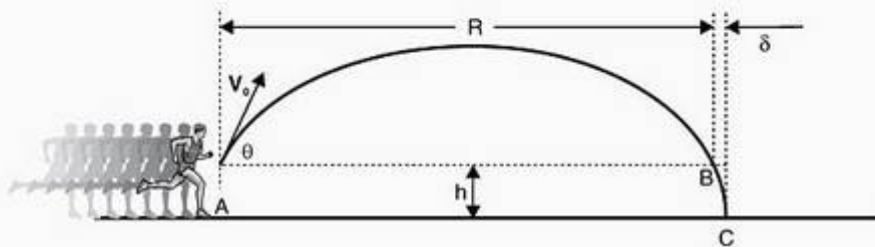
$$H = (v_0 \sin \theta)\tau - \frac{1}{2} g\tau^2 = v_0^2 \sin^2 \theta / 2g. \quad (3.15)$$

No instante 2τ a trajetória atinge seu *afastamento máximo* R , portanto,

$$R = 2\tau v_{0x} = v_0^2 \sin 2\theta / g. \quad (3.16)$$

Primeira aplicação

Um atleta vai realizar um *salto em distância*. Quando iniciar o salto, ele terá uma velocidade de 10,5 m/s. Se o seu centro de massa estiver a 60 cm do chão, a que distância o atleta saltará? Não considere o efeito da resistência do ar.



Discussão: No ponto A da trajetória AC do *centro de massa* do atleta, a velocidade inicial v_0 terá os componentes

$$v_{0x} = 10,5 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad v_{0y} = 3,43 \text{ m/s},$$

pois, ao iniciar o salto, ele está com uma velocidade $v = 10,5$ m/s na direção horizontal. Como, ao iniciar o salto, o *centro de massa* está a 0,6 m do chão, o componente vertical de v_0 será

$$v_{0y} = \sqrt{2(9,8 \text{ m/s}^2)(0,6 \text{ m})} = 3,43 \text{ m/s}.$$

A inclinação e a magnitude de v_0 serão, respectivamente,

$$\theta = \text{tg}^{-1}(v_{0y}/v_{0x}) = \text{tg}^{-1}(3,43/10,5) = 18,09^\circ$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 11,05 \text{ m/s}.$$

No ponto B da trajetória, a velocidade do atleta também será 11,05 m/s. Logo, usando a equação (3.16), poderemos calcular o afastamento máximo

$$R = v_0^2 \sin 2\theta / g = (11,05 \text{ m/s})^2 \sin 36,18^\circ / (9,8 \text{ m/s}^2) = 7,35 \text{ m}.$$

O ponto C da trajetória é a posição do *centro de massa* do atleta ao bater no chão. Se τ é o tempo necessário para fazer a trajetória BC, então

$$0,6 \text{ m} = v_{0y}\tau + \frac{1}{2} g\tau^2 = (3,43 \text{ m/s})\tau + \frac{1}{2} (9,8 \text{ m/s}^2)\tau^2 \Rightarrow \tau = 0,145 \text{ s}.$$

Logo, o afastamento horizontal δ será

$$\delta = v_{0x}\tau = (10,5 \text{ m/s}) 0,145 \text{ s} = 1,52 \text{ m}.$$

Assim, o salto em distância do atleta será $R + \delta = 8,87 \text{ m}$. Esse resultado não levou em consideração o efeito da resistência do ar. *Normalmente* os atletas que praticam essa modalidade de esporte não são corredores de curta distância (com a honrosa exceção do norte-americano C. Lewis). Assim, considerar $v_{0x} = 10,5 \text{ m/s}$ está um pouco além da velocidade inicial que esses atletas podem alcançar. Os recordes mundiais (até julho de 2002) de 8,95 m para homens e 7,52 m para mulheres mostram que os atletas dessa modalidade, além de aumentarem a velocidade com que iniciam o salto, tentam aproveitar favoravelmente o efeito da resistência do ar durante o salto.

Segunda aplicação

Observações do salto de uma pulga⁽¹⁰⁾ mostraram que a trajetória do salto é parabólica e que a velocidade inicial v_0 é próxima de 1,3 m/s, com uma inclinação θ de aproximadamente 87° . Com esses dados, mais a Figura 3.18, discuta qual deve ser a aceleração produzida pelas patas da pulga para que ela realize este salto.

Discussão: Considerando $v_0 = 1,3 \text{ m/s}$ e $\theta = 87^\circ$, então, de acordo com as equações (3.15) e (3.16), a *altura e o afastamento* máximos do salto serão, respectivamente,

$$H = (1,3 \text{ m/s})^2 (\sin^2 87^\circ) / 2(9,8 \text{ m/s}^2) \approx 9 \text{ cm}$$

$$R = (1,3 \text{ m/s})^2 (\sin 174^\circ) / (9,8 \text{ m/s}^2) \approx 2 \text{ cm}.$$

Da Figura 3.18 extraímos que a pulga, para dar este salto, encolheu suas patas durante um tempo médio de aproximadamente 1,25 ms. Logo, usando (3.8), encontramos que a aceleração, devido à ação dos músculos das patas, será

$$a = v_0/t = (1,3 \text{ m/s}) / (1,25 \times 10^{-3} \text{ s}) \approx 100 \text{ g}.$$

Ou seja, aproximadamente cem vezes maior que a aceleração da gravidade terrestre.

No caso do salto de um gafanhoto^(11,12) observou-se que o afastamento máximo de seu salto é cerca de 80 cm, e a inclinação da trajetória em seu ponto inicial é $\approx 55^\circ$. Logo, usando (3.16), podemos calcular a velocidade inicial do salto

$$v_0^2 = gR / \sin 2\theta = (9,8 \text{ m/s}^2)(0,8 \text{ m}) / \sin 110^\circ.$$

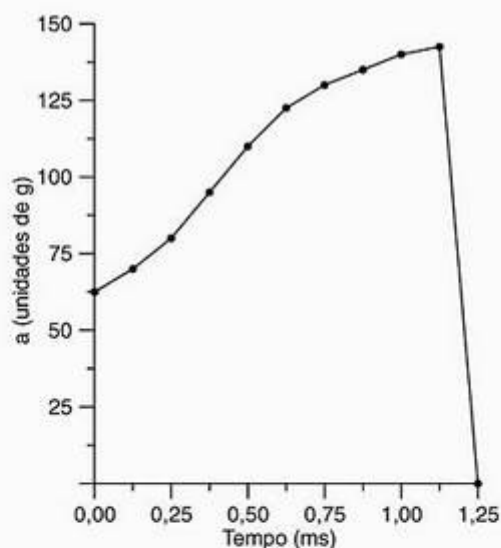
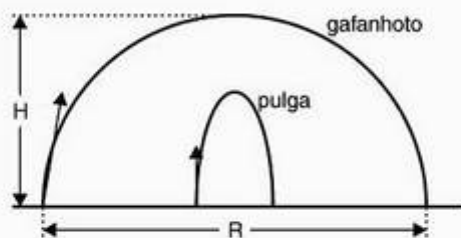


Figura 3.18 Variação da aceleração durante os primeiros ms do salto da pulga. (Adaptado de Rothschild et al, Op. Cit.)



Logo, $v_0 \approx 2,89 \text{ m/s}$. Com essa velocidade, calculamos que a altura máxima H que o salto do gafanhoto alcança é $\approx 30 \text{ cm}$. Como $\approx 30 \text{ ms}$ é o tempo médio durante o qual os músculos de suas patas se encolheram para dar o salto, a aceleração devido à ação desses músculos será

$$a = v_0/t = (2,89 \text{ m/s})/(30 \times 10^{-3} \text{ s}) \approx 10 \text{ g},$$

ou seja, aproximadamente 10 vezes maior que a aceleração da gravidade terrestre.

O movimento composto de um sapo foi analisado por Marsh⁽¹³⁾, através de uma visualização obtida com filme de alta velocidade.



3.4 MOVIMENTO RELATIVO

Muitas vezes, um objeto que está em movimento encontra-se em um meio que também está se movimentando. É o caso de um passageiro caminhando no corredor de um trem em movimento ou o caso de um peixe nadando em um rio com correnteza. Estes meios também podem estar em movimento em relação a um terceiro, e assim por diante. Esses movimentos são denominados *movimentos relativos*. Nestas situações, tanto a posição quanto a velocidade do objeto somente podem ser especificadas em relação a um meio.

Por exemplo, se um trem, puxando uma longa plataforma, tem uma velocidade v_{PT} em relação à Terra, e se nesta plataforma um automóvel se deslocar com velocidade v_{AP} em relação à plataforma, então a velocidade do automóvel em relação à Terra será

$$\blacktriangleright \quad v_{AT} = v_{AP} + v_{PT}. \quad (3.17)$$

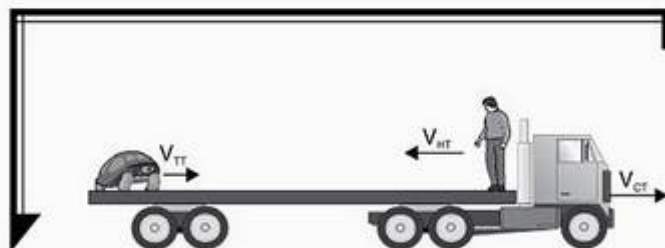
Se uma barata caminha sobre o assoalho de um automóvel com velocidade v_{BA} em relação ao automóvel, então sua velocidade em relação à Terra será

$$\blacktriangleright \quad v_{BT} = v_{BA} + v_{AT} = v_{BA} + v_{AP} + v_{PT}. \quad (3.18)$$

Matematicamente, qualquer *velocidade relativa* pode ser transferida de um lado para outro de uma equação, bastando, para isso, trocar o sinal do vetor em (3.17),

$$\blacktriangleright \quad v_{AP} = v_{AT} - v_{PT} = v_{AT} + v_{TP} \quad (3.19)$$

pois, geralmente, $v_{PQ} = -v_{QP}$.



Exemplo: Sobre a plataforma de um caminhão que se desloca com velocidade uniforme de 15 m/s , uma tartaruga avança na razão de $0,2 \text{ m/s}$, e um homem caminha em direção à tartaruga com velocidade de 1 m/s . Quais serão as velocidades da tartaruga e do homem em relação à Terra?

Resolução: Admita que o movimento dos três corpos ocorre na direção x . Os vetores velocidades do caminhão em relação à Terra e da tartaruga e do homem em relação ao caminhão, serão respectivamente

$$\mathbf{v}_{CT} = 15\mathbf{i}; \quad \mathbf{v}_{TC} = 0,2\mathbf{i} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{HC} = -1\mathbf{i}.$$

Os módulos desses vetores estão em m/s.

Portanto, a velocidade da tartaruga em relação à Terra será

$$\mathbf{v}_{TT} = \mathbf{v}_{TC} + \mathbf{v}_{CT} = 15,2\mathbf{i} \text{ m/s}$$

e a velocidade do homem em relação à Terra será

$$\mathbf{v}_{HT} = \mathbf{v}_{HC} + \mathbf{v}_{CT} = 14\mathbf{i} \text{ m/s}.$$



3.5 FORÇAS E BIOMECÂNICA

Na *biomecânica*, usando leis e conceitos da mecânica, interpretamos e explicamos uma série de fenômenos que ocorrem quando um *ser vivo* está em repouso ou em *movimento*. Todo corpo que está inicialmente em *repouso*, acionando alguns de seus músculos, poderá se locomover. Por análise mecânica, é possível entender total ou parcialmente o *movimento* desse corpo. Esta ação sinérgica de ossos e músculos, no caso dos vertebrados, se manifesta como *forças*. São os *efeitos* dessas forças sobre um corpo que o faz movimentar-se.

A simplicidade ou complexidade das forças que atuam sobre um corpo em movimento depende do tipo de movimento e da estrutura do corpo. Um beija-flor ao voar realiza movimentos que algumas outras aves não conseguem realizar. Isso se deve a diversos fatores físicos e biológicos que influenciam esse tipo de locomoção; também existem no reino animal, animais que *correm* mais rapidamente que outros. A *biomecânica*, utilizando leis gerais da física e mais especificamente da mecânica, tenta explicar essa diferença nos *movimentos* de seres vivos. Mas como utilizar estas leis? Essa é a discussão que iniciamos a seguir.

Forças fundamentais e derivadas

Como a força é uma *grandeza vetorial*, para descrevê-la, qualquer que seja sua natureza, é necessário conhecer a *direção* em que ela atua e também sua *intensidade* (valor quantitativo em termos de uma unidade-padrão de força). No SI a força é expressa em *newton* (N), e no sistema cgs, em *dina*. A Figura 3.19 representa uma força de 3 N, orientada a θ° em relação à horizontal. Para operar forças matematicamente, seguimos todas as regras aplicadas às quantidades vetoriais.

As *forças fundamentais* são forças de interação entre corpos macroscópicos e/ou partículas elementares. Essas forças podem ser:

- ♦ *Gravitacionais*, resultantes da interação entre massas.
- ♦ *Eletromagnéticas*, resultantes da interação entre cargas elétricas.
- ♦ *Nucleares fortes*, de curto alcance, resultantes da interação entre *núcleons* (nêutron ou próton).

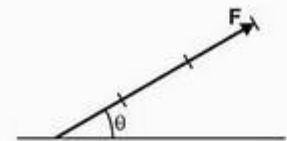


Figura 3.19 Vetor $\mathbf{F}$ com 3 N de intensidade e orientado θ° .

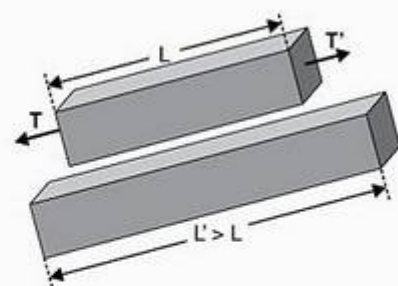


Figura 3.20 Corpo de comprimento L , submetido a esforço de tração.

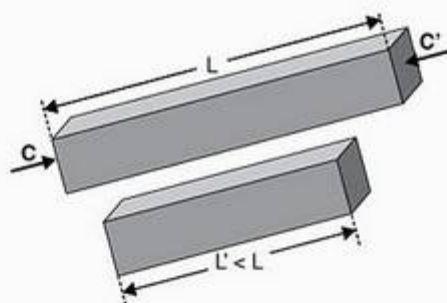


Figura 3.21 Corpo de comprimento L , submetido a esforço de compressão.

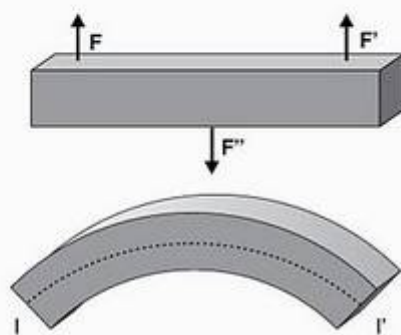


Figura 3.22 Corpo submetido a esforço de flexão.



Figura 3.23 Corpo submetido a um esforço de torção.

♦ *Nucleares fracas*, de curto alcance, que provocam instabilidade em núcleos e partículas elementares.

Qualquer outra forma de força é uma *força derivada*, como, por exemplo, as forças elásticas, de contato, musculares, moleculares, etc.

Na *biomecânica*, analisamos principalmente os efeitos das forças denominadas *derivadas*; estas podem ser de origem externa ao corpo onde agem ou resultantes do efeito de vários componentes do corpo.

Forças elásticas

Ao serem submetidos a certos *esforços*, geralmente os corpos sofrem *deformação* em suas dimensões lineares. Nestas condições, a deformação sofrida dependerá do esforço aplicado, de sua forma geométrica e da natureza do material de que é constituído. Esses esforços deformantes podem ser:

♦ *Tração*: quando o corpo é submetido à ação de duas forças, com sentidos relativos de *afastamento*, aplicadas em pontos diferentes. Como se vê na Figura 3.20, o corpo sofrerá um *alongamento* na direção em que agem as forças e um *encurtamento* perpendicularmente a essa direção.

♦ *Compressão*: quando o corpo é submetido à ação de duas forças, com sentidos relativos de *aproximação*, aplicadas em pontos diferentes. Como se vê na Figura 3.21, o corpo será *encurtado* na direção das forças e experimentará um *alongamento* perpendicularmente a essa direção.

♦ *Flexão*: quando o corpo é submetido pelo menos à ação de três forças, sendo duas no mesmo sentido e outra em sentido contrário. Como se vê na Figura 3.22, o corpo sofrerá *compressão* em uma superfície e *tração* em outra, devido à distribuição das forças na parte interna do corpo. O corpo deformado apresentará uma *linha neutra* II' , onde a ação de força resultante é nula.

♦ *Torção*: quando um corpo é submetido à ação de *pares de força*, que agem em sentidos opostos e em planos diferentes. Na Figura 3.23 está representado o efeito de dois pares de força; as partes externas do corpo serão *torcidas* na direção da sua parte interna, que formará o eixo de torção.

A *elasticidade* de um corpo, ou seja, sua capacidade de retornar à forma inicial (depois que um esforço deformador deixou de agir) pode ser caracterizada por um parâmetro denominado *constante de força* ou *de elasticidade*. Na Figura 3.24, a força de deformação F , aplicada a um corpo que tem um comprimento inicial L_0 , o alongará em ΔL .

Enquanto a intensidade da força aplicada satisfaz a relação

$$F = \kappa \cdot \Delta L, \quad (3.20)$$

sendo κ a constante elástica do material que constitui o corpo, estamos na *região elástica do corpo*. Ao retirarmos F , o corpo voltará a sua dimensão inicial. A equação (3.20) é denominada *lei de Hooke*; lei que caracteriza a elasticidade dos materiais em geral. Essa lei é válida para materiais de composição homogênea.

É usual avaliar-se o *grau de elasticidade* de um material usando-se uma constante Y , denominada *módulo de Young* e definida como

$$Y = \text{Tensão/Deformação} = (F/A)/(\Delta L/L_0), \quad (3.21)$$

onde Y terá unidades de N/m^2 . Note que em (3.21), e como se vê na Figura 3.24, entendemos como *deformação* a relação $\Delta L/L_0$, ou seja, a variação da dimensão do corpo em relação a seu tamanho antes de o esforço ser aplicado. A *tensão* é a relação entre o esforço aplicado e a área A da seção do corpo onde aplicamos F . Nas Figuras 3.25 e 3.26, mostramos as áreas A e A' , respectivamente.



Figura 3.24 Corpo de constante elástica κ experimenta um esforço F , que produz uma deformação ΔL .

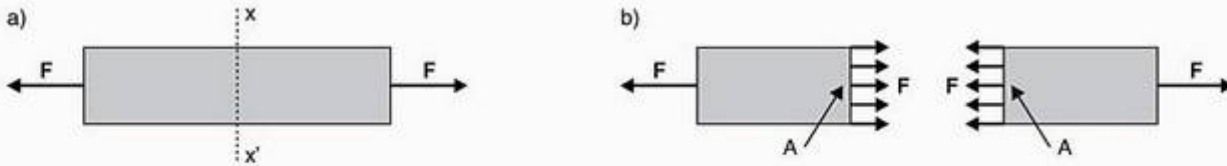


Figura 3.25 a) Esforço de tração F aplicado a um corpo de seção transversal uniforme. xx' é um plano transversal ao corpo.
b) A tração F distribui-se de maneira uniforme na área A .

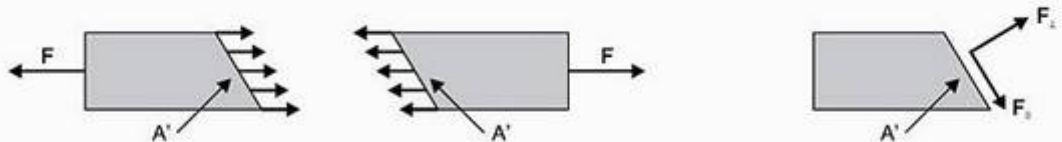


Figura 3.26 O esforço de tração F aplicado em uma seção de corpo de área A' pode ser decomposto em esforço tangencial $F_{||}$ e normal $F_{\perp}$.

Quando analisamos o efeito do esforço na seção do corpo de área A' , como se vê na Figura 3.26, o esforço é decomposto em um componente normal $F_{\perp}$ e outro tangencial $F_{||}$, de modo que temos uma tensão normal $= F_{\perp}/A'$ e uma tangencial $= F_{||}/A'$, onde

$$F^2 = F_{\perp}^2 + F_{||}^2.$$

A Figura 3.27 mostra um gráfico característico *tensão = f(deformação)*, que se aplica a um grande número de materiais sólidos. Nesse gráfico, o trecho $0 \rightarrow 1$ é a região de *proporcionalidade*. Nessa região, o módulo de elasticidade do material é constante, dependendo apenas da natureza do material. No trecho $1 \rightarrow 2$, a relação entre a tensão e a deformação não é linear. O trecho $0 \rightarrow 2$ define a *região elástica* do material. No trecho $2 \rightarrow 3$, o corpo está permanentemente deformado até chegar ao valor em 3, conhecido como *ponto de ruptura*. O trecho $2 \rightarrow 3$ define a *região inelástica* do material.

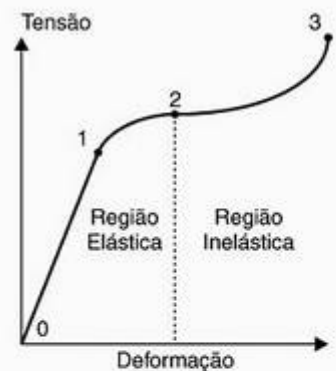


Figura 3.27 Forma característica do gráfico tensão = f (deformação) para um material sólido.

Por exemplo, no *intervalo linear*, para o aço duro e para o osso compacto (tíbia de boi), temos os seguintes valores experimentais:

	Tração máxima (N/m ²)	Compressão máxima (N/m ²)	Y (N/m ²)
Aço duro	$82,7 \times 10^7$	$55,2 \times 10^7$	$2,07 \times 10^{11}$
Osso compacto	$9,8 \times 10^7$	$14,7 \times 10^7$	$1,79 \times 10^{10}$

No caso dos *ossos*, como este material normalmente faz parte de uma estrutura em movimento, estará permanentemente submetido a forças intrínsecas ou extrínsecas. Este osso possui uma grande resistência física, porém uma pequena resistência fisiológica. A *resistência física* é determinada pelas forças internas que se opõem às forças externas, mantendo o corpo em equilíbrio.

A constituição de um osso é de aproximadamente 70% de componentes minerais e 20% de proteínas, sendo o restante substâncias de adesão e água.

O componente mineral são os cristais inorgânicos de *hidroxiapatita*, enquanto o componente protéico são as fibras orgânicas de *colágeno*. As propriedades viscoelásticas do osso devem-se a estes dois componentes. A Figura 3.28 é um gráfico típico da *região linear* da tensão e deformação, para um osso e seus componentes mineral e protéico. Notamos que seu componente mineral é o que garante a resistência desse material a um esforço. O colágeno contribui muito pouco para a resistência à compressão e pode ter contribuição expressiva para a resistência à tração.

A propriedade dos ossos de *resistir* aos esforços recebidos é consequência do arranjo de suas lâminas trabeculares; são esses arranjos que dão origem à força interior que se opõe à exterior, dando a este material uma grande *resistência física*. Como as *estruturas ósseas* dos animais são diferentes entre si, geralmente a *resistência* dos ossos a esforços de tração ou de compressão varia de uma espécie para outra.

Por exemplo, no caso do *fêmur* humano e de outros animais, este osso apresenta diferentes *resistências* às tensões deformadoras de tração ou de compressão que são mostradas a seguir⁽¹⁴⁾:



Figura 3.28 Relação linear entre tensão e deformação para um osso compacto e seus componentes mineral e protéico.

O primeiro quadrante refere-se ao caso em que a tensão é uma tração, e o terceiro, ao de uma compressão.

Espécie	Tração $\times 10^7$ N/m ²	Compressão $\times 10^7$ N/m ²
Homem	12,4	17,0
Cavalo	12,1	14,5
Boi	11,3	14,7
Cervo	10,3	13,3
Javali	10,0	11,8
Porco	8,8	10,0
Avestruz	7,1	12,0

Note que a variação máxima da *resistência* deste osso entre as espécies anteriormente citadas é um fator da ordem de 1,7. Uma discussão interessante foi feita por Bonser⁽¹⁵⁾ para calcular o *módulo de Young* aplicado aos constituintes da pata de uma avestruz.

Nos humanos, os ossos resistem às tensões de modo diferente. Além dos arranjos das trabéculas, há outros fatores. Por exemplo, nas *vértebras* é importante a curvatura da coluna vertebral; na *clavícula* são importantes as duas curvaturas e as duas bordas; no *úmero* é importante a concavidade no terço inferior do eixo longitudinal; no *fêmur* são importantes as formas da diáfise e duas epífises; na *tíbia* são importantes a forma da diáfise com uma concavidade dirigida para fora em seu terço superior e outra dirigida para dentro em seu terço inferior, ambos girando sobre o seu eixo longitudinal.

Exemplo: Um músculo sofre uma força de compressão; o gráfico tensão-deformação das fibras musculares é apresentado na figura ao lado.

- Determine o módulo de Young, para tensões de 1; 2,5 e $3,5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$.
- Faça o gráfico do módulo de Young em função do esforço aplicado.

Resolução: Do gráfico tensão-deformação, vemos que, para as tensões 1; 2,5 e $3,5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, as deformações são, respectivamente, 0,18, 0,79 e 1,5.

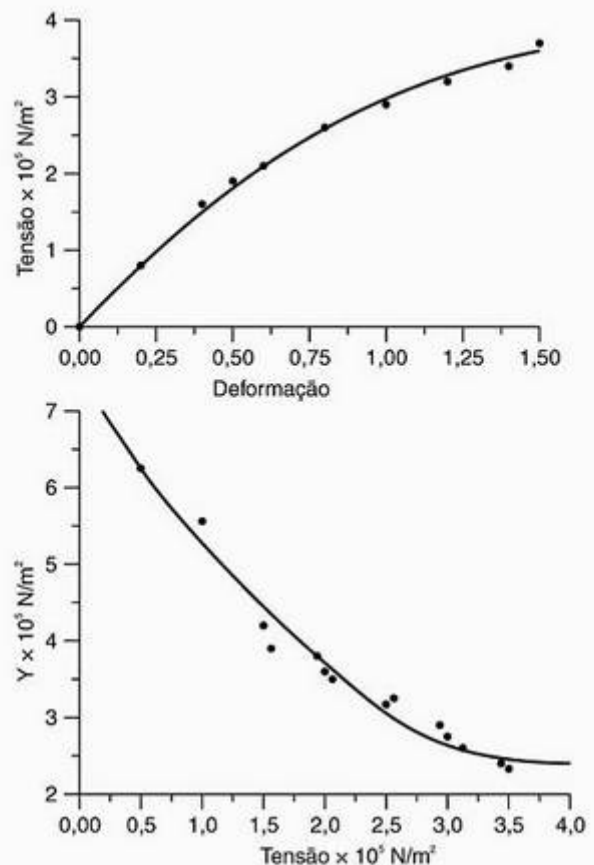
Portanto, os módulos de Young serão respectivamente:

$$Y = 1,0 \times 10^5 / 0,18 = 5,56 \times 10^5 \text{ N/m}^2;$$

$$Y = 2,5 \times 10^5 / 0,79 = 3,17 \times 10^5 \text{ N/m}^2;$$

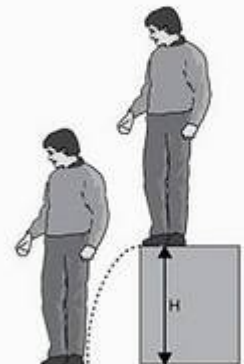
$$Y = 3,5 \times 10^5 / 1,50 = 2,33 \times 10^5 \text{ N/m}^2.$$

- Do gráfico Y-tensão, concluímos que, quando a tensão *decrece*, o módulo de Young *Y* *aumenta*.



Exemplo: A *tíbia* é o osso mais vulnerável da perna do ser humano. Esse osso sofre fratura para esforços de *compressão* da ordem de $5 \times 10^4 \text{ N}$. Suponha que um homem com 75 kg de massa salte de uma altura *H* e, ao cair no chão, não dobre os joelhos. O esforço que a tíbia sofre faz com que ela tenha um encurtamento $\Delta l \approx 1 \text{ cm}$. Qual deverá ser o valor máximo de *H* para que esse osso não frature?

Resolução: Com (3.13) determinamos a velocidade *v*, com a qual os pés do homem chegam ao chão: $v^2 = 2gH$. Ao tocar o chão, a tíbia sofre uma força



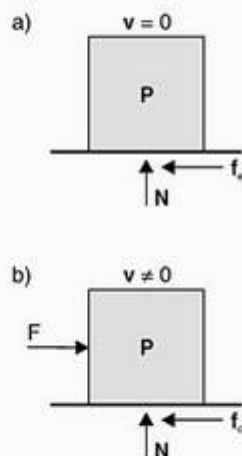


Figura 3.29 Corpo de peso P em repouso (a) e em movimento (b); as forças de atrito são, respectivamente, a estática f_e e a cinética f_c .

média de compressão F , que provoca uma deformação Δl . Esta deformação acontece com uma aceleração média a ; assim, de acordo com a (3.10)

$$2gH = 2a\Delta l \Rightarrow a = g(H/\Delta l).$$

A intensidade da compressão será

$$F = mgH/\Delta l;$$

onde m é a massa do humano.

Se $F = 5 \times 10^4 \text{ N}$, então temos que

$$H = (5 \times 10^4 \text{ N})(0,01 \text{ m}) / (75 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) \approx 0,7 \text{ m}.$$

Assim, ignorando a ação muscular, se um homem com 75 kg saltar de alturas menores que 70 cm e cair de pé, não terá sua tíbia fraturada.

Forças de atrito

Outro tipo de *força derivada* bastante comum é a *força de contato*. A origem dessa força é o contato físico entre dois corpos. As *forças de atrito* são um caso típico de forças de contato. A intensidade dessa força depende do coeficiente de atrito entre as superfícies dos corpos que estão em contato.

Na Figura 3.29 temos um corpo de peso $P = mg$, em repouso e em movimento. A massa do corpo é m . Em qualquer dessas situações:

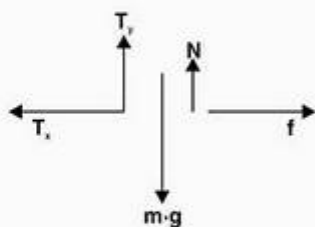
$N = P$: componente de vínculo ou força normal de contato.

Quando o corpo está em *repouso*, $f_e = \mu_e N$: força de atrito estático.

Quando o corpo está em *movimento*, devido à ação da força externa, F , $f_c = \mu_c N$: força de atrito cinético. μ_c e μ_e são respectivamente os coeficientes de atrito cinético e estático. Para a mesma superfície, geralmente $\mu_c < \mu_e$.



Exemplo: Considere um paciente com 70 kg submetido a um esforço de *tração*, como se vê na figura ao lado. Qual será o valor máximo da massa M , para que o esforço T produzido não desloque o paciente ao longo da cama? Considere o coeficiente de atrito entre a cama e as roupas do paciente igual a 0,2.



Resolução: Sobre o paciente de massa m , agem forças derivadas e fundamentais. Como o sistema paciente-massa M está em equilíbrio, então

$$Mg = T \Rightarrow M = T/g \quad (1)$$

$$N + T_y = m \cdot g \Rightarrow N = m \cdot g - T \cdot \sin 30^\circ \quad (2)$$

$$f = \mu \cdot N = T \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow N = T \cdot \cos 30^\circ / \mu \quad (3)$$

$$\text{de (2) e (3), } T = \mu \cdot m \cdot g / (\cos 30^\circ + \mu \cdot \sin 30^\circ) \quad (4)$$

Finalmente, de (1) e (4) achamos que o valor máximo de M deverá ser

$$M = \mu \cdot m / (\cos 30^\circ + \mu \cdot \sin 30^\circ) = (0,2 \times 70 \text{ kg}) / (\cos 30^\circ + 0,2 \cdot \sin 30^\circ) = 14,5 \text{ kg}.$$

Força muscular

Força muscular é um conjunto de forças cuja origem está no *tecido muscular*. Fisiologicamente, nesse tecido, acontecem interações de certas proteínas que experimentam mudanças de configuração, proporcionando, assim, uma *contração* rápida e voluntária. A ação dessa força é consequência da seguinte transformação de energia

Energia Química $\Rightarrow$ Energia Mecânica + Energia Térmica.

A Figura 3.30 mostra a constituição básica de um tecido muscular. O músculo estriado é constituído por *fibras longas*, cujos extremos estão ligados a *tendões* (a). Essas fibras são células muito compridas com muitos núcleos (b). Cada fibra contém muitas *miofibrilas*, ou conjunto paralelo de filamentos contráteis (c). As miofibrilas estão divididas em sarcômeros (unidade contrátil do músculo) pelas *linhas Z* (d). Entre as linhas Z, quando o músculo está *relaxado*, temos *filamentos grossos e finos* regularmente espaçados (e). Durante a *contração* do músculo, os filamentos finos deslizam entre os grossos (f), encurtando o sarcômero (o que se vê com maior detalhe na Figura 3.31).

Ao *excitar* um ponto qualquer do organismo, essa excitação é conduzida pelos neurônios até o cérebro e retorna por outros neurônios com a ordem até que atinge a placa motora, que, por sua vez, provoca a *contração* do músculo (mais detalhes deste mecanismo de excitação serão estudados no capítulo 8).

A força máxima que um músculo pode exercer depende da área de sua seção transversal. No homem essa força está dentro do intervalo de $2,7$ a $3,6 \times 10^5 \text{ N/m}^2$. Por exemplo, para um músculo exercer uma força de 530 N , deverá haver uma seção transversal entre 15 a 20 cm^2 .

A *contração* de um músculo é medida pela alteração da força exercida em seus *pontos fixos* ou pelo seu simples encurtamento. De acordo com o efeito final, ou seja, com o movimento produzido no corpo, as contrações experimentadas pelos músculos podem ser:

- ♦ **Estática ou isométrica:** Neste caso, a tensão produzida é insuficiente para mover um segmento do corpo ante uma determinada resistência. Externamente, o músculo *não* altera seu comprimento, porém, internamente, ele experimenta um equilíbrio entre as tendências ao encurtamento dos elementos contráteis e ao alongamento dos elementos elásticos. No tecido muscular ocorre a transformação

Energia Química $\Rightarrow$ Energia Térmica.

- ♦ **Dinâmica ou isotônica:** Neste caso, a tensão produzida pode mover uma parte do corpo ante uma determinada resistência, produzindo um trabalho mecânico. No tecido muscular acontece a seguinte transformação

Energia Química $\Rightarrow$ Energia Mecânica + Energia Térmica.

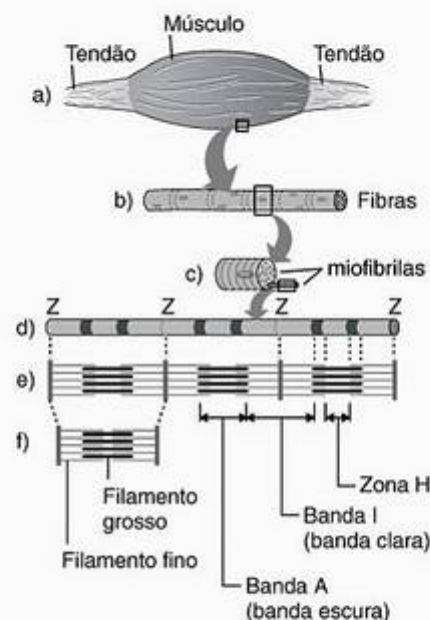


Figura 3.30 Tecido muscular (a), suas fibras (b) e miofibrilas (c). Divisão em sarcômeros das miofibrilas (d) com o músculo relaxado (e) ou contraído (f).

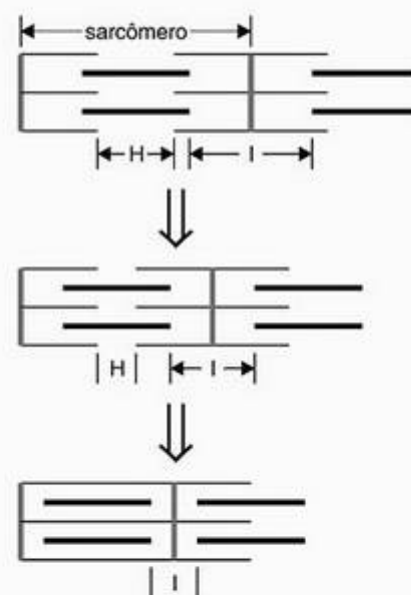


Figura 3.31 Durante a contração de um músculo, a banda I e a zona H encurtam, produzindo aproximação entre os tendões, que por sua vez estão inseridos nos ossos.

As contrações isotônicas podem ser de dois tipos:

- *Concêntrica*: Quando há encurtamento das fibras musculares e o trabalho final é visível.
- *Excêntrica*: Quando há um alongamento das fibras; ainda que haja contração, isso é superado pela resistência encontrada.

As Figuras 3.32 e 3.33 mostram modelos de contração isométrica e isotônica, respectivamente. No primeiro caso, tanto a origem quanto a inserção do músculo estão fixas. No segundo caso, só uma extremidade é fixa.

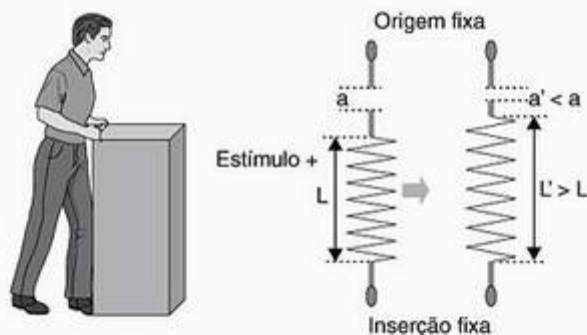


Figura 3.32 Pessoa tentando deslocar um objeto fixo no chão. Contração muscular isométrica: os elementos elásticos tendem a se alongar e os contráteis a se encurtar. O comprimento da fibra muscular não se altera.

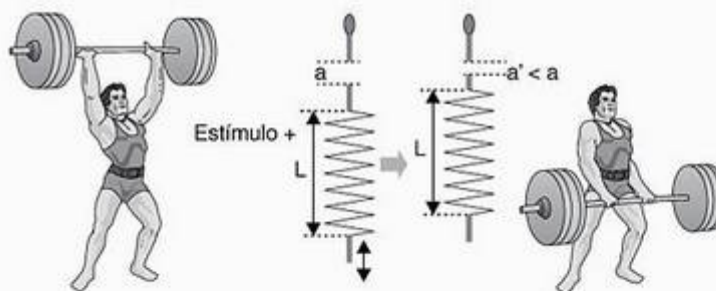


Figura 3.33 Contração muscular isotônica: os elementos elásticos não se alteram, enquanto os contráteis se encurtam ou alongam. As fibras musculares sofrem variação em seu comprimento.

Dependendo da localização de um músculo e do tipo de movimento executado, a *força muscular* produzida pode ser vista como resultante de componentes que atuam especificamente no movimento de uma parte do corpo. Na Figura 3.34 temos o caso de dois segmentos ósseos e um músculo, cuja origem *O* se encontra num segmento e a inserção *I*, em outro.

A força muscular *F* terá um componente rotador *R* e um componente estabilizador *E*. Quando o segmento ósseo *AC* se movimenta no sentido anti-horário, em torno da articulação *A*, tanto o componente *R* como o ângulo de tração ϕ aumentam, enquanto o componente *E* diminui. É evidente que esse efeito do músculo deve-se ao tipo de movimento desse segmento ósseo.

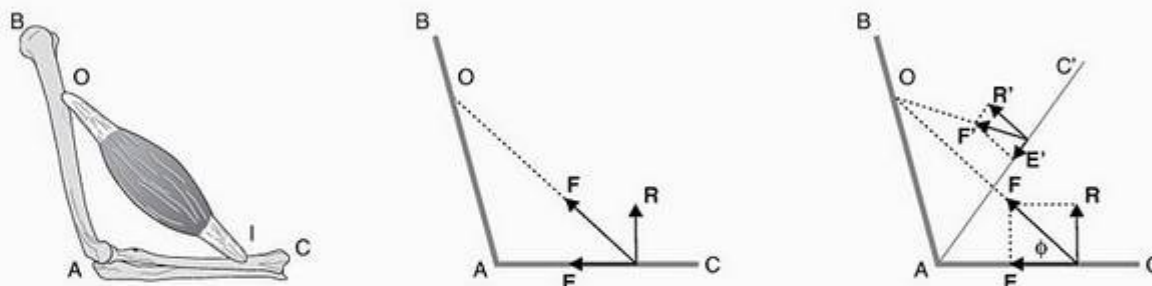


Figura 3.34 Músculo com origem *O* e inserção *I*, atuando sobre os ossos *AB* e *AC*. *R* e *E* são respectivamente os componentes rotador e estabilizador da força muscular *F*. Quando o osso *AC* muda para a posição *AC'*, o ângulo de tração ϕ da força *F'* aumenta, sendo de $R' > R$ e $E' < E$.

Um estudo bastante detalhado sobre *vertebrados*, relacionando a função dos músculos com a elasticidade do tendão, foi feito por Alexander⁽¹⁶⁾, que mostra a grande importância dessas articulações para o movimento dos ossos.

Exemplo: O músculo deltóide tem um formato triangular e movimenta o braço. Considere que as partes anterior e posterior deste músculo fazem esforços de 55 N e 35 N, respectivamente, para elevar o braço. Determine a direção e a magnitude da força **F** exercida pelo músculo.

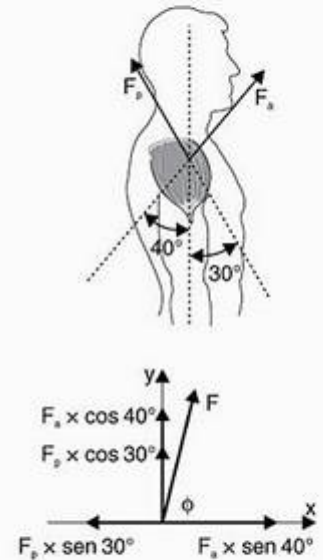
Resolução: Devemos encontrar a força resultante **F** de duas forças conhecidas. De acordo com o diagrama de forças, nas direções *x* e *y* teremos as seguintes resultantes

$$F_x = F_{ax} - F_{px} = 55 \times \sin 40^\circ - 35 \times \sin 30^\circ = 17,85 \text{ N}$$

$$F_y = F_{ay} + F_{py} = 55 \times \cos 40^\circ + 35 \times \cos 30^\circ = 72,44 \text{ N.}$$

$$\text{Magnitude da força resultante: } F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 74,61 \text{ N}$$

$$\text{Direção da força resultante: } \phi = \tan^{-1}(F_y/F_x) = 76,16^\circ.$$



Exemplo: O músculo quadríceps se encontra na coxa e seu tendão chega até a perna. Considere a perna ligeiramente dobrada de modo que a tensão **T** no tendão seja 1 400 N. Determine a direção e a magnitude da força **F**, exercida pelo fêmur sobre a patela.

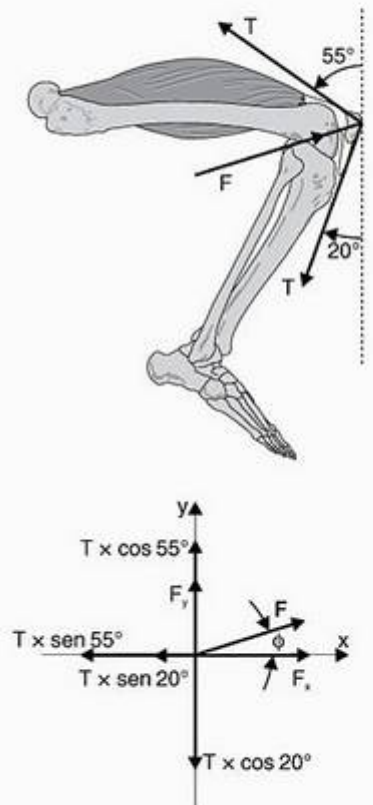
Resolução: Como o sistema de ossos na articulação da perna e o tendão do quadríceps estão em equilíbrio, a resultante das forças **T** e **F** deverá ser nula. De acordo com o diagrama de forças, nas direções *x* e *y* teremos, respectivamente,

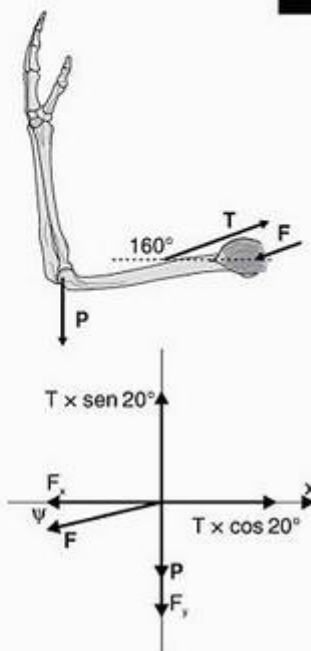
$$F_x - 1400 \times \sin 20^\circ - 1400 \times \sin 55^\circ = 0 \Rightarrow F_x = 1625,64 \text{ N}$$

$$F_y + 1400 \times \cos 55^\circ - 1400 \times \cos 20^\circ = 0 \Rightarrow F_y = 512,56 \text{ N}$$

∴ a magnitude e a direção da força de contato **F** serão, respectivamente,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 1704,53 \text{ N} \quad \text{e} \quad \phi = \tan^{-1}(F_y/F_x) = 17,5^\circ.$$





Exemplo: Considere que, em um braço esticado, o músculo deltóide exerce uma força de tração T , que forma um ângulo de 20° com o úmero. Entre esse osso e o ombro existe uma força de contato F . Se o peso P do membro superior completo é 35 N e $T = 300\text{ N}$, determine F , para que o úmero se mantenha em equilíbrio.

Resolução: Para que o úmero se mantenha em equilíbrio, a força resultante sobre esse osso deverá ser nula. Considerando que a força P age no extremo anterior do úmero, esse sistema de três forças terá resultante nula nas direções x e y , ou seja,

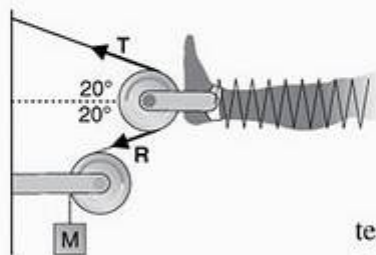
$$T \times \cos 20^\circ - F_x = 0 \Rightarrow F_x = 281,91\text{ N}$$

$$T \times \sin 20^\circ - P - F_y = 0 \Rightarrow F_y = 67,61\text{ N}.$$

$\therefore$ a magnitude e a direção da força de contato F serão, respectivamente,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 289,90\text{ N} \text{ e } \phi = \text{tg}^{-1}(F_y/F_x) = 193,49^\circ. \text{ Logo,}$$

$$\psi = \phi - 180^\circ = 13,49^\circ.$$



Exemplo: Uma perna engessada é submetida às tensões T e R produzidas pela massa suspensa M . Nessa situação, a perna experimenta uma tração longitudinal de 90 N . Suponha que a perna é elevada até que T seja horizontal e faça um ângulo de 35° com R . Qual será a magnitude e a direção da força F experimentada pela perna?

Resolução: Inicialmente a perna está em equilíbrio; logo as forças T , R e f terão resultante nula, sendo f a tração sobre a perna. Como a massa M está em equilíbrio, então $R = M \times g$, enquanto

$$T \times \sin 20^\circ = R \times \sin 20^\circ \Rightarrow T = R = M \times g$$

$$f = T \times \cos 20^\circ + R \times \cos 20^\circ \Rightarrow M = f/2 \times g \times \cos 20^\circ = 4,89\text{ kg}.$$

Quando a perna é levantada, continuamos tendo $T = R = M \times g = 47,89\text{ N}$.

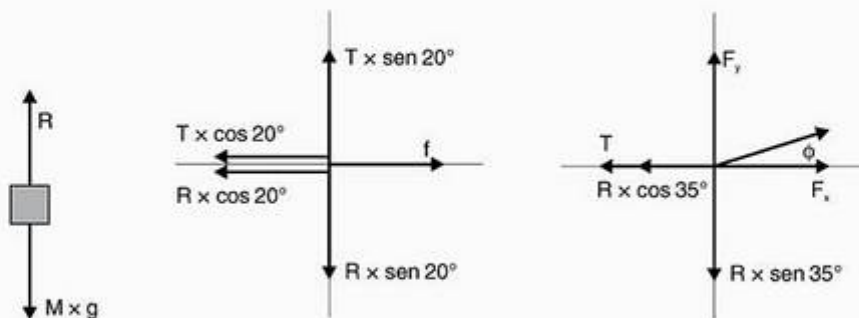
Como as forças T , R e F estão em equilíbrio, então

$$F_x - T - R \times \cos 35^\circ = 0 \Rightarrow F_x = 47,89 + 47,89 \times \cos 35^\circ = 87,12\text{ N}$$

$$F_y - R \times \sin 35^\circ = 0 \Rightarrow F_y = 47,89 \times \sin 35^\circ = 27,47\text{ N}$$

$\therefore$ a magnitude e a direção da força F serão, respectivamente,

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 91,34\text{ N} \text{ e } \phi = \text{tg}^{-1}(F_y/F_x) = 17,5^\circ.$$





3.6 MOMENTO: ALAVANCAS

O momento ou torque M de uma força F é uma quantidade vetorial, calculada em relação a um ponto fixo O . Este ponto pode estar no corpo ou fora dele. Quando uma força que age sobre um corpo produz um momento, então o corpo tenderá a ter um *movimento de rotação* em torno do eixo que passa por O . Por definição

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (3.22)$$

onde r é a distância entre o ponto de ação A da força e o ponto fixo O (como mostra a Figura 3.35). A direção de M é dada pela regra da mão direita aplicada aos produtos vetoriais e sua intensidade, por

$$M = r \cdot F \cdot \sin \theta = F \cdot (r \cdot \sin \theta) = F \cdot d, \quad (3.23)$$

onde d é denominado braço da força F , ou braço do momento.

A *alavanca* é um sistema que, ao experimentar uma pequena força F_c , pode equilibrar ou erguer um corpo que exerce uma força maior F_r .

A razão F_r/F_c é denominada *vantagem mecânica*. Para termos uma alavanca, o sistema deve experimentar a ação de pelo menos duas forças e ter um ponto de apoio. Se duas forças paralelas P e R agem sobre uma barra horizontal que tem um ponto de apoio, dependendo dos pontos de ação dessas forças, é possível gerar três tipos de alavancas, como se vê na Figura 3.36.

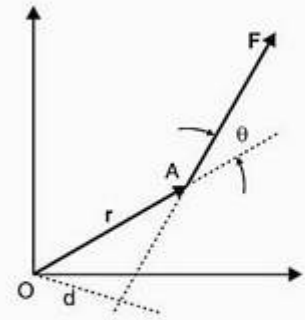


Figura 3.35 Força F produzindo um momento M em relação ao ponto fixo O .

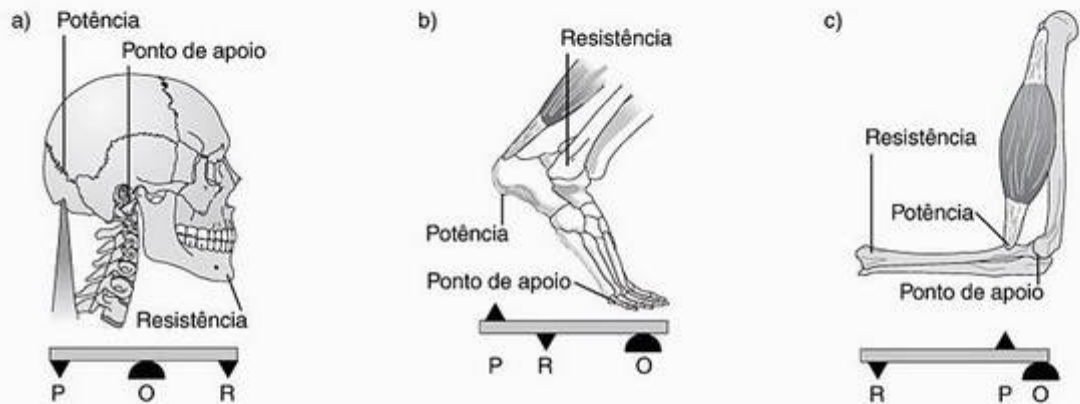
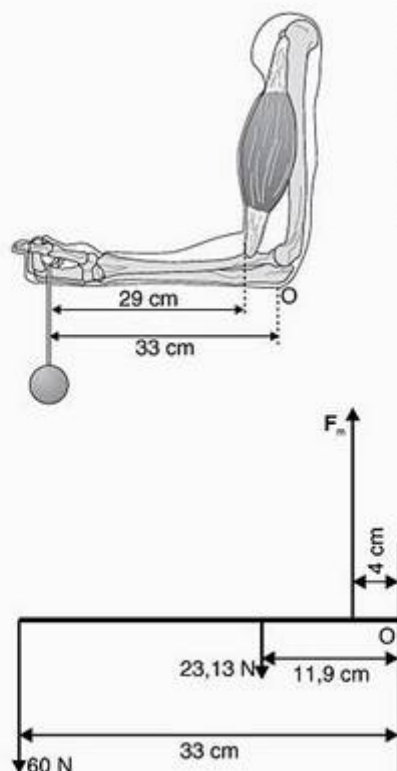


Figura 3.36 Três tipos de alavanca. P é uma força aplicada para equilibrar ou erguer a força resistente R .

A função de uma alavanca é realizar um trabalho com boa vantagem mecânica, levando a um equilíbrio de forças com intensidades diferentes, por meio de seus *momentos*. No corpo humano, os ossos e músculos formam conjuntos de alavancas, sendo mais comum encontrar as alavancas de *força* (Figura 3.36b) e de *velocidade* (Figura 3.36c). Os *ossos* atuam como uma barra sólida, inflexível, onde serão aplicadas as forças, e os *músculos* agirão como gerador de *potência* na produção de movimento ou como *resistência* adicionada a uma carga externa.

Quando o momento sobre o corpo não é nulo, seu *movimento* será de rotação. Logo, para um corpo estar em *total equilíbrio*, deverá satisfazer às seguintes condições. Se

- ♦ A *resultante* das forças externas que agem sobre o corpo for *nula*, ele permanecerá em *repouso* ou em movimento com velocidade constante.
- ♦ O *momento resultante* devido às forças externas sobre o corpo for *nulo*, ele permanecerá em equilíbrio de rotação.



Exemplo: Considere que o conjunto antebraço e mão de uma pessoa pesa 23,13 N e que o ponto de aplicação dessa força se encontra a 11,9 cm do cúbito. A mão sustenta uma esfera de 60 N. Se o antebraço está perpendicular ao braço, determine a direção e a intensidade

- do momento produzido pela esfera, em torno do cúbito (ponto O);
- do momento produzido pela força muscular em torno do cúbito;
- da força muscular.

Resolução: Como o membro superior e a esfera estão em *total equilíbrio*, a resultante das forças que agem sobre o conjunto antebraço-mão e os momentos dessas forças devem ser nulos. A força muscular F_m é perpendicular à direção dos ossos do antebraço. Logo, em relação ao cúbito, temos

a) o momento produzido pela esfera tem sentido anti-horário, direção perpendicular ao plano dos ossos do antebraço e intensidade

$$M_e = 60 \text{ N} \times 0,33 \text{ m} = 19,8 \text{ N} \cdot \text{m};$$

b) o momento produzido pela força muscular tem sentido horário, mesma direção que M_e , e intensidade

$$M_m = F_m \times 0,04 = 23,13 \text{ N} \times 0,119 \text{ m} + 60 \text{ N} \times 0,33 \text{ m} = 22,55 \text{ N} \cdot \text{m};$$

c) a intensidade da força muscular será

$$F_m = 22,55 \text{ N} \cdot \text{m} / 0,04 \text{ m} = 563,81 \text{ N}.$$



Exemplo: Um ginasta com 70 kg está suspenso com as mãos em uma barra horizontal. Determine as forças

- F exercida pela barra sobre a mão;
- T no tendão do bíceps;
- R exercida pelo úmero sobre o antebraço através do cúbito.

Resolução:

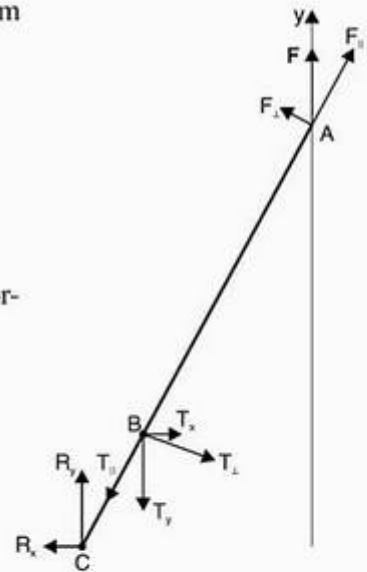
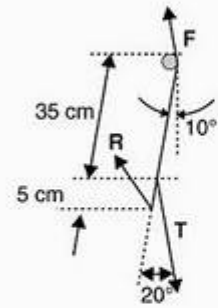
- a) Considere que o centro de massa do ginasta está na vertical que passa pela barra. Seu antebraço está levemente inclinado formando um ângulo de 10° em relação à vertical, e o eixo longitudinal do bíceps forma um ângulo de 20° em relação ao antebraço. O peso do ginasta é sustentado pelas mãos, de modo que a intensidade da força exercida pela barra em *uma* mão será $F_y = \frac{1}{2} (70 \text{ kg}) \cdot (9,8 \text{ m/s}^2) = 343 \text{ N}$ e $F_x \equiv 0$
 $\therefore F \equiv 343 \text{ N}$.

Como o antebraço está em total equilíbrio, a resultante das forças que agem nele e seus momentos deverão ser nulos.

- b) Em relação ao cúbito (ponto C), o momento resultante será nulo,
 $\therefore F_{\perp} (AC) - T_{\perp} (BC) = 0$
 $(F \cdot \sin 10^\circ) \cdot (0,4 \text{ m}) - (T \cdot \sin 20^\circ) (0,05 \text{ m}) = 0 \Rightarrow T = 1393,16 \text{ N}$.

- c) Nas direções horizontal e vertical, a soma dos componentes é nula; portanto,
 $T \cdot \sin 10^\circ - R_x = 0 \Rightarrow R_x = 241,92 \text{ N}$
 e $F + R_y - T \cdot \cos 10^\circ = 0 \Rightarrow R_y = 1029 \text{ N}$.
 Logo, a magnitude da força **R** será
 $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 1057,06 \text{ N}$.

Note que, na solução deste exemplo, não está sendo considerado nenhum outro efeito da barra metálica devido ao *contato* com as mãos do ginasta.



CENTRO DE MASSA DE UM CORPO

O centro de um corpo é um *ponto* que pode estar ou não na parte material do corpo. Esse ponto tem as seguintes propriedades:

- ♦ Ele se movimentará com *velocidade constante*, quando a resultante das forças externas sobre o corpo for nula ou na ausência de forças externas.
- ♦ Ele terá uma aceleração $a = F/M$, quando uma força externa **F** agir sobre o corpo de massa **M**.

Para localizar o centro de massa (CM) de um corpo, devemos levar em conta duas possíveis situações. Se o corpo tiver:

- ♦ *forma geométrica regular*, o CM coincidirá com seu centro de simetria; alguns casos são apresentados na Figura 3.37;
- ♦ *forma geométrica irregular*, então o CM é localizado da seguinte maneira:



Figura 3.37 Centros de massa de três corpos de forma regular.

- procuraremos decompor o corpo de massa M em diversas partes, cada uma com forma regular e com massa m_i ($i = 1, 2, \dots, n$);
- determinaremos o CM (x_i, y_i, z_i) de cada parte, ou seja, os respectivos centros de simetria de cada parte;
- finalmente, as coordenadas (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) do CM do corpo serão dadas por

$$\blacktriangleright \quad x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad z_{cm} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}. \quad (3.24)$$

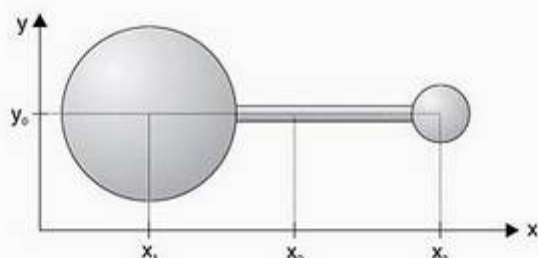


Figura 3.38 Corpo constituído por duas esferas com massas m_1 e m_3 , respectivamente, e por um cilindro com massa m_2 .

Por exemplo, na Figura 3.38 temos duas esferas com massas m_1 e m_3 unidas por uma barra cilíndrica com massa m_2 . O centro de massa desse conjunto será dado por

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = y_0,$$

pois $y_1 = y_2 = y_3 = y_0$.

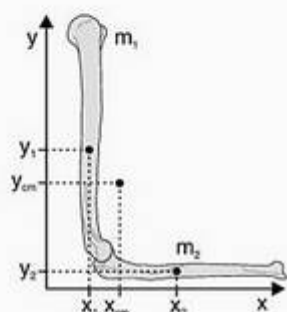


Figura 3.39 Conjunto de dois ossos em ângulo reto, sendo $m_1 > m_2$.

Na Figura 3.39, temos dois ossos com massas m_1 e m_2 , respectivamente, formando ângulo reto. Neste caso, teremos

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; \quad y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Se $m_1 > m_2$, ou seja, $m_1 = km_2$, com $k > 1$, então

$$x_{cm} = \frac{km_2 x_1 + m_2 x_2}{km_2 + m_2} = \frac{kx_1 + x_2}{1 + k} \Rightarrow (x_2 - x_{cm}) = k(x_{cm} - x_1),$$

ou seja, x_{cm} está *mais perto* do osso com massa maior, no caso, m_1 .

$$y_{cm} = \frac{km_2 y_1 + m_2 y_2}{km_2 + m_2} = \frac{ky_1 + y_2}{1 + k} \Rightarrow (y_{cm} - y_2) = k(y_1 - y_{cm}),$$

ou seja, y_{cm} está *mais perto* da coordenada y_1 do osso com massa maior.

No *corpo humano*, como os músculos trabalham continuamente para sustentar suas diversas partes, ao determinar seu CM, devemos considerar o corpo no seu todo e também parcialmente. A Figura 3.40 mostra os centros de massa de diferentes partes do corpo humano e os principais pontos de articulação.

Na Tabela 3.1, mostramos os valores usados pela NASA para as coordenadas das articulações e dos centros de massa de várias partes do corpo humano. Estes valores correspondem a um homem adulto e são percentuais correspondentes a valores de $M = 100$ e $H = 100$. Os eixos x , y e z aparecem na Figura 3.40.

Centros de massa de	Articulações
1 Cabeça	A Base do crânio
2 Tronco	B Escápulo-umeral
3 Braço	C Cúbito (cotovelo)
4 Antebraço	D Ilíaco-femoral
5 Mão	E Pulso
6 Coxa	F Joelho
7 Perna	G Tornozelo
8 Pé	
0 Corpo inteiro	

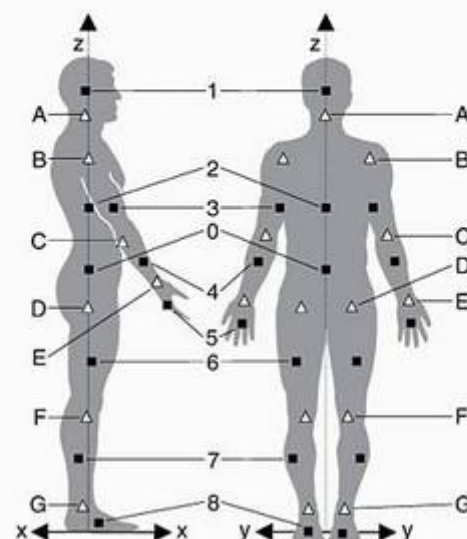


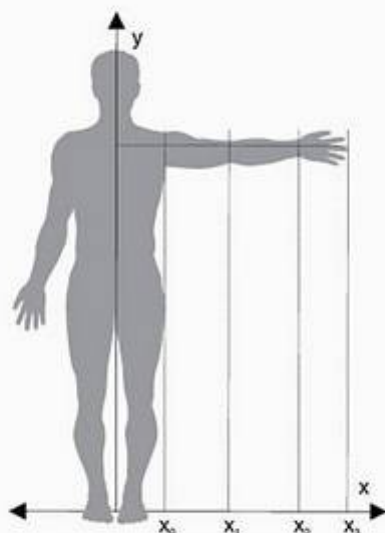
Figura 3.40 Informações usadas pela NASA (National Aeronautics and Space Administration) sobre os centros de massa e articulações de um homem adulto.

Tabela 3.1 Coordenadas das articulações e dos centros de massa de partes do corpo de um homem. Estamos considerando que o corpo tem massa $M = 100$ e altura $H = 100$.

Parte do corpo humano	Coordenadas			Massa
	x	y	z	
Cabeça	0,00	0,00	93,48	6,9
Base do crânio	0,00	0,00	91,23	
Tronco	0,00	0,00	71,09	46,1
Articulação escápulo-umeral	0,00	$\pm 10,66$	81,16	
Braços	0,00	$\pm 10,66$	71,74	6,6
Cúbitos	0,00	$\pm 10,66$	62,20	
Antebraços	0,00	$\pm 10,66$	55,33	4,2
Ilíaco-femorais	0,00	$\pm 5,04$	52,13	
Mãos	0,00	$\pm 10,66$	43,13	1,7
Pulsos	0,00	$\pm 10,66$	46,21	
Coxas	0,00	$\pm 5,04$	42,48	21,5
Joelhos	0,00	$\pm 5,04$	28,44	
Pernas	0,00	$\pm 5,04$	18,19	9,6
Tornozelos	0,00	$\pm 5,04$	3,85	
Pés	3,85	$\pm 6,16$	1,78	3,4
Corpo inteiro	0,00	0,00	57,95	100,0

Exemplo: Considere que um homem com 80 kg e 1,75 m de altura encontra-se em pé e com os membros superiores estendidos horizontalmente. Determine:

- A massa de cada segmento dos membros superiores.
- O centro de massa dos membros superiores em relação ao solo.



Resolução:

- Utilizando os dados da Tabela 3.1, para um homem com 80 kg, determinamos as massas dos

- braços: $0,066 \times 80 \text{ kg} = 5,28 \text{ kg}$
- antebraços: $0,042 \times 80 \text{ kg} = 3,36 \text{ kg}$
- mãos: $0,017 \times 80 \text{ kg} = 1,36 \text{ kg}$.

Logo, a massa de cada membro superior é 5,0 kg.

- Coordenadas da articulação escápulo-umeral:

$$x_0 = 0,1076 \times 1,75 \text{ m} = 0,1866 \text{ m}$$

$$y_0 = 0,8116 \times 1,75 \text{ m} = 1,42 \text{ m}.$$

Coordenada horizontal do centro de massa do:

- braço: $x_1 = x_0 + (0,8116 - 0,7174) \times 1,75 \text{ m} = 0,3515 \text{ m}$
- antebraço: $x_2 = x_0 + (0,8116 - 0,5533) \times 1,75 \text{ m} = 0,6386 \text{ m}$
- mão: $x_3 = x_0 + (0,8116 - 0,4313) \times 1,75 \text{ m} = 0,8521 \text{ m}.$

A coordenada vertical de cada uma dessas partes coincide com $y_0 = 1,42 \text{ m}$, a coordenada da articulação escápulo-umeral. Logo, para determinar o centro de massa do membro superior, utilizamos a equação (3.24)

$$x_{cm} = [0,315 \text{ m} \times 2,64 \text{ kg} + 0,6386 \text{ m} \times 1,68 \text{ kg} + 0,8521 \text{ m} \times 0,68 \text{ kg}] / 5 \text{ kg} \\ = 0,516 \text{ m}$$

$$y_{cm} = y_0 = 1,42 \text{ m}.$$

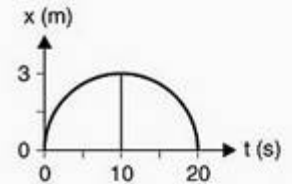
Quando precisarmos determinar o centro de massa de outras partes do corpo humano, seguimos um procedimento similar ao exemplo discutido acima.



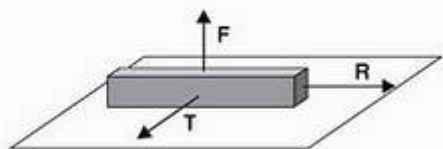
PROBLEMAS

- O vetor **A** encontra-se no terceiro quadrante do plano xy, e sua magnitude é 25 unidades. Se $A_y = 2A_x$, então escreva **A** em função dos vetores unitários **i** e **j**.
- Um vetor **L** orientado para o leste tem magnitude = 6 unidades; outro vetor **S** orientado para o sul tem magnitude = 8 unidades. Determine:
 - $\mathbf{L} - \mathbf{S}$;
 - $\mathbf{L} + \mathbf{S}$;
 - $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$;
 - $\mathbf{L} \times \mathbf{S}$.
- Uma força vertical de 4 N e outra horizontal de 3 N estão aplicadas sobre um corpo. Qual é a magnitude e a direção da força resultante?

4. Três vetores **A**, **B** e **C**, com 5 unidades cada um, estão respectivamente inclinados: 60° , 180° e 300° . Determine:
 - a) $\mathbf{A} + \mathbf{C}$; b) $\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C}$; c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$;
 - d) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$; e) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$.
5. Dados os vetores $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{C} = -4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. Determine a magnitude e direção de:
 - a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$; b) $\mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{C}$; c) $4\mathbf{B} - \mathbf{C}$.
6. Se $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Determine os produtos escalar e vetorial de **A** e **B**.
7. Um objeto se desloca na direção x , e seu gráfico de deslocamento = $f(\text{tempo})$ é conhecido.
 - a) Determine a velocidade instantânea do objeto aos 5 s, 10 s e 15 s.
 - b) Faça os gráficos da velocidade e da aceleração em função do tempo.
8. Considere que a posição de um objeto que está se deslocando na direção x é dada por $x = 5t + 3$, onde x é expresso em metros e t em segundos. Em relação ao objeto, qual será sua:
 - a) posição inicial;
 - b) velocidade instantânea;
 - c) aceleração.
9. Um gafanhoto, para fazer um salto, estende suas patas 2,5 cm em 25 ms. Determine a:
 - a) aceleração com a qual ele estende suas patas;
 - b) velocidade quando parte do chão, ou seja, no instante em que suas patas estão completamente estendidas;
 - c) a altura máxima que ele conseguirá atingir neste salto.
10. Um atleta de salto em altura fez um salto de 1,3 m. Com que velocidade ele saiu do chão?
11. Da parte mais alta de um prédio é solta uma pedra; passado 1 s lançamos para baixo uma segunda pedra, com uma velocidade inicial de 20 m/s. A que distância da parte mais alta do prédio a segunda pedra alcançará a primeira?
12. Um estudante decide verificar *in vivo* a lei da queda livre. Para isso, ele sobe ao topo de um penhasco que se encontra a 300 m do solo e se atira levando com ele um cronômetro. O Super-Homem aparece no topo de penhasco 5 s depois e se lança com uma aceleração igual à dos corpos em queda livre. Determine:
 - a) a velocidade inicial do Super-Homem, para agarrar o estudante justamente antes de tocar o solo;
 - b) de que altura o estudante deveria se atirar, para que nem mesmo o Super-Homem pudesse salvá-lo.
13. Considere duas pessoas, uma com 1,80 m de altura e outra com 1,50 m. Qual será a relação entre suas velocidades de caminhada?



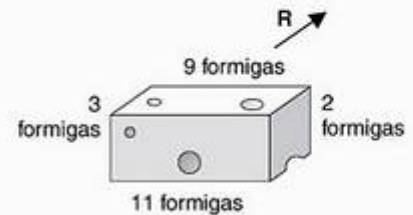
14. Entre animais de forma semelhante, os tamanhos são caracterizados pelo fator de escala L . Determine como a velocidade depende do fator de escala com que esses animais podem correr colina acima.
15. Um avião está voando a 2 km de altura, e no instante em que sua velocidade é 0,1 km/s é solta uma caixa. Determine
 - a) o tempo que a caixa leva para chegar ao solo
 - b) a distância horizontal percorrida pela caixa
 - c) sua velocidade no momento do impacto.
16. Um jogador de beisebol rebate uma bola. No instante em que se separa do taco, ele o faz com um ângulo de elevação de 30° . Outro jogador alcança a bola a 400 m do primeiro. Determine:
 - a) a velocidade inicial da bola
 - b) a altura máxima que ela alcançará
 - c) o tempo durante o qual a bola ficou no ar.
17. Uma pedra é lançada com velocidade de 10 m/s, e ângulo de elevação de 50° . Um ciclista avança no sentido da pedra a uma velocidade de 5 m/s. A que distância do ponto de lançamento deve estar o ciclista para ser atingido?
18. Um rio tem dois atracadouros a 1 km de distância um do outro. De um dos atracadouros duas pessoas vão até o outro e voltam. Uma delas sai num barco a 4 km/h tendo a correnteza a seu favor, com velocidade de 2 km/h. A outra vai caminhando pela beira do rio a 4 km/h. Quanto tempo demora cada pessoa neste percurso de ida e volta?
19. Uma ave migratória está voando a 30 km/h em relação ao ar; há um vento de 12,5 km/h do oeste para leste. Se uma bússola presa à ave assinala rumo ao norte, determine:
 - a) a velocidade da ave em relação à Terra;
 - b) a direção que a bússola deve assinalar para que a ave esteja se dirigindo de fato ao norte;
 - c) qual seria sua velocidade em relação à Terra.
20. Um animal com 200 kg está correndo a 5 m/s. Ao frear bruscamente, ele desliza durante 5 s até parar. Calcule:
 - a) o coeficiente de atrito cinético entre as patas do animal e o chão;
 - b) a distância que o animal percorre deslizando até parar.
21. Quatro ovos são colocados em pé sobre o chão. Cada pé de uma mesa de 20 kg descansa sobre um dos ovos, sem que eles se quebrem. Mostre por que este esforço sobre cada ovo não é suficiente para romper sua casca.



22. Um corpo com 20 kg está sujeito à ação de três forças cujas direções são perpendiculares entre si, sendo a direção de F vertical. As intensidades de T e R são respectivamente 30 N e 40 N. Se:

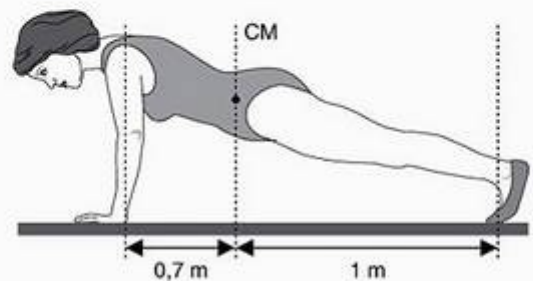
- a) o atrito sobre o corpo fosse desprezível, qual seria a intensidade e direção da força resultante?
- b) queremos que o corpo continue em repouso, qual deverá ser o coeficiente de atrito entre o corpo e a superfície?

23. Um grupo de 25 formigas conduz um pedaço de queijo de forma retangular. O queijo desliza lentamente na direção **R**. Com uma faca, retiramos a fileira de 11 formigas e vemos que o queijo se move mais rapidamente na mesma direção. Considerando que a intensidade da força exercida por cada formiga é aproximadamente a mesma, mostre em que direção age a força exercida por cada formiga, para que o queijo se mova na direção **R**.



24. Qual é o encurtamento que sofre a perna de um homem com 70 kg, quando ele apóia toda sua massa sobre essa perna? Considere que a perna estendida mede 0,9 m, a área da secção média do osso tem 27 cm^2 , e o módulo de Young $1,79 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$.
25. O músculo bíceps de uma pessoa exerce uma força de 600 N. A secção média deste músculo em sua região central tem 50 cm^2 e seus tendões, que estão presos a dois ossos, uma secção reta de $0,5 \text{ cm}^2$. Determine a tensão em cada uma dessas secções.

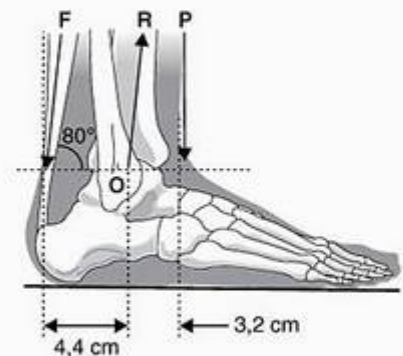
26. Uma atleta com 70 kg está realizando flexões de braço. A projeção de seu centro de massa no chão está a 1 m de seus pés e a 0,7 m de suas mãos. Determine as forças de contato que o solo exerce sobre:



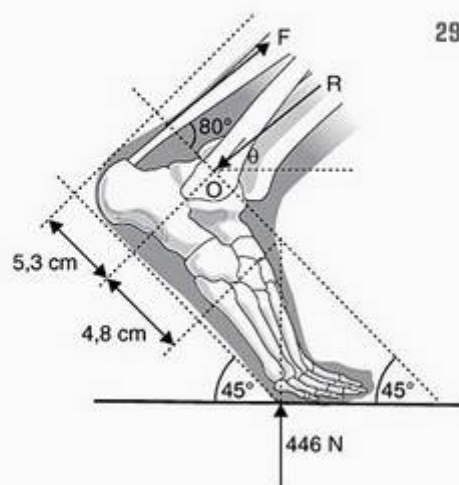
- a) as mãos;
- b) os pés.

27. Um bíceps relaxado exige uma força de 25 N para aumentar de 0,05 m seu comprimento. Quando o músculo está com tensão máxima, são necessários 500 N para se ter a mesma elongação. Considere o músculo como um cilindro sólido de 0,2 m de altura e 0,04 m de raio e determine o módulo de Young nas duas situações.

28. Uma pessoa com 70 kg encontra-se em pé. A projeção vertical de seu centro de massa passa a 3,2 cm à frente da articulação do tornozelo. O músculo da barriga da perna se liga ao tornozelo a 4,4 cm da articulação. Considerando que cada perna suporta metade do peso da pessoa, determine:



- a) a intensidade da força muscular **F**;
- b) a direção da força de contato **R** exercida pela articulação do tornozelo.

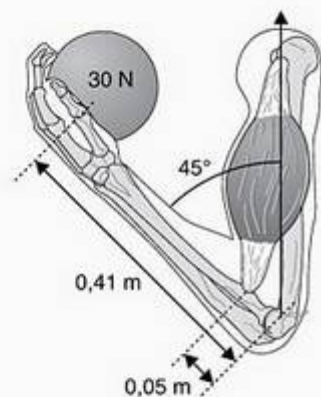


29. Uma pessoa com 91 kg encontra-se agachada, e seu pé inclinado a 45° em relação à horizontal. Determine:

- a intensidade da força muscular F exercida pelo tendão sobre o calcâneo;
- a direção da força de contato R exercida pela articulação do tornozelo.

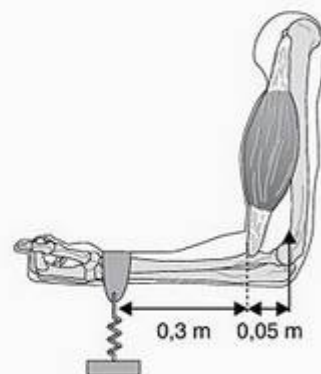
30. Considere uma pessoa com 70 kg em pé e ereta. Determine:

- a massa da cabeça, do tronco, dos membros inferiores e superiores;
- o módulo da força de contato que sustenta a cabeça e o tronco;
- a força que sustenta o braço;
- a força total que exerce o tronco nas articulações dos quadris;
- a força de contato total nas articulações dos joelhos;
- a força de contato na articulação do joelho quando a pessoa se apóia em um dos pés;
- a força na articulação do joelho que sustenta a perna não apoiada no chão. (Sugestão: utilize os dados da Tabela 3.1.)



31. Uma pessoa com 80 kg tem o antebraço formando um ângulo de 45° com o braço, e sua mão sustenta uma esfera de 30 N de peso. Admita que a distância do cotovelo ao centro da esfera é 0,41 m e ao tendão do bíceps 0,05 m. Determine a magnitude da força exercida pelo:

- músculo bíceps;
- cotovelo sobre o antebraço.

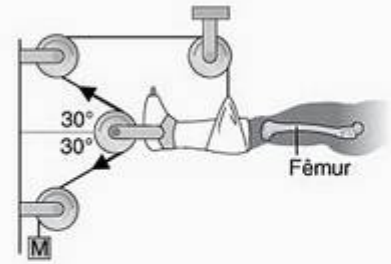


32. Uma pessoa com 70 kg tem presa ao pulso uma mola cujo extremo está a 0,35 m do cotovelo. A pessoa exerce uma força de 374 N para equilibrar a força elástica produzida pela mola. Se o tendão do bíceps está a 0,05 m do cotovelo, quais serão as intensidades das forças exercidas pelo:

- músculo bíceps?
- úmero?

33. O sistema de tração de Russel é utilizado para redução de fratura do fêmur. Se a perna engessada de uma pessoa pesa 40 N, determine a força:

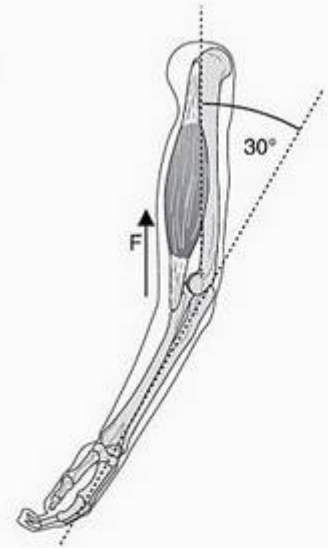
- que o sistema exerce sobre a perna quando sustenta uma massa de $m = 3,6 \text{ kg}$;
- total exercida sobre a perna;
- exercida pela perna sobre o fêmur.



34. Três partículas com 2, 3 e 4 kg estão respectivamente localizadas nos pontos de coordenadas (3 m, 2 m), (1 m, -4 m) e (-3 m, 5 m) de um plano xy. Determine as coordenadas do centro de massa desse sistema.

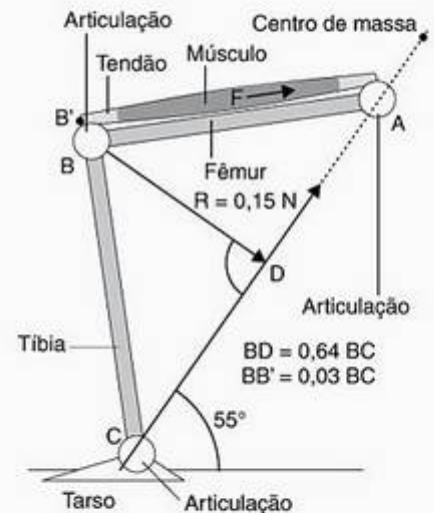
35. Um antebraço está inclinado 30° em relação à direção do braço. O tendão do bíceps exerce sobre o antebraço uma força F com 70 N de intensidade. Determine a intensidade da força:

- estabilizadora (componente da força muscular paralela ao antebraço);
- de sustentação (componente da força muscular normal ao antebraço).



36. Um gafanhoto com 3 g realiza um salto com um ângulo de impulso de 55° . No momento do salto, a configuração típica dos músculos e partes de suas patas aparecem na figura ao lado. Se a área média da secção transversal do músculo é $0,35 \text{ cm}^2$ e do tendão é $0,01 \text{ mm}^2$, determine:

- a intensidade da força muscular F ;
- a tensão no músculo durante o salto;
- a tensão no tendão durante o salto;
- o fator de segurança para evitar a ruptura do tendão, se a tensão máxima que ele pode suportar é $6 \times 10^8 \text{ N/m}^2$.



37. Uma pessoa com 70 kg e 1,80 m de altura encontra-se em pé e ereta. Considere que ela levanta seu membro inferior direito até formar um ângulo de 90° com a direção vertical. Determine o centro de massa desse membro inferior.

38. Uma pessoa com 80 kg e 1,80 m de altura encontra-se em pé e em posição ereta. Utilizando os dados da Tabela 3.1, determine o centro de massa dessa pessoa.

Referências Bibliográficas

1. MAYNARD, Smith J. *Mathematical Ideas in Biology*. Cambridge University Press, 1980.
2. KELLER, J.B. Theory of competitive running. *Physics Today*. v. 26, n. 9, p. 42, Sept, 1973.
3. NAPIER, J. Antiquity of human walking. *Sci. Amer*, v. 216, n. 4, p. 56, 1967.
4. ALEXANDER, R.M. Optimization and gaits in the locomotion of vertebrates. *Physiol. Rev.* v. 69, n. 4, p. 1199-1227, Oct, 1989.
5. ALEXANDER, R.M.; JAYES, A.J. Fourier-analysis of forces exerted in walking and running. *J. Biomech.* v. 13, n. 4, p. 383-390, 1980.
6. TAYLOR, C.R.; ROWNTREE, V.J. Running on 2 or on 4 legs – which consumes more energy? *Science*. v.179, n. 4069, p. 186-187, 1973.
7. TAYLOR, C.R.; SCHMID, T.N.K.; RAAB, J.L. Scaling of energetic cost of running to body size in mammals. *Amer. J. Physiol.* v. 219, n. 4, p. 1104, 1970.
8. KELLER, Op.Cit.
9. RYDER, H.W.; CARR, H.J.; HERGET, P. Future performance in foot racing. *Sci. Amer.* v. 234, n. 6, p.109, June, 1976.
10. ROTHSCHILD, M. et al. Flying leap of flea. *Sci. Amer.* v. 229, n. 5, p. 92-100, 1973.
11. BROWN, R.H.J. Mechanism of locust jumping. *Nature*, v. 214, n. 5091, p. 939, 1967.
12. ZARNACK, W. Biophysical studies of grasshoppers (*locusta-migratoria* L). 1. Movements of forewings. *J. Comp. Physiol.* v. 78, n. 4, p. 356-395, 1972.
13. MARSH, R.L.; JOHN-ALDER, H.B. Jumping performance of hyloid frogs measured with high-speed cine film. *J. Exp. Biol.* v.188, n. P. 131-141, Mar,1994.
14. ALEXANDER, Op. Cit.
15. BONSER, R.H.C. The Young's modulus of ostrich claw keratin. *J. Mater. Sci. Lett.* v. 19, n. 12, p. 1039-1040, Jun, 2000.
16. ALEXANDER, R.M. Tendon elasticity and muscle function. *American Zoologist.* v. 41, n. 6, p. 1379, Dec, 2001.

Capítulo 4

Dinâmica: Vãos, Trabalho, Energia e Potência Mecânica



4.1 INTRODUÇÃO

Inicialmente vamos esclarecer o que entendemos por *massa* de um corpo. Massa é uma propriedade *intrínseca* dos corpos, *independente* da circunstância em que esses estejam, bem como dos agentes externos ou do tipo de força utilizado para medi-la. Essa grandeza *descreve* o quanto um corpo pode ser acelerado sob a ação de uma força externa. A massa está diretamente relacionada à propriedade física dos corpos denominada *inércia*. No Sistema Internacional (SI), sua unidade de medida é o quilograma (kg) e, no sistema CGS (cm, grama, segundo), o grama (g), tendo-se a equivalência $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$. Assim, se uma força $\mathbf{F}$ produz uma aceleração $a_1 = 1 \text{ m/s}^2$, em um corpo com massa $m_1 = 1 \text{ kg}$, essa mesma força produzirá uma aceleração $a_2 = 2 \text{ m/s}^2$ em um corpo de massa $m_2 = 0,5 \text{ kg}$. De fato,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow m_2 = m_1 \frac{a_1}{a_2} = 0,5 \text{ kg}.$$

A 2ª lei do movimento, ou 2ª lei de Newton, diz: *Qualquer que seja a força $\mathbf{F}$ que aja sobre um corpo de massa m , a aceleração resultante da ação dessa força será igual a $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$* . Esta lei fundamental que rege os fenômenos dinâmicos tem o seguinte enunciado: *Um corpo terá um movimento acelerado quando uma força resultante não-nula agir sobre ele*. A direção da força resultante $\mathbf{F}$ e a da aceleração $\mathbf{a}$ são as mesmas, e suas magnitudes são proporcionais.

$$\therefore \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(d\mathbf{v}/dt) = d(m\mathbf{v})/dt = d\mathbf{p}/dt. \quad (4.1)$$

Aqui, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ é definido como a *quantidade de movimento* ou momento linear do corpo de massa m . A equação (4.1) também pode ser enunciada da seguinte maneira: *A força resultante $\mathbf{F}$ que age sobre um corpo de massa m é igual à taxa de variação de seu momento linear $\mathbf{p}$* . Definimos a quantidade $\int \mathbf{F} \cdot dt$ como *impulso*, e ela será igual à variação da quantidade do movimento do corpo.

♦ Podemos definir o *peso* $\mathbf{P}$ de um corpo com massa m como a força de atração que a Terra exerce sobre o corpo, ou seja, $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$. O vetor $\mathbf{P}$ tem direção vertical em sentido ao centro da Terra. Como a aceleração $\mathbf{g}$, devido à gravidade, é constante, o peso será proporcional à massa m .

Como o peso é uma força, sua unidade de medida no SI será o Newton e, no sistema CGS, a dina.

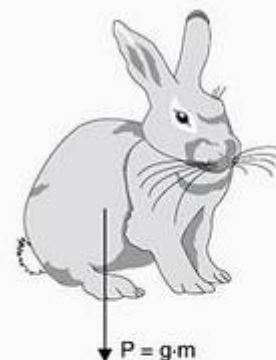


Figura 4.1 O peso é uma força cuja magnitude é proporcional à massa.

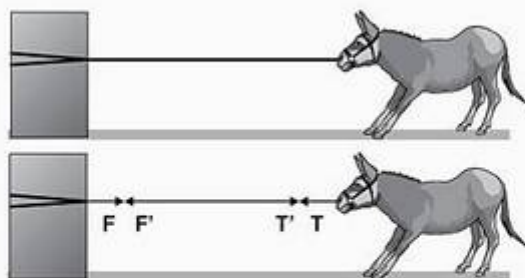


Figura 4.2 No sistema formado por um bloco, uma corda e um animal, as forças F , F' e T , T' formam pares ação-reação.

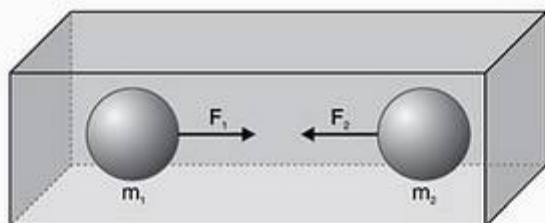


Figura 4.3 Corpos de massa m_1 e m_2 dentro de um sistema isolado. O momento total $p_1 + p_2$ se conservará.

♦ A 3ª lei do movimento de Newton diz: *A cada ação se opõe sempre uma reação igual*, ou seja, as ações mútuas de dois corpos são sempre iguais e dirigidas em sentidos contrários. Na Figura 4.2 temos F , força exercida pela corda sobre o bloco, F' , força exercida pelo bloco sobre a corda, T' , força exercida pelo animal sobre a corda e T , força exercida pela corda sobre o animal. As forças F , F' e T , T' formam pares de ação e reação, ou seja, $F = -F'$ e $T = -T'$.

Quando dois corpos em movimento estão isolados, de modo que as únicas forças existentes são as que um corpo exerce sobre o outro e vice-versa, então pela 3ª lei do movimento, $F_2 = -F_1$ ou $F_1 + F_2 = 0$, como se vê na Figura 4.3. Aqui, $F_1 = dp_1/dt$ é a força que atua sobre o 1º corpo (ou ação), e $F_2 = dp_2/dt$ é a força que atua sobre o 2º corpo (ou reação).

$$\therefore \frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = \frac{d}{dt} (p_1 + p_2) = 0.$$

Ou seja, a taxa de variação de $p_1 + p_2$ é nula; logo, $p_1 + p_2 = \text{constante}$. Isso significa que, em sistemas isolados, a quantidade de movimento total, devido aos corpos dentro do sistema, se conservará.



4.2 DINÂMICA DOS MOVIMENTOS AÉREOS DOS ANIMAIS

A *dinâmica* desenvolvida pelos animais (pássaros, insetos, morcegos, etc.) que realizam *movimentos aéreos* para se locomover permite classificar tais movimentos em:

- ♦ pára-quedismo;
- ♦ planeio; e
- ♦ vôo propulsivo.

O pára-quedismo e o planeio não são movimentos de vôo na forma tradicionalmente conhecida. Estes movimentos resultam do deslocamento do animal no ar, quando ele segue uma *trajetória descendente vertical* (caso do pára-quedismo) ou uma *trajetória ascendente e/ou descendente retilínea* (caso do planeio). Exemplos de animais que realizam estes movimentos são o galeopiteco da Malásia (pára-quedismo), o sapo voador de Bornéu (pára-quedismo), a lagartixa voadora (planeio), o esquilo voador (planeio), etc. A capacidade desses animais para voar deve-se ao *patágio*, uma espécie de membrana que se desenvolve em determinadas partes do corpo do animal e que pode se abrir como *asa*, funcionando como um pára-quedas quando o animal salta de um local para outro. Na Figura 4.4 mostramos um *esquilo voador*, com o *patágio* ligando os membros de cada lado de seu corpo.



Figura 4.4 Esquilo voador.

Nesses movimentos a *resistência do ar* se manifesta como uma força F_a conhecida como força *resistiva* ou força de *arraste*, cuja magnitude é proporcional a v^n , sendo v a velocidade do animal. Normalmente $n \cong 1$ para baixas velocidades, ou $n \cong 2$ para altas velocidades. Como consequência dessa força, a *aceleração do movimento é variável*.

A Figura 4.5a mostra um corpo com massa m , submetido a *movimento vertical*. Pela 2ª lei do movimento,

$$m \cdot a = m \cdot g - F_a, \text{ ou } m \cdot a = m \cdot g - \kappa v_z^n, \text{ portanto}$$

$$\blacktriangleright \quad dv_z/dt = g - (\kappa/m) v_z^n, \quad (4.1)$$

onde κ é uma constante que depende das dimensões do corpo em movimento e das características do meio sendo v_z a velocidade instantânea. Se no início do movimento $v_z = 0$, então $F_a = 0$ implica aceleração inicial $a_0 = g$.

Quando v_z aumenta, F_a também aumenta. No instante em que $F_a = m \cdot g$, teremos $a = 0$, e a velocidade deixará de aumentar.

Se o movimento é realizado com *baixa velocidade* ($n \cong 1$), quando $a \rightarrow 0$, então v_z tende a um valor constante $v_L = mg/\kappa$. O valor de v_z em qualquer instante é determinado a partir da equação (4.1)

$$\frac{dv_z}{v_z - v_L} = -\frac{\kappa}{m} dt \Rightarrow v_z = v_L [1 - e^{-\kappa t/m}],$$

$$\therefore a = \frac{dv_z}{dt} = g e^{-\kappa t/m}.$$

As Figuras 4.5b e 4.5c mostram, respectivamente, como a velocidade e a aceleração variam com o tempo.

Quando o corpo em queda experimenta uma força resistiva do tipo $F_a = \kappa v_z^2$, então pela 2ª lei do movimento teremos

$$dv_z/dt = g - (\kappa/m) v_z^2,$$

se no início do movimento $v_z = 0$ e definindo-se uma velocidade terminal $v_T = (mg/\kappa)^{1/2}$, o valor de v_z em qualquer instante será determinado integrando-se a seguinte equação

$$\frac{dv_z}{v_T^2 - v_z^2} = \frac{\kappa}{m} dt,$$

$$\therefore v_z = v_T (e^{2t/\tau} - 1) / (e^{2t/\tau} + 1), \quad \tau = (m/\kappa g)^{1/2} \text{ é um tempo de relaxação.}$$

Aplicação: Movimento de pára-quedismo

Um animal de massa m , com *movimento* na direção z , experimenta, devido ao fluxo de ar, uma *força resistiva*

$$F_a = \kappa \eta \cdot \rho \cdot A_{\perp} \cdot v_z^n,$$

onde κ é uma constante que depende das características do pára-quedas, η e ρ são, respectivamente, a viscosidade e a densidade do meio em que se encontra o

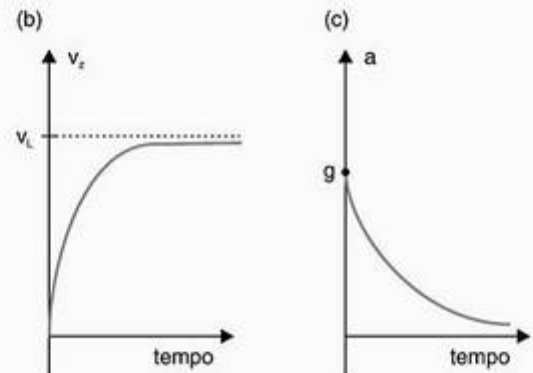
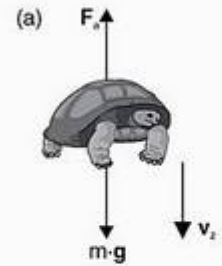


Figura 4.5 a) Um corpo com massa m experimenta uma força de arraste F_a ; b) no caso de baixas velocidades, v_z tende a um valor limite v_L ; c) a aceleração $a \rightarrow 0$ quando $F_a \rightarrow m \cdot g$.

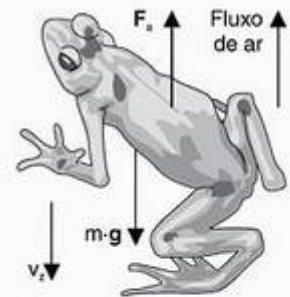


Figura 4.6 Um sapo voador de Bornéu realizando um movimento vertical de pára-quedas.

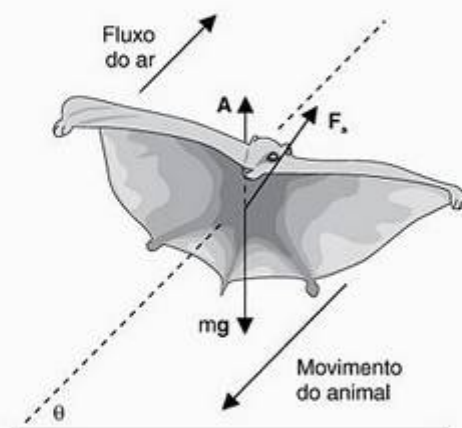


Figura 4.7 O galeopiteco da Malásia planando. Graças a seu patágio, ele pode planar mais de 100 metros.

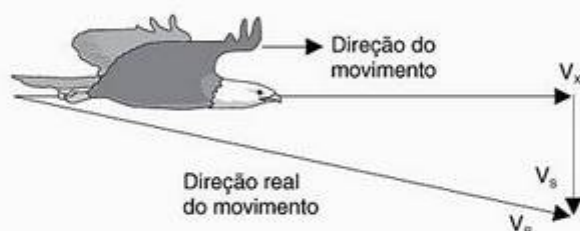


Figura 4.8 Ave deslocando-se para frente com velocidade de planeio $V_R = V_x + V_s$.

animal, $A_{\perp}$ é a área da seção do pára-quedas que é perpendicular à direção do fluxo do ar e n é um parâmetro cujo valor depende da velocidade do animal. Na Figura 4.6, mostramos um sapo com movimento de pára-quedas. A membrana que atua como pára-quedas está desenvolvida em seus membros superior e inferior.

2ª Aplicação: Movimento de planeio

No movimento de planeio, um animal com massa m tem uma trajetória linear inclinada com ângulo θ em relação à direção horizontal. Este ângulo é denominado *ângulo de planeio*. Na Figura 4.7, mostramos um animal planando. Sobre o animal age uma força aerodinâmica A , resultante da composição das forças de arraste F_a e de sustentação F_s . Esta última tem como origem a diferença de pressões do ar nas partes superior e inferior do planador,

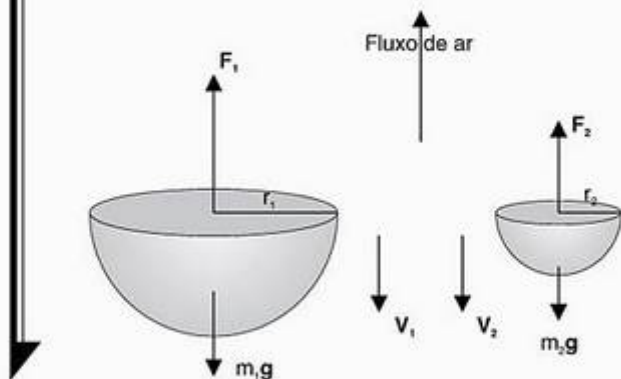
$$\therefore A = F_a + F_s.$$

O movimento de um animal voador será de pára-quedismo ou de planeio se $F_s \ll F_a$ ou $F_s \gg F_a$, respectivamente. Eventualmente, quando $F_s > F_a$, o movimento poderá ser de planeio. Neste movimento, enquanto o animal está se deslocando para frente com velocidade V_x , sua altura vai diminuindo com uma velocidade V_s . A relação V_x/V_s é denominada *razão de deslizamento*. A Figura 4.8 mostra que, nesta situação, a velocidade de planeio do animal será

$$V_R = V_x + V_s.$$

Exemplo: Considere dois pára-quedas feitos do mesmo material, com formas semi-esféricas e raios r_1 e r_2 , respectivamente. Se $r_1 = 2r_2$ e a área efetiva de cada pára-quedas é $A = \pi \cdot r^2$, então determine a razão entre:

- As forças de resistência do ar sobre cada pára-quedas, quando eles caem verticalmente com a parte plana voltada para cima.
- Os expoentes das velocidades de cada pára-quedas, quando ambos caírem com a mesma velocidade constante v_0 .



Resolução: Devido ao ar, as intensidades da força de resistência sobre cada pára-quedas serão

$$F_1 = \kappa_1 \eta \cdot \rho \cdot A_1 \cdot v_1^{n_1}$$

$$F_2 = \kappa_2 \eta \cdot \rho \cdot A_2 \cdot v_2^{n_2}.$$

- Como ambos os pára-quedas se movem no ar, eles experimentam o mesmo η e ρ . Por ser $r_1 = 2r_2$, as áreas efetivas dos pára-quedas estarão na razão $A_1 = 4A_2$; logo,

$$\frac{F_1}{F_2} = 4 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \frac{v_1^{n_1}}{v_2^{n_2}}.$$

b) Quando ambos os pára-quadras estão caindo com a mesma velocidade constante v_0 , teremos

$$F_1 = m_1 g \quad \text{ou} \quad v_0^{n_1} = m_1 g / \kappa_1 \eta \cdot \rho \cdot A_1$$

$$F_2 = m_2 g \quad \text{ou} \quad v_0^{n_2} = m_2 g / \kappa_2 \eta \cdot \rho \cdot A_2.$$

Por outro lado:

$$m_1 g \propto (1/2) 4\pi r_1^3 / 3 \quad \text{e} \quad m_2 g \propto (1/2) 4\pi r_2^3 / 3 \Rightarrow m_1 = 8m_2.$$

$$\therefore v_0^{n_1 - n_2} = 2\kappa_2 / \kappa_1 \rightarrow n_1 = n_2 + \log(2\kappa_2 / \kappa_1) / \log(v_0).$$

Se $\kappa_1 \approx \kappa_2$ e, como $v_0 > 0$, então: $n_1 > n_2$.



4.3 VÔOS PROPULSIONADOS

Nesse tipo de movimento, os animais realizam um *trabalho*. O vôo de um animal depende da *forma de seu corpo inteiro*, da *forma de suas asas*⁽¹⁾ e de sua direção de batimento. Em geral, a *maioria das aves* é voadora, e o tamanho das asas é importante para a eficiência do movimento no ar. Na Figura 4.9 pode-se ver diferentes tamanhos de asas de aves de rapina. Os animais que *voam* podem fazê-lo de duas maneiras: batendo as asas ou planando. Os principais músculos do vôo estão ligados ao grande osso peitoral; são eles que realizam a maior parte do *trabalho* para o animal levantar vôo, fazer manobras ou pousar.



Figura 4.9 a) Grandes asas permitem alcançar grandes alturas; daí em diante é possível voar longas distâncias sem mover as asas e com pouco esforço;
b) asas menores permitem subir muito com velocidade;
c) asas estreitas permitem alcançar grande velocidade.

A forma geométrica e a estrutura das asas permitem que uma ave se eleve durante o vôo, quando o ar sopra sobre sua parte superior⁽²⁾. Além disso, quanto maior a velocidade do ar sobre a asa, mais ela sobe, ou seja, é maior sua *suspensão*. O peso do corpo comparado à suspensão da asa forma a relação *carga-asa*. Quando essa proporção está equilibrada, o animal *plana*.



Figura 4.10 Devido a sua forma geométrica, quando a asa adquire mais velocidade, o ar causa uma queda de pressão.

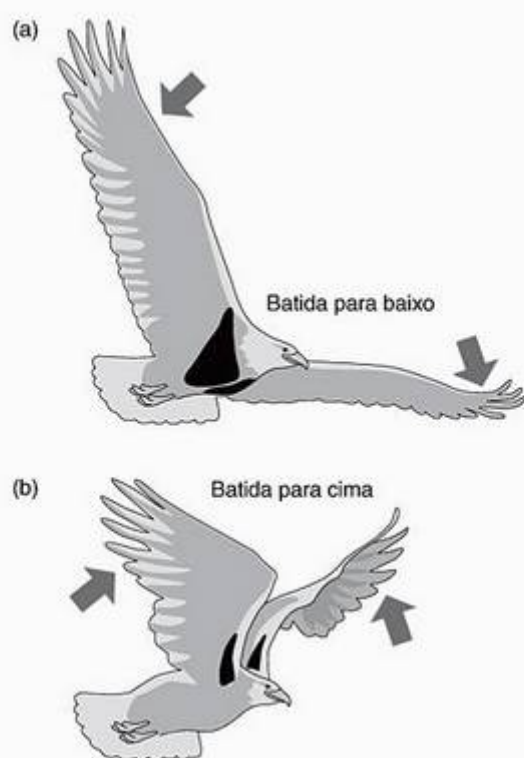


Figura 4.11 Nas aves voadoras, os músculos que movimentam as asas para baixo (a) são maiores que os músculos que as movimentam para cima (b).



Figura 4.12 Quando uma ave voa, para ser mais veloz, ela vira as bordas frontais das asas na direção do vento para *cortar* o ar.

A Figura 4.10 é um esquema simplificado da forma da asa das aves. Dependendo da forma, a asa *aumenta* a magnitude da força de sustentação F_s e *diminui* a da força de arraste F_a . A pressão do ar na parte superior da asa é menor do que na inferior; logo, a velocidade V_s na parte superior é maior do que a velocidade V_i na parte inferior. Já nos extremos A e B da asa, a pressão é a mesma; logo, a velocidade V_0 nesses pontos será igual. Assim, a asa se deslocará da região de pressão mais alta para a região de pressão mais baixa. Esse deslocamento propicia elevação e propulsão da ave.

Uma ave pode voar mais rápido ou mais devagar, mudando a posição das asas⁽³⁾. Para ser *mais veloz*, ela vira as bordas frontais na direção do vento, *cortando* o ar (como se vê na Figura 4.12).

Para *diminuir a velocidade*, ela volta a superfície da asa *contra* o vento; assim, as asas *resistem* ao ar. A ave em vôo, ao *agitar* as asas, obtém um impulso maior, provocado pelas batidas de cima para baixo. Como sugere a Figura 4.11, os músculos que impelem as asas para baixo são muito maiores do que os músculos que movimentam as asas para cima. Tais músculos são de grande importância no vôo. Quando a ave está voando, a interação da asa com o fluxo de ar desenvolve uma *força de arraste* (F_a) e uma *força de sustentação* (F_s) perpendicular a F_a . A resultante dessas forças é denominada *força aerodinâmica A*.

Uma representação bastante aproximada das principais forças que agem sobre uma ave em vôo aparece na Figura 4.13. Notamos que a *força aerodinâmica A*, resultante da composição das forças F_s e F_a , em casos favoráveis, quando o vôo é ascendente e para frente, pode ser considerada como a composição $A = F_{vs} + F$, onde F_{vs} é o componente vertical de F_s , e F é a força de impulso. A *condição mais favorável para voar* é $F_s \gg F_a$. Isso quer dizer que a força A está orientada para cima e para frente.

Toda ave, para *iniciar o vôo* e ganhar altitude, bate vigorosamente as asas. Assim, a força aerodinâmica A muda continuamente sua direção e magnitude. Esse movimento faz com que o ar flua com mais rapidez sobre a asa; assim a ave se eleva mais facilmente no ar. Durante o ciclo em que a ave bate as asas, *várias forças contrárias ao vôo* podem agir momentaneamente sobre elas. A Figura 4.14 mostra algumas dessas forças: R é uma força que age nos extremos laterais das asas, S é uma força orientada para baixo que age no extremo inferior das asas, T é uma força orientada para trás que age na

parte superior das asas, F é uma força de empuxo orientada para frente que age no extremo inferior das asas.

Assim, em pleno vôo, durante uma batida das asas, a força aerodinâmica que age sobre sua plumagem e também sobre

- ♦ seu membro superior é $A_s = F_{vs} + T = F_s + F_a$
- ♦ o segmento de sua mão é $A_i = F + S = F_s + F_a$

onde as forças de suspensão F_s e de arraste F_a (não representadas na Figura 4.14) são aquelas já definidas na Figura 4.13.

Quando uma ave está voando com *velocidade constante*, a média das forças que agem sobre ele durante várias batidas de suas asas implica as seguintes condições

$$F_{vs} = \text{peso} = m \cdot g \text{ e}$$

$$F - T = F_{at} = \text{força de arraste total.}$$

Em vôo *horizontal uniforme*, ou de nível, como se vê na Figura 4.15 a, as forças S e T não são importantes,

$$\therefore F_{vs} = -m \cdot g \text{ e } F = -F_{at}.$$

Para um vôo ser *ascendente* e acelerado após o vôo horizontal como se vê na Figura 4.15b, devemos ter as resultantes

$$f_v = F_{vs} - m \cdot g \text{ e } f_h = F - F_{at}.$$

Assim, a ave é *acelerada* pela força

$$F_R = f_v + f_h.$$

Durante o vôo, no intervalo de tempo em que as asas ficam sem movimento, as magnitudes de F_s e F_a aumentam até que o ângulo de ataque $\alpha^{(5)}$, ou seja, o ângulo entre a direção instantânea das asas e do fluxo do ar, atinja um valor ótimo α_0 . Na Figura 4.16, mostramos uma ave voando e a direção das asas no espaço em três instantes diferentes.

Se A é a área máxima da asa (olhando o animal por cima) e q , a pressão dinâmica do ar, definimos os *coeficientes polares de sustentação e de arraste*, respectivamente, como

$$C_s(\alpha) = F_s/Aq \quad ; \quad C_a(\alpha) = F_a/Aq.$$

O estudo da *aerodinâmica do vôo* das aves é feito observando-se a variação dos coeficientes $C_s(\alpha)$ e $C_a(\alpha)$ com o ângulo de ataque α . Os gráficos resultantes são denominados *curvas polares*. Já o gráfico $C_s(\alpha) = f(C_a(\alpha))$ é denominado *aerodinâmica polar* ou, simplesmente, *polar*. A forma dessa curva é determinada pela turbu-

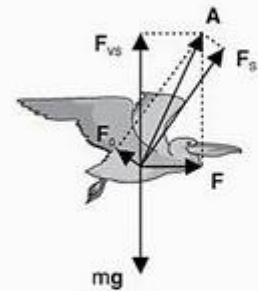


Figura 4.13 A força aerodinâmica A , sobre uma ave voadora, depende das forças de impulso, de sustentação e de arraste.

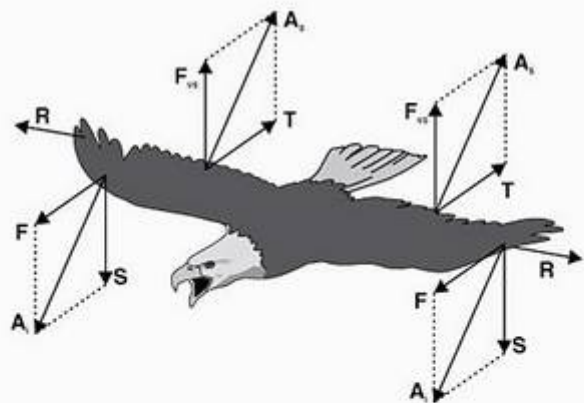


Figura 4.14 Algumas forças contrárias ao vôo que agem quando a ave bate as asas⁽⁴⁾, S , para baixo; T , para trás; F , para frente; R , força lateral, sendo que A é uma força aerodinâmica resultante.

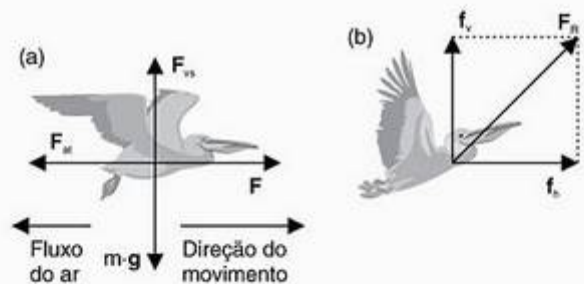


Figura 4.15 a) Em vôo *horizontal uniforme*, as forças nas direções horizontal e vertical se equilibram; b) em vôo *ascendente*, o desequilíbrio das forças origina uma força aceleradora F_R .

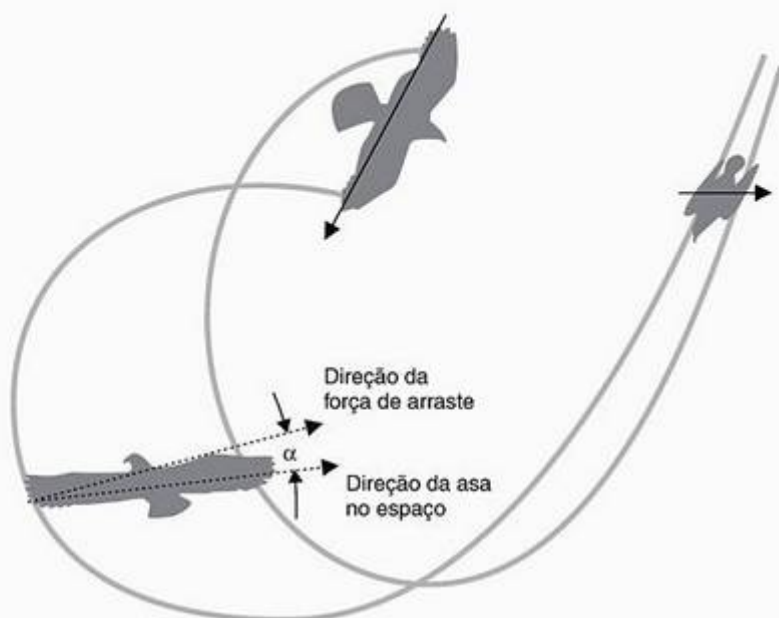


Figura 4.16 Quando uma ave está voando, o ângulo instantâneo α , entre as direções das asas e do fluxo de ar, é definido como ângulo de ataque ou ângulo de incidência.

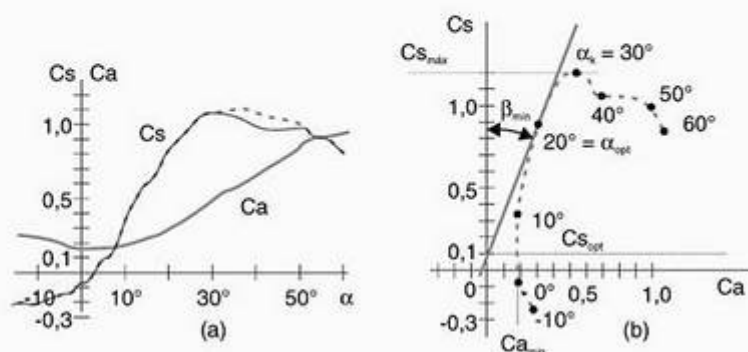


Figura 4.17 a) Curvas polares; e
b) aerodinâmica polar, ou polar, para o caso de voo de um pardal. Extraído de Kempf et. al⁽⁷⁾.

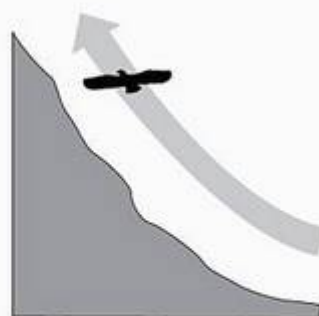


Figura 4.18 Uma águia utilizando uma corrente plano inclinado.

lência do meio em que a ave está voando e pela geometria das asas. A asa combina grandes possibilidades de valores $C_s(\alpha)$ com poucas possibilidades para valores $C_a(\alpha)$. A Figura 4.17a mostra as *curvas polares* correspondentes às asas de um pardal⁽⁶⁾. Notamos que, neste caso, $C_s(\alpha)$ pode ser *negativo*, enquanto $C_a(\alpha)$ é sempre *positivo*; isso é consequência da variação dos vetores F_s e F_a durante o voo. A Figura 4.17b mostra a *polar* $C_s(\alpha) = f(C_a(\alpha))$ e permite determinar o *valor máximo* de $C_s(\alpha)$ e o *valor mínimo* de $C_a(\alpha)$. Neste gráfico, a tangente traçada a partir da origem das coordenadas à polar forma um ângulo β_{min} com o eixo vertical. Esse ângulo define um valor para a razão C_s/C_a , que é o inverso da *razão de planeio*⁽⁸⁾.

Essa tangente à polar define o ângulo de ataque α_{opt} . Esse valor de α significa que a ave pode realizar, de uma determinada altura, um *longo planeio* até alcançar o chão. A forma da polar e a eficiência aerodinâmica de planeio, ou batimentos de asas, são determinados pela turbulência do meio e pela geometria da asa. As asas de um aeroplano têm forma arqueada e curvatura análoga às asas das aves de voo rápido.

Para ganhar altitude sem, necessariamente, usar sua energia interna, a maioria das aves voadoras (exceto os insetos)⁽⁹⁾ aproveita as correntes de ar. O vento, ao soprar em direção a uma montanha ou a uma colina, normalmente cria uma corrente chamada *plano inclinado para cima*. A Figura 4.18 mostra uma águia aproveitando esse tipo de corrente.

Outro tipo de corrente muito utilizado são as *termas* formadas quando o sol aquece o ar próximo ao chão. Na Figura 4.19 mostramos que o ar quente, por ser menos denso, sobe, produzindo uma corrente ascendente na qual a ave pode flutuar. Quando a terma é grande, a ave pode alcançar até 5 km de altura.

Em vôos a *grandes distâncias* a ave costuma ganhar altura utilizando os *gradientes térmicos* e, posteriormente, desliza na direção desejada com um consumo

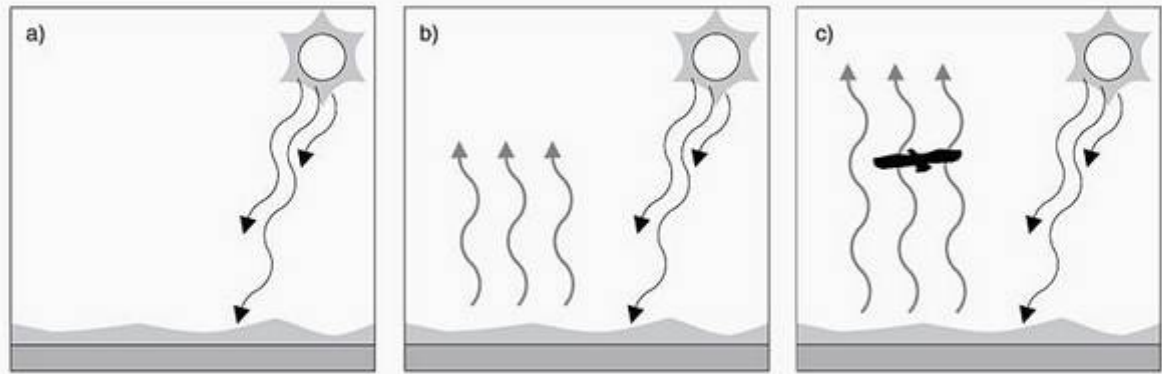


Figura 4.19 a) O ar próximo ao solo é aquecido e
b) começa a subir;
c) o animal entra nesta corrente e flutua.

mínimo de sua energia interna. Além disso, quando a ave está voando, e o ar não está calmo, ela pode ganhar altitude adquirindo uma energia potencial (que é proporcional à altura ganha).

Quando o ar tem movimento ascendente, como uma *rampa plana*, a ave também costuma se deslocar em movimento de ziguezague para frente e para trás, como se vê na Figura 4.20a. Quando há *convergência de duas massas de ar*, que produz uma linha de ar frontal elevada, a ave se movimenta preferencialmente ao longo dessa linha (como se vê na Figura 4.20b). Se o movimento do ar for ascendente, porém com trajetória ondulatória, o movimento da ave será por baixo da parte lateral ou simplesmente de ziguezague⁽¹⁰⁾.

Aves como os patos, gansos, marrecos e outros, quando estão migrando, voam obliquamente, o que, provavelmente, está relacionado com seu consumo de energia. A fase observada nos batimentos das asas dessas aves, que voam em formação, tem sido proposta como necessária para economizar energia.

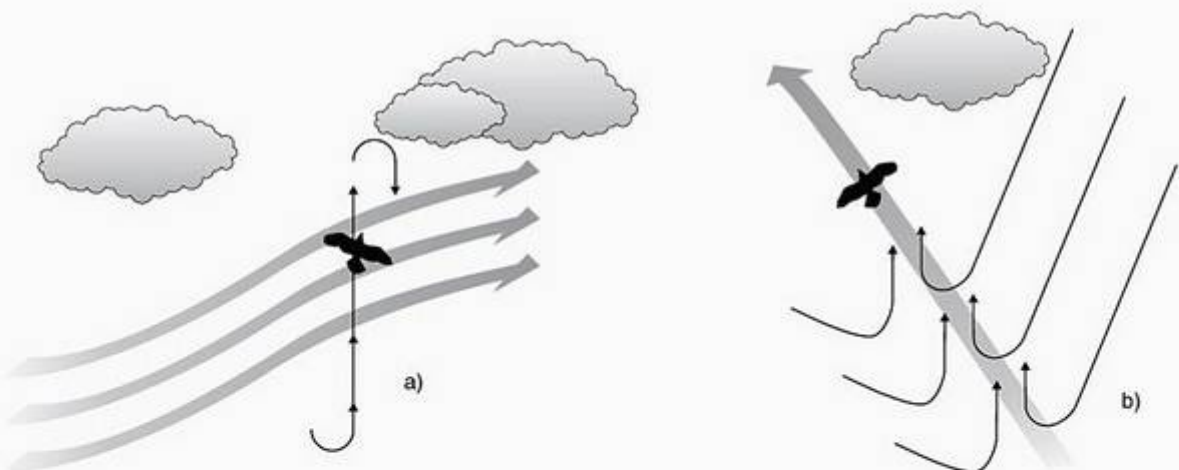
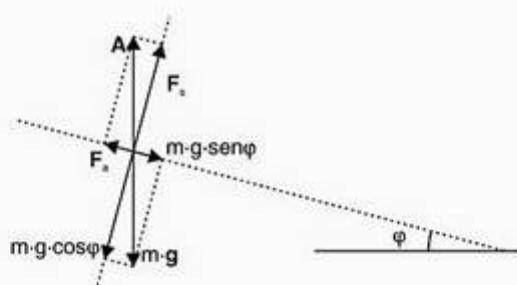
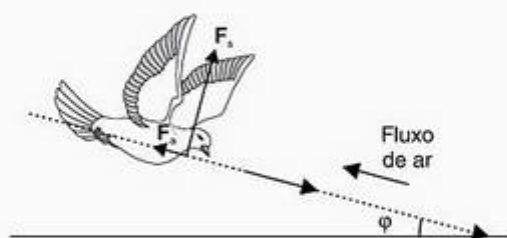


Figura 4.20 a) Com uma corrente de ar com movimento ascendente, a ave se desloca em movimento de ziguezague.
b) A convergência de duas massas de ar produz uma linha frontal elevada, que o animal utiliza para se movimentar.



Exemplo: Um pássaro com massa m está planando com

ângulo φ e velocidade constante v_0 . Se a força de arraste F_a tem intensidade κv_0 , então qual deverá ser:

- a intensidade da força aerodinâmica A ?
- a relação entre a intensidade de A e o ângulo de planeio?

Resolução:

- Por definição, a força aerodinâmica é a resultante das forças de sustentação F_s e de arraste F_a , ou seja,

$$A^2 = F_s^2 + F_a^2.$$

Como o pássaro se movimenta com velocidade constante, então

$$F_s = m \cdot g \cdot \cos \varphi \text{ e } F_a = m \cdot g \cdot \sin \varphi.$$

Logo,

$$A^2 = (m \cdot g)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \Rightarrow A = m \cdot g.$$

- Como κv_0 é a magnitude da força de arraste, então

$F_a = m \cdot g \cdot \sin \varphi$ ou $\kappa v_0 = A \sin \varphi \Rightarrow A = \kappa v_0 / \sin \varphi$.
quando φ aumenta, a intensidade da força aerodinâmica decresce.

Exemplo: Uma gaivota com 1,2 kg está *flutuando* a uma altura de 5 m em

relação à superfície do mar. Ela vê um peixe e, para capturá-lo, tem de *planar* com ângulo de 30° em relação à superfície do mar. Considerando que a gaivota experimenta, devido à resistência do ar, uma força constante de 2 N e que a direção dessa força é paralela à superfície do mar, determine

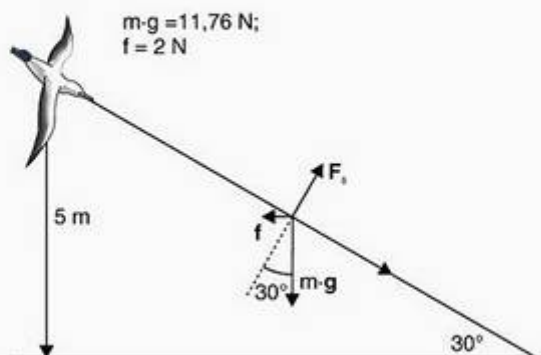
- a força de sustentação do animal;
- a força de arraste total; e
- o tempo que a gaivota demora para chegar até o peixe.

Resolução:

- A força de sustentação F_s está em equilíbrio com a soma de componentes do peso e da força de resistência do ar, ou seja,

$$F_s = m \cdot g \cdot \cos 30^\circ + f \cdot \sin 30^\circ = 11,18 \text{ N.}$$

- A força de arraste é $F_a = f \cdot \cos 30^\circ = 1,73 \text{ N.}$



c) A força resultante na direção do movimento será

$$F_r = m \cdot g \cdot \sin 30^\circ - F_a = 4,15 \text{ N.}$$

Logo, pela 2ª lei do movimento, a aceleração da gaivota enquanto está *planando* é

$$a = F_r / m \cdot g = 0,353 \text{ m/s}^2.$$

Como o espaço a ser percorrido pela gaivota para chegar até o peixe é

$$d = 5 \text{ m} / \sin 30^\circ = 10 \text{ m,}$$

então, o tempo empregado para alcançar a superfície do mar será $t = 2d/a = 56,7 \text{ s}$.

Exemplo: Uma águia com 5 kg está voando a velocidade constante, seguindo uma trajetória horizontal. O ângulo formado por suas asas estendidas e a direção do fluxo de ar são tais que o coeficiente de sustentação é $C_s = 0,8$ e o de arraste é $C_a = 0,2$. Quais serão o *módulo e direção* da força

a) aerodinâmica sobre o animal?

b) devido ao impulso produzido pelas asas?

Resolução: Da definição dos coeficientes C_s e C_a temos

$$\frac{C_s}{C_a} = \frac{F_s}{F_a} = \frac{0,8}{0,2} = 4.$$

Como o movimento tem velocidade constante,

$$F_s = m \cdot g = 49 \text{ N.}$$

a) A força aerodinâmica sobre o animal tem módulo

$$A^2 = F_s^2 + F_a^2 = F_s^2 + (F_s / 4)^2 = 50,51 \text{ N}$$

e direção

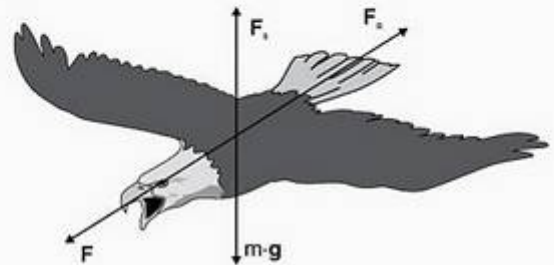
$$\phi = \text{tg}^{-1}(F_s/F_a) = \text{tg}^{-1}(F_s/F) = \text{tg}^{-1}(4) = 76^\circ.$$

Notamos que essa direção é muito próxima da vertical, o que seria de se esperar. Se o fluxo do ar tivesse alguma influência no voo, a direção de **A** se afastaria da vertical.

b) A força de impulso produzida pelas asas será

$$F = F_a = F_s/4 = 12,25 \text{ N}$$

e sua direção será horizontal com sentido contrário a F_a . Neste exemplo, nota-se que, como $C_s \gg C_a$, as forças aerodinâmica e de sustentação têm aproximadamente as mesmas intensidades, enquanto a força de impulso é relativamente pequena.





4.4 TRABALHO, ENERGIA CINÉTICA E POTÊNCIA

Toda atividade dos seres vivos *consome energia*. Dependendo da atividade realizada, muitas vezes o consumo pode ser quantificado. Como a energia se apresenta sob várias formas, há vários métodos para quantificá-la. Já vimos que atividades como caminhar, correr, saltar, voar, etc. geralmente dependem da ação de *forças externas*. Estas *forças* realizam trabalho mecânico que, por sua vez, se transformará em outras formas de energia que serão utilizadas para realizar várias atividades.

Teorema trabalho-energia

Um corpo com massa m , ao *se movimentar* devido à ação de uma força externa $\mathbf{F}$, experimentará uma aceleração $\mathbf{a}$. Quando o corpo se desloca de (1) $\rightarrow$ (2), como se vê na Figura 4.21, $\mathbf{F}$ realiza um *trabalho* W , cuja magnitude é dada pela expressão

$$\mathbf{W} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = F \cdot d \cdot \cos \theta. \quad (4.2)$$

Fazendo uma *análise cinemática* do movimento desse corpo e utilizando as equações (4.1) e (3.10), teremos

$$\mathbf{W} = m \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = \frac{1}{2} m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_i^2, \quad (4.3)$$

onde v_i e v_f são, respectivamente, as velocidades do corpo em (1) e (2).

Se definimos a variável física $K = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ como a *energia cinética* de um corpo com massa m e velocidade v , a equação (4.3) poderá ser escrita em função de K , da forma

$$\mathbf{W} = K_f - K_i = \Delta K. \quad (4.4)$$

K_i e K_f são, respectivamente, as energias cinéticas do corpo em (1) e (2), e ΔK é a variação dessa forma de energia. A equação (4.4) é conhecida como o *teorema do trabalho-energia*, e a interpretamos como *trabalho = variação da energia cinética*. No SI a unidade do trabalho e/ou da energia cinética é denominada Joule (J), sendo definida como $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \times 1 \text{ m}$. No sistema CGS o erg é definido como $1 \text{ erg} = 1 \text{ dina} \times 1 \text{ cm}$, $\therefore 1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg}$.

Note que o *valor máximo* de W ocorre quando $\mathbf{F}$ e $\mathbf{d}$ são paralelos, ou seja, $\theta = 0^\circ$. Já o *valor mínimo* ocorre quando $\mathbf{F}$ e $\mathbf{d}$ são antiparalelos, ou seja, $\theta = 180^\circ$. Quando $\mathbf{F}$ é perpendicular a $\mathbf{d}$, ou seja, $\theta = 90^\circ$, não é realizado trabalho algum.

Em geral, se $d\mathbf{r}$ é o deslocamento de um corpo, devido à ação de uma força externa $\mathbf{F}$, então será realizado um pequeno trabalho, $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. O corpo então desenvolverá uma *potência* instantânea P , definida como

$$\mathbf{P} = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (4.5)$$

A unidade da potência no SI é denominada watt (W), definida como

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}.$$

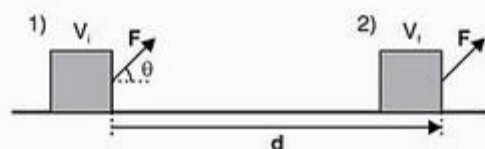
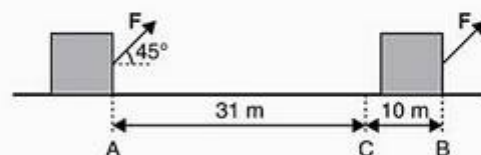


Figura 4.21 O corpo com massa m movimenta-se ao longo de uma distância d , devido à ação da força externa $\mathbf{F}$.

Exemplo: Uma força com intensidade constante, mas inclinada a 45° , é aplicada a um bloco de 10 kg. O bloco se movimenta com aceleração constante de $5,1 \text{ m/s}^2$. O coeficiente de atrito μ entre o bloco e a superfície é 0,5. Determine

- a intensidade da força F ;
- o trabalho total, quando o bloco se desloca de A até B; e
- a energia cinética do bloco em C, e sua velocidade em B.



Resolução:

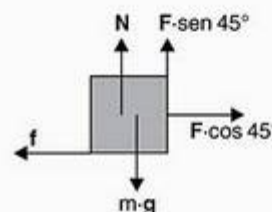
- As forças que agem sobre o bloco satisfazem as relações

$$\blacktriangleright N + F \cdot \sin 45^\circ = m \cdot g \quad (4.6)$$

$$\blacktriangleright F \cdot \cos 45^\circ - f = m \cdot a. \quad (4.7)$$

De (4.6), determinamos que $N = m \cdot g - F \cdot \sin 45^\circ$. Como $f = \mu \cdot N$, então, de (4.7),

$$F = [m(a + \mu \cdot g)] / (\cos 45^\circ + \mu \cdot \sin 45^\circ) = 94,28 \text{ N}.$$



- Os trabalhos realizados pelas forças externa e de atrito serão, respectivamente,

$$W_e = F \cdot \cos 45^\circ \cdot AB = 2\,733,33 \text{ J} \quad \text{e} \quad W_a = -f \cdot AB = -642,33 \text{ J},$$

logo, o trabalho total será $W = W_e + W_a = 2\,091 \text{ J}$.

- Como o bloco parte do repouso, sua energia cinética em A será $K_A = 0$; então, da equação (3.10) teremos $v_c^2 = 2a \cdot AC = 316,2 \text{ m}^2/\text{s}^2$. Logo, a energia cinética do bloco em C será $K_C = \frac{1}{2} m \cdot v_c^2 = 1\,581 \text{ J}$. Em B, o bloco terá uma energia cinética $K_B = 2\,091 \text{ J}$; logo, sua velocidade nesse ponto será $v_B = [2K_B/m]^{1/2} = 20,45 \text{ m/s}$.

Exemplo: Um homem com 70 kg está correndo a uma velocidade constante de 3 m/s. Se a distância entre duas pisadas consecutivas do mesmo pé for 2 m e se cada perna tiver massa $m = 10 \text{ kg}$, calcule

- o trabalho realizado por uma perna ao dar duas pisadas consecutivas; e
- a potência transmitida às pernas.

Resolução:

- Pelo teorema trabalho-energia, se m_p é a massa de uma perna, então o trabalho muscular realizado pela perna será

$$W = \frac{1}{2} m_p \cdot v^2 = 90 \text{ J}.$$

- A potência transmitida pelos músculos a cada perna ao dar duas pisadas consecutivas será $P = 2 \times 90 \text{ J/passos} \times 1,5 \text{ passos/s} = 270 \text{ W}$.

Velocidade de corrida de animais⁽¹¹⁾

Se um animal está correndo com velocidade constante v_0 , de acordo com a equação (4.2) não está sendo realizado trabalho algum. No entanto, um conjunto de músculos realiza trabalho para mudar a energia cinética das patas do animal. Se m_p é a massa da pata do animal, enquanto ele está correndo sua energia muda da seguinte maneira $0 \rightarrow \frac{1}{2} m_p \cdot v_0^2 \rightarrow 0$, e assim por diante.

O trabalho realizado pelo conjunto de músculos da pata do animal será $F_m \cdot d$, onde F_m é a força exercida por esse conjunto de músculos e d , a distância média que os músculos se contraem. Do teorema trabalho-energia teremos

$$\blacktriangleright F_m \cdot d = \frac{1}{2} m_p \cdot v_0^2 \text{ ou, } v_0^2 = 2F_m d / m_p. \quad (4.8)$$

Para compararmos as velocidades médias de animais com tamanhos diferentes, porém de formas similares, aplicaremos à equação (4.8) o conceito de fator de escala L ,

$$\blacktriangleright \therefore v^2 \propto L^2 \cdot L / L^3 = \text{constante}. \quad (4.9)$$

Logo, *todos os animais com formas semelhantes, independente do tamanho, terão valores de velocidade média muito próximos entre si⁽¹²⁾*.

A Tabela 4.1 mostra as velocidades de alguns animais conhecidos por serem *bons corredores*. Notamos que o leopardo é aproximadamente *duas vezes mais rápido*

que o cachorro. Uma das razões dessa discrepância é a grande diferença entre as massas musculares das patas desses animais. Animais rápidos apresentam patas delgadas e a maior parte da massa muscular destes animais está localizada no corpo. No caso dos grandes felinos, tanto as patas traseiras quanto as dianteiras têm músculos potentes (o que lhes dá uma grande força propulsora para correr e pular).

Na Figura 4.22 vemos um felino perseguindo uma presa. Durante a corrida, ele dobra a coluna vertebral colocando as patas traseiras na frente das dianteiras, possibilitando manter a velocidade⁽¹³⁾. Os felinos de patas musculosas estão adaptados para dar grandes saltos, que são feitos com grande aceleração. Uma explicação física para isso é que, nesses animais, a coluna vertebral funciona como se fosse uma *espécie de mola propulsora*, que agiliza seus largos passos. Na corrida, quando suas patas ficam juntas, ele dobra a coluna para cima; em seguida, seu dorso se curva para baixo, enquanto as patas posteriores projetam o corpo para frente. Na Figura 4.23 pode-se ver cada um desses passos.

A resistência do ar interfere muito no salto, e sua *altura* depende muito do tamanho do animal⁽¹⁴⁾. Entretanto, é comum encontrar grandes diferenças entre os saltos de animais que têm tamanhos muito próximos. A Figura 4.24 mostra o salto de três felinos. Destacamos o desempenho no salto do puma que chega a alcançar até 5,5 m de altura. A ação direta dos músculos em um

Tabela 4.1 Velocidade média de alguns animais corredores.

Animais	V (m/s)
Leopardo	30
Gazela	28
Avestruz	23
Raposa	20
Cavalo	19
Coelho	18
Lobo	18
Cão	16



Figura 4.22 O guepardo atinge cerca de 113 km/h quando persegue a presa.

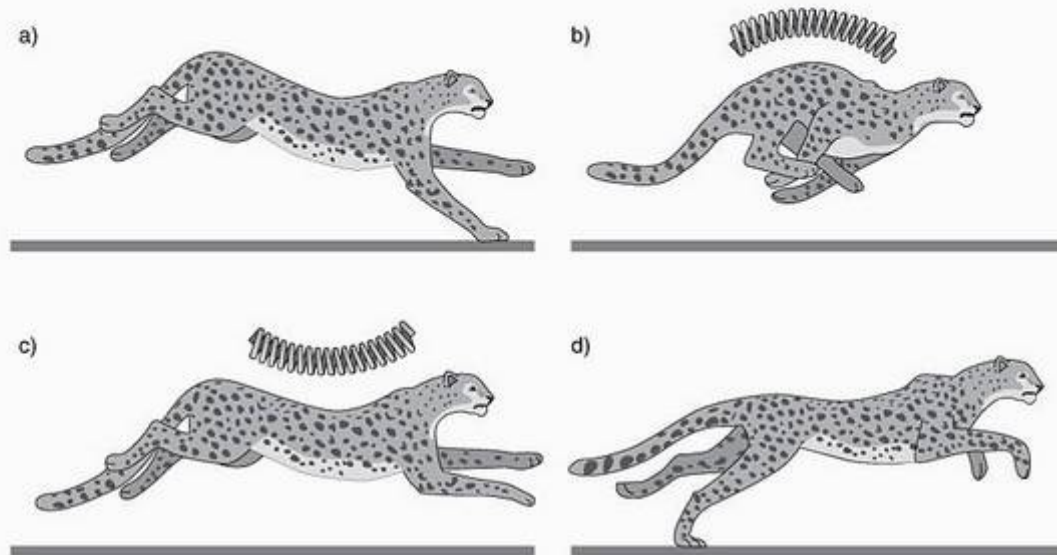


Figura 4.23 Ao correr, o guepardo (a) dobra a coluna para cima (b), em seguida, seu dorso se curva para baixo (c), e as patas posteriores projetam seu corpo para frente (d).

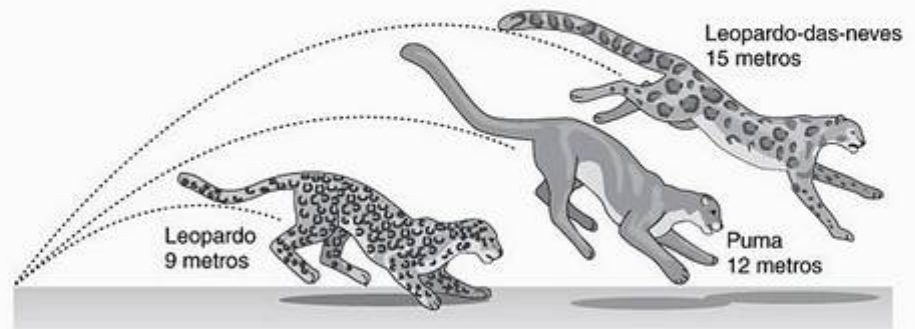


Figura 4.24 Comparação do salto de três felinos. Normalmente o puma chega a ser o mais pesado entre esses três. Os valores 9 m, 12 m e 15 m representam o avanço horizontal com o salto.

salto pode ser medida pela *potência muscular específica*, sendo aproximadamente $1 \text{ kW/kg}_{\text{muscular}}$ o limite superior dessa potência⁽¹⁵⁾. Uma importante relação para caracterizar um salto é

$$\text{comprimento do animal} \propto \frac{\text{massa muscular}}{\text{parte da superfície do animal exposta à resistência do ar}}$$

Comparado com os animais corredores, o ser humano não é um corredor eficiente. Sua velocidade na corrida é da ordem de 11 m/s e sua propulsão se deve aos músculos localizados nos membros inferiores, que contribuem aumentando a massa que deve ser acelerada ou desacelerada^(16,17).

Exemplo: A pata de uma raposa pesa 400 g e a de um lobo, 600 g. Se a força muscular nas patas de ambos for aproximadamente a mesma e a distância entre os extremos dos músculos na pata do lobo que agem em cada passo for 1,2 vezes maior do que na raposa, qual será a velocidade média para a corrida do lobo, se a velocidade média para a corrida da raposa é de 20 m/s?

Resolução: De acordo com a equação (4.8), o trabalho feito pelo conjunto dos músculos na pata da raposa será

$$W_r = \frac{1}{2} (0,4 \text{ kg})(20 \text{ m/s})^2 = 80 \text{ J},$$

logo, o trabalho feito pelo conjunto de músculos da pata do lobo deverá ser

$$W_l = 1,2W_r = 96 \text{ J}.$$

Como W_l é igual à variação da energia cinética do lobo, então

$$96 \text{ J} = \frac{1}{2} (0,6 \text{ kg})v^2 \Rightarrow v = 17,9 \text{ m/s},$$

sendo v a velocidade do lobo.

Exemplo: Considere dois animais com formas semelhantes, mas de tamanhos diferentes. Se o fator de escala entre esses animais é L , qual será a relação do fator L com o trabalho máximo realizado por esses animais?

Resolução: Como a força muscular é $F \propto L^2$ e o encurtamento dos músculos que se contraem corresponde à distância $d \propto L$, então o trabalho máximo realizado pelos animais terá a seguinte relação com L

$$W \propto L^2 \cdot L = L^3.$$

Potência total no voo de animais

Toda vez que um animal está voando, seus *músculos* realizam um *trabalho por unidade de tempo*, ou seja, eles desenvolvem uma *potência mecânica*. Isso é consequência do *consumo de energia química* disponível do animal. O consumo dessa *potência* (P_T) durante o voo em função da velocidade v pode ser de três tipos:

- ♦ *potência induzida* (P_i), utilizada para neutralizar o próprio peso do animal, seu valor é máximo quando $v = 0$, ou seja, quando está *flutuando*;
- ♦ *potência parasita* (P_p), utilizada para superar o arraste que o animal sofre devido à forma do corpo. Em geral, $P_p \propto v^3$;
- ♦ *potência de contorno* (P_c), utilizada para superar o arraste que o animal experimenta devido à forma das asas. Muda muito pouco com v .

A Figura 4.25 mostra a variação da potência (W) = $f(\text{velocidade})$ para o voo de um pombo. Destacamos os seguintes valores da potência e da velocidade:

♦ P_0 : quando o pombo está *flutuando*, ou seja, quando $v = 0$. Nesse caso, temos $P_0 \approx 11,7$ W;

♦ $P_{\min}$: quando o pombo está voando com uma velocidade V_{pt} que lhe permite, dado o suprimento de combustível (gordura corporal), uma *permanência longa* no ar;

♦ P_{am} : quando o pombo pode abranger *grandes distâncias* com um determinado suprimento de combustível;

♦ $P_{máx}$: valor utilizado pelo pombo, em intervalos curtos de tempo, para uma *ascensão vertical*. Na Figura 4.25 esse valor é aproximadamente 20,4 W; e

♦ V_{am} : é a velocidade de *alcance máxima*, ou seja, a velocidade com a qual o pombo pode atingir grande distância por unidade de trabalho.

Quando a potência total assume o valor $P_{am} = 11,2$ W, teremos dois valores para a velocidade de vôo do pombo, $V_{\min} \approx 3$ m/s e $V_{máx} \approx 16$ m/s.

Estes valores definem o intervalo das velocidades necessárias para os vôos prolongados do pombo. Para os animais voadores, geralmente $V_{am} > 1,3 V_{pt}$.

Aves grandes e pesadas têm um valor-limite de massa para poder voar. Na Figura 4.26 mostramos os dados⁽¹⁹⁾ da potência utilizada por diferentes pássaros para poder voar, em função de sua massa M . Segundo Pennycuik⁽²⁰⁾:

♦ a *potência muscular máxima* $P_{máx}$ utilizada pelo pássaro para voar é proporcional a $M^{7/6}$; e

♦ a *potência muscular mínima* $P_{\min}$ para que o pássaro, batendo as asas, possa deslocar-se horizontalmente é proporcional a $M^{2/3}$.

Logo, aves pesadas não têm capacidade para realizar vôos sustentados.

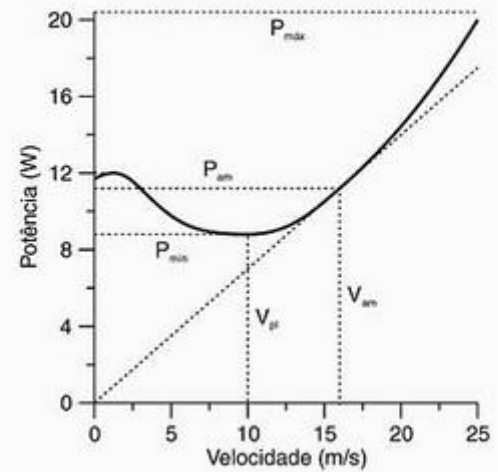


Figura 4.25 Potência total em função da velocidade de um pombo⁽¹⁸⁾. Essa potência é resultante do somatório dos componentes induzido, parasita e contorno.

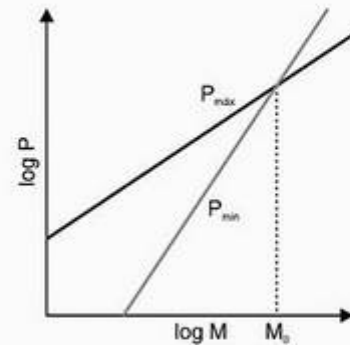
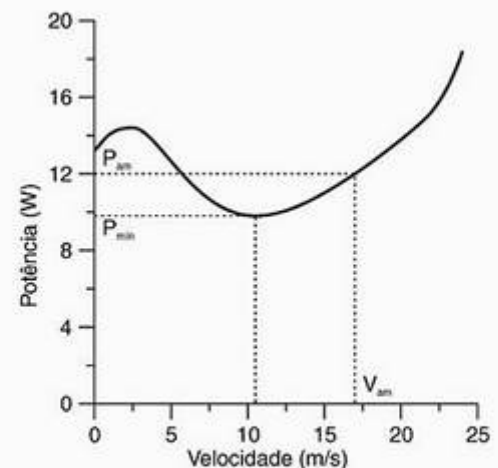


Figura 4.26 Potência em função da massa de pássaros diferentes. M_0 é a massa-limite para levantar vôo ou poder voar.

Exemplo: Um falcão com 36 g de gordura corporal desenvolve uma potência total de vôo que é apresentada em função da velocidade no gráfico ao lado. A oxidação completa de 1 g de gordura gera uma energia total de 4×10^4 J, que o falcão utiliza para voar. Considerando uma eficiência muscular de 0,25, determine:

- o tempo máximo que o falcão pode permanecer no ar;
- o alcance máximo do falcão; e
- a quantidade de gordura consumida para ficar pairando durante 2 minutos.



Resolução:

- a) De acordo com o gráfico, a *potência mínima* utilizada pelo falcão é ≈ 10 J/s; logo, o tempo máximo que o pássaro pode permanecer no ar será

$$t_{\text{máx}} = [(0,25 \times 4 \times 10^4 \text{ J/g}) / (10 \text{ J/s})] \times 36 \text{ g} = 3,6 \times 10^4 \text{ s} = 10 \text{ h}.$$

- b) A potência utilizada para obter o *alcance máximo* é ≈ 12 J/s, que corresponde a uma velocidade de alcance máximo de ≈ 17 m/s. Logo, a distância máxima que o falcão alcançará ao consumir seus 36 g de gordura será

$$d_{\text{máx}} = (17 \text{ m/s}) \times [(0,25 \times 4 \times 10^4 \text{ J/g}) / (12 \text{ J/s})] \times 36 \text{ g} = 510 \text{ km}.$$

Nota: os valores P_{am} e v_{am} correspondem ao ponto em que a reta traçada de (0,0) ao gráfico $P \times v$ é uma tangente do gráfico.

- c) Quando o falcão está *pairando* (velocidade do animal = 0), consome 1 g de sua gordura em

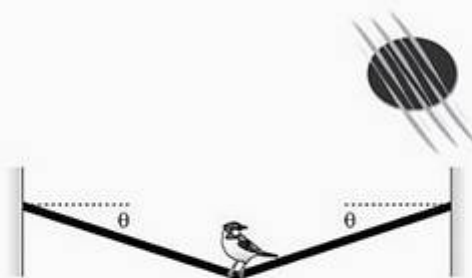
$$(0,25 \times 4 \times 10^4 \text{ J}) / (13 \text{ J/s}) = 769 \text{ s},$$

onde $P_0 \approx 13$ J/s é a potência correspondente a $v = 0$ segundo o gráfico $P \times v$. Logo, ao ficar pairando durante 120 s, a quantidade de gordura consumida será $120 \text{ s} / 769 \text{ s/g} = 0,156 \text{ g} = 156 \text{ mg}$.

Exemplo:

Um pássaro com massa m encontra-se flutuando no ar, movimentando as asas com velocidade v . Calcule o fator de escala entre a *potência necessária* para sustentar o pássaro nessa posição e a potência que está sendo realmente utilizada.

Resolução: Se L é o comprimento característico do pássaro, então, a *potência necessária* para o pássaro flutuar no ar será $m \cdot g \cdot v$. Como a velocidade não depende de L , então $P_{\text{req}} \propto L^3$. A *potência utilizada* (ou razão metabólica) será $P_{\text{uti}} \propto L^2$. Logo, a razão entre essas duas potências será proporcional a L .

PROBLEMAS

- Um passarinho com massa de 30 g pousa bem no meio de um fio esticado. Admitindo que cada metade do fio se mantém reta, calcule a tensão no fio para uma inclinação θ .
- Os ecologistas costumam dizer que “você nunca pode fazer apenas uma coisa”.
 - Discuta a possível ligação entre esta afirmação e a 3ª lei de Newton.
 - Qual das afirmações lhe parece mais acertada, o provérbio ou a 3ª lei? Explique.

3. Três livros estão empilhados em uma mesa. Os livros pesam 13 N, 18 N e 14 N, respectivamente, contando de cima para baixo.
 - a) Faça um diagrama das forças que agem sobre cada livro.
 - b) Determine a intensidade de cada uma dessas forças.
4. A força resultante $\mathbf{R}$ que age sobre um animal com massa m , na ausência de vento, é $\mathbf{R} = m \cdot \mathbf{g} + \mathbf{F}_a$. Responda:
 - a) Que tipo de movimento apresenta um animal que cai com R positiva, na ausência de vento?
 - b) Como sua aceleração varia em função do tempo?
 - c) Qual é o movimento de um animal pára-quedista sobre o qual atua uma força resultante $\mathbf{R}$ negativa na ausência de vento?
 - d) Como varia sua aceleração em função do tempo?
5. Considere um pára-quedista com massa m sobre o qual atua a força de arraste $F_a = \kappa(v_z)^n$. Qual é a velocidade-limite ao atingir o solo?
6. Um pára-quedista com massa m está descendo verticalmente. Calcule:
 - a) O que acontece com sua velocidade descendente v_z quando $m \cdot g > F_a$?
 - b) E quando $m \cdot g < F_a$?
 - c) Em que condição F_a pode ser maior que $m \cdot g$?
7. A área efetiva de um pára-quedas com massa m , e forma de cone com altura h e raio r é πr^2 .
 - a) Determine a razão entre as forças de resistência do ar sobre dois pára-quedas com forma semelhante, feitos do mesmo material, tendo a mesma altura e raios r_1 e r_2 , sendo $r_1 = 2r_2$.
 - b) No instante em que eles estão descendo com a mesma velocidade v_0 , com a parte plana voltada para cima, qual será a razão entre os expoentes n das velocidades e as constantes κ de cada pára-quedas?
8.
 - a) Qual é a principal diferença entre a força aerodinâmica resultante que atua sobre um animal que desce com movimento de pára-quedas e outro que desce planando?
 - b) Qual é a trajetória de cada um?
 - c) Como age a força de sustentação em um animal planador? E em um animal com movimento de pára-quedas?
9. Da curva polar do voo de um periquito com 300 g, encontramos para um ângulo de ataque $\alpha = 20^\circ$: $C_x(\alpha) = 1,2$ e $C_a(\alpha) = 0,2$. O periquito voa segundo uma trajetória horizontal com aceleração de 5 m/s^2 , experimentando, devido à resistência do ar, uma força constante de 0,5 N.
 - a) Qual será o módulo e a direção da força aerodinâmica que age sobre o periquito?
 - b) Qual será o módulo e a direção da força de impulso produzida por suas asas?
 - c) Qual será a variação da energia cinética do periquito ao deslocar-se de 50 m?



10. Considere animais com formas semelhantes, mas de tamanhos diferentes. Se o fator de escala entre estes animais é L , qual é a relação entre o tamanho do animal e a energia cinética máxima consumida ao caminhar?
11. Um homem com 70 kg está sobre um trenó de 30 kg. O trenó é puxado por um cavalo sobre uma superfície sem atrito até uma distância de 15 m, com uma força de 200 N, inclinada 30° em relação à horizontal. Calcule
 - a) as forças que agem neste sistema; e
 - b) o trabalho realizado por cada uma dessas forças.
12. Agora no problema anterior considere que o coeficiente de atrito cinético entre o trenó e a superfície é de 0,1. Qual é a taxa de energia dissipada devido ao atrito?
13. Uma força resultante de 100 N age sobre um corpo com 25 kg.
 - a) Se o corpo parte do repouso, qual será sua energia cinética após mover-se 5 m?
 - b) Qual sua velocidade depois desse deslocamento?
14. Uma pessoa encontra-se no alto de um prédio com altura h . Ao saltar lá de cima, ele tem uma velocidade horizontal v_{ix} , atingindo o solo em um ponto O.
 - a) Qual é o trabalho realizado pela força gravitacional?
 - b) Qual é a velocidade da pessoa quando atinge o chão no ponto O?
15. Uma pulga com 0,5 mg de massa salta 0,1m, sendo que 50% de sua energia inicial é usada para vencer a resistência do ar. Calcule
 - a) a velocidade com a qual a pulga salta; e
 - b) quantas vezes maior que “g” é a aceleração que os músculos das patas da pulga geram, se estas precisarem se contrair durante 2 ms para atingir essa velocidade.
16. Está sendo realizado algum trabalho sobre um animal que caminha com velocidade constante ao longo de uma estrada horizontal? Explique sua resposta.
17. Um corpo com 2 kg está inicialmente em repouso. Se uma força de 10 N é aplicada sobre este corpo durante 10 s, calcule
 - a) a energia cinética adquirida pelo corpo; e
 - b) o trabalho realizado pela força.
18. Ao serem bombeados pelo coração, em regime de baixa atividade, 200 g de sangue adquirem uma velocidade de 30 cm/s. Com uma atividade mais intensa do coração, essa mesma massa de sangue atinge uma velocidade de 60 cm/s. Calcule, em ambos casos, a energia cinética que essa massa de sangue adquire e o trabalho realizado pelo coração.
19. Uma garota joga para cima uma bola com 0,2 kg, que atinge uma altura de 6 m.
 - a) Qual é a energia cinética da bola quando esta sai das mãos da garota?
 - b) Qual o trabalho realizado pela garota ao arremessar a bola?
 - c) Se os músculos dos braços da garota contraem-se 0,05 m quando ela arremessa a bola, qual é a força média exercida pelo músculo?

20. Uma mulher com 50 kg, ao escalar uma montanha de 1 500 m de altitude, consome 4 000 calorias de energia alimentícia por cada 1 000 calorias de trabalho realizado [uma caloria alimentar (= 1 kcal) contém 4 184 J de energia química]. Calcule:
 - a) o trabalho realizado pela mulher; e
 - b) a quantidade de energia alimentícia consumida nesta escalada.
21. A potência induzida P_{ind} necessária para manter *pairando* um pássaro com massa m e velocidade instantânea v é dada por $P_{ind} \propto m \cdot g \cdot v$. Esboce um gráfico mostrando o comportamento da potência induzida descrita, isto é, P_{ind} em função da velocidade de vôo v .
22. Uma potência parasita P_{par} é utilizada para superar o atrito do ar contra o corpo de um pássaro voando. $P_{par} = F_a \cdot v$, sendo que $F_a \propto A \cdot v^2$, onde A é a área efetiva do pássaro. Então a potência parasita será $P_{par} \propto A \cdot v^3$. Esboce um gráfico do comportamento dessa potência em função da velocidade de vôo v .
23. Quando um animal voa, geralmente há oxidação completa de 1 g de gordura produzindo uma energia de 4×10^4 J. Considerando que, em média, a eficiência muscular destas aves é 25%, determine
 - a) a quantidade de gordura consumida por um *beija-flor* ao voar durante 1 minuto com uma *potência mínima* de 0,7 W;
 - b) o alcance máximo de um *periquito* com 60 mg de gordura, se $P_{cm} = 3,66$ W e $v_{cm} = 5,5$ m/s; e
 - c) a potência de flutuação de uma *gaivota* que consome 113 mg de gordura ao ficar *pairando* durante 1 minuto.
24. Utilizando os diversos conceitos da potência de vôo das aves, explique por que a galinha e o peru não são aves voadoras.
25. Um ciclista está pedalando, para subir uma colina, a uma velocidade de 3 m/s. A inclinação da estrada é de 4° , a massa da bicicleta é 15 kg e a massa do ciclista, 65 kg. Estime a potência que ele está usando e também que ele usaria para manter esta velocidade contra o atrito se a estrada fosse nivelada.
26. A água de uma cachoeira com 30 m de altura flui a uma razão de 10 kg de água por segundo. Qual a taxa de aumento da energia cinética da água durante a queda?
27. Uma pessoa gera 90 W enquanto dorme, consumindo 1 g de oxigênio (densidade = $0,26 \text{ kg/m}^3$) para cada 10 kJ de energia do corpo. Duas pessoas dormem durante 8 h em um dormitório (de volume = $4 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 2,5 \text{ m}$) completamente vedado. Pergunta-se:
 - a) Eles consumirão todo o oxigênio do dormitório?
 - b) Se não, que porcentagem consumirão?
 - c) A ventilação é necessária?

Referências Bibliográficas

1. VOGEL, S. Flight in *Drosophila*. III. Aerodynamic characteristics of fly wings and wing models. *J. Exp. Biol.* v. 46, n. 3, p. 431-443, June, 1967.
2. EVANS, M.R.; ROSEN, M.; PARK, KJ. et al. How do birds' tails work? Delta-wing theory fails to predict tail shape during flight. *Proc. Roy. Soc. Lon. B Bio.* v. 269, n. 1495, p. 1053-1057, 2002.
3. PENNYCUICK, C.J. Soaring flight of vultures. *Scientific American*. v. 229, n. 6, p. 102-109, 1973.
4. KEMPF, B.; NACHTIGALL, W. A smoke canal for flow study on bird wings. *Experientia*. v. 26, n. 6, p. 667, 1970.
5. Idem, ibidem.
6. Idem, ibidem.
7. Idem, ibidem.
8. VOGEL, Op. cit.
9. ALEXANDER, R.M. The biomechanics of insect flight: Form, function and evolution by Dudley, R. *Nature*. v. 405, n. 6782, p. 17-18, May, 2000.
10. PENNYCUICK, C.J. Power requirements for horizontal flight in pigeon. *columba livia*. *J. Exp. Biol.* v. 49, n. 3, p. 527-555, 1968.
11. ALEXANDER, R.M. Optimization and gaits in the locomotion of vertebrates. *Physiol. Reviews*. v. 69, n. 4, p. 1199-1227, Oct, 1989.
12. HEGLUND, N.C. et al. Energetics and mechanics of terrestrial locomotion. 4. Total mechanical energy changes as a function of speed and body size in birds and mammals. *J. Exp. Biol.* v. 97, p. 57-66, Apr, 1982.
13. CAVAGNA, G.A.; HEGLUND, N.C.; TAYLOR, C.R. Mechanical work in terrestrial locomotion – 2 basic mechanisms for minimizing energy-expenditure. *Am. J. Physiol.* v. 233, n. 5, p. R243-R261, 1977.
14. BENNET-CLARK, H.C.; LUCEY, E.C.A. Jump of flea – A study of energetics and a model of mechanism. *J. Exp. Biol.* v. 47, n. 1, p. 59-76, 1967.
15. BENNET-CLARK, H.C. Energetics of jump of locust *schistocerca-gregaria*. *J. Exp. Biol.* v. 63, n. 1, p. 53-83, 1975.
16. TAYLOR, C.R.; ROWNTREE, VJ. Running on 2 or on 4 legs - which consumes more energy? *Science*. v. 179, n. 4069, p. 186-187, 1973.
17. BONSER, R.H.C. Longitudinal variation in mechanical competence of bone along the avian humerus. *J. Exp. Biol.* v. 198, n. 1, p. 209-212, Jan, 1995.
18. PENNYCUICK, C.J. Power requirements for horizontal flight in pigeon. *columba livia*. *J. Exp. Biol.* v. 49, n. 3, p. 527-555, 1968.
19. Idem, ibidem.
20. Idem, ibidem.

Capítulo 5

Energia Potencial, Outras Formas de Energia e Conservação da Energia no Corpo Humano



5.1 INTRODUÇÃO

A energia se apresenta sob diversas formas, como energia mecânica, térmica, química, luminosa, elétrica, magnética, etc. É bastante comum a *conversão* de uma dessas formas em outra. Mas a diminuição em uma certa quantidade de uma forma de energia pode dar origem a outras formas de energia, porém sempre na mesma quantidade. Quando essas conversões ocorrem dentro de um *sistema isolado*, a *energia total do sistema se conserva*. Este é o princípio da conservação da energia.



5.2 ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL

Esta é uma *forma de energia* que se origina pela ação de uma *força conservativa*. O trabalho W realizado por esta força, ao mover um corpo com massa m , dependerá somente das *posições relativas* entre os pontos inicial e final do movimento, independente da trajetória seguida. Se o deslocamento de m é de A até B, como se vê na Figura 5.1, então, definiremos a *energia potencial* U a partir da condição

$$\blacktriangleright \quad W_{AB} = U_A - U_B = \Delta U, \quad (5.1)$$

onde U_A e U_B são, respectivamente, os valores da energia potencial nos pontos A e B das trajetórias (1) ou (2), sendo ΔU a variação dessas energias.

Pelo teorema trabalho-energia, o trabalho realizado sobre m ao movê-lo de A até B também satisfaz a relação $W_{AB} = K_B - K_A = \Delta K$. Logo, de acordo com a equação (5.1) teremos $\Delta K = \Delta U$, ou seja,

$$\blacktriangleright \quad K_B + U_B = K_A + U_A. \quad (5.2)$$

Como a relação $K + U = E$ é conhecida como *energia mecânica* do corpo em movimento, então, *quando as únicas forças que agem sobre o corpo são conservativas*, a *energia mecânica desse corpo se conservará* $E_A = E_B = \text{constante}$.

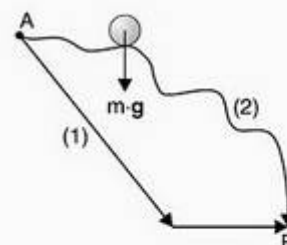


Figura 5.1 Se sobre um corpo age uma força conservativa, o trabalho realizado para levar o corpo de A até B será independente da trajetória (1) ou (2) a ser seguida.

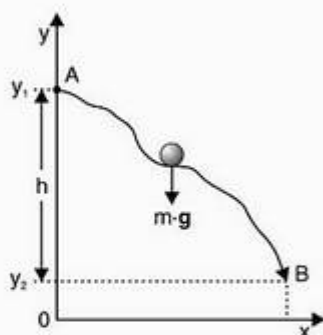


Figura 5.2 A força conservativa $m \cdot g$ desloca o corpo de massa m do ponto A até B. O trabalho será $-m \cdot g \cdot h$.

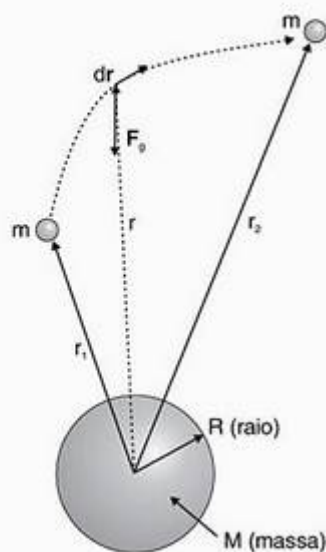


Figura 5.3 Corpo de massa m atraído pela força gravitacional F_g , deslocando-se de r_1 até r_2 .

Se a *força conservativa* que age sobre um corpo de massa m é a *força gravitacional*, então a variação de sua energia potencial ao ir de A até B será de acordo com a Figura 5.2

$$U_{AB} = W_{\text{grav}} = \int_{y_1}^{y_2} m \cdot g \cdot dr = \int_{y_1}^{y_2} m \cdot g \cdot dy = mg \int_{y_1}^{y_2} dy = m \cdot g(y_2 - y_1) = -m \cdot g \cdot h.$$

Como $dr = dx + dy$, e y é a direção da força conservativa, o integrando fica reduzido a $m \cdot g \cdot dy$.

Aqui, h é a diferença entre as coordenadas verticais dos pontos A e B.

Definindo $U_g = m \cdot g \cdot y$ como a *energia potencial gravitacional* de um corpo com massa m que se encontra a uma distância y de uma direção horizontal, então o *trabalho devido à força gravitacional*, ao deslocar o corpo de A até B (Figura 5.2), será

$$\blacktriangleright W_{\text{grav}} = -(U_{1g} - U_{2g}) = -\Delta U. \quad (5.3)$$

♦ Quando $U_{2g} > U_{1g}$, W_{grav} é positivo, o que significa um deslocamento para baixo, logo y é *decrecente*. Assim a energia potencial gravitacional *decrece*.

♦ Quando $U_{2g} < U_{1g}$, W_{grav} é negativo, o que significa um deslocamento para cima, logo y é *crescente*. Assim a energia potencial gravitacional *aumenta*.

♦ Quando a distância percorrida por um corpo com massa m , devido à ação da força gravitacional, é *muito grande*, então o cálculo de sua *energia potencial gravitacional* é feito a partir da expressão geral para a força de atração gravitacional

$$\blacktriangleright F_g = \gamma \cdot m \cdot M / r^2, \quad (5.4)$$

onde $\gamma = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ é a constante gravitacional no SI de unidades, r é a distância da massa m ao centro da Terra e $M = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$ é a massa da Terra.

Se um corpo com massa m se desloca da posição r_1 até r_2 , como se vê na Figura 5.3, então o trabalho, devido à *força gravitacional*, será

$$\blacktriangleright W_{\text{grav}} = \int_{r_1}^{r_2} F_g \cdot dr = -\gamma m M \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \gamma m M \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right]. \quad (5.5)$$

Comparando as equações (5.5) e (5.3), podemos concluir que a expressão geral para a *energia potencial gravitacional* de um corpo com massa m , que se encontra a uma distância r do centro da Terra, será

$$\blacktriangleright U_g = -\gamma \frac{m \cdot M}{r}. \quad (5.6)$$

Em particular, se o corpo com massa m encontra-se a uma altura h da superfície terrestre, com $h \ll R$, sendo $R = 6,38 \times 10^6 \text{ m}$ o raio da Terra, então $r = (R + h) \Rightarrow r^{-1} = R^{-1} [1 + (h/R)]^{-1} = R^{-1} [1 - (h/R) + (h/R)^2 + \dots]$. Logo,

$$U_g = -\gamma \frac{m \cdot M}{R} \left[1 - \frac{h}{R} + \left(\frac{h}{R} \right)^2 - \dots \right] = -m \cdot g \cdot (R - h + h^2/R - \dots) \cong m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot R$$

$$\blacktriangleright \therefore U_g = m \cdot g \cdot h + \text{constante}. \quad (5.7)$$

Para chegarmos à equação (5.7), utilizamos as expressões equivalentes da energia potencial gravitacional $U_g = -\gamma \cdot M \cdot m/r = -m \cdot g \cdot R^2/r$. (Essa igualdade será apresentada no exemplo dado em continuação.)

Quando um corpo com massa m se desloca do ponto (x_1, y_1) até o ponto (x_2, y_2) devido a uma força resultante $\mathbf{F}$, que exclui a força gravitacional, então, de acordo com (4.4) e (5.3),

$$W' - W_{\text{grav}} = \Delta K$$

Ou

$$\begin{aligned} W' &= -\Delta U + \Delta K = -(U_{1g} - U_{2g}) + (K_2 - K_1) \\ &= (K_2 + U_{2g}) - (K_1 + U_{1g}) = E_2 - E_1, \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde E_2 e E_1 são a energia mecânica de m nos pontos (x_2, y_2) e (x_1, y_1) , respectivamente. Logo, como se vê na Figura 5.4, o trabalho, devido à resultante das forças que agem sobre o corpo com massa m , excluindo a força gravitacional, é igual à variação de sua energia mecânica.

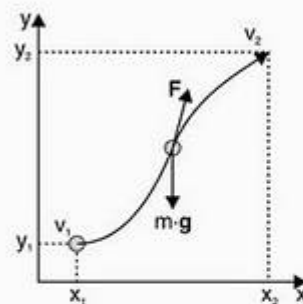


Figura 5.4 Corpo de massa m , deslocando-se sob a ação de uma força $\mathbf{F}$, que exclui a força gravitacional $m\mathbf{g}$.

Exemplo: Um corpo com massa m encontra-se a uma distância r da superfície da Terra. Se $r \ll R$, o raio da Terra, e o corpo se encontra em queda livre, então mostre que a aceleração do corpo é uma constante.

Resolução: A força exercida pela Terra de massa M sobre um corpo com massa m que se encontra a uma distância r de sua superfície é dada pela equação (5.4) $F_g = \gamma \cdot m \cdot M/(r+R)^2$. Esse corpo m exerce uma força da mesma intensidade sobre a Terra.

Como o corpo m está em queda livre, então

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}_g,$$

ou seja,

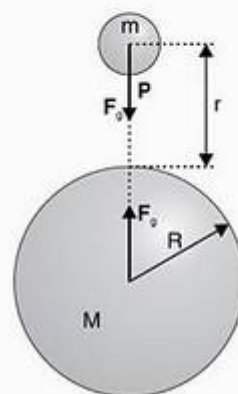
$$mg = \gamma \cdot m \cdot M/(r+R)^2 \Rightarrow g \cong \gamma \cdot M/R^2.$$

Assim, a aceleração devido à gravidade é a mesma para *todos* os corpos. Também, dentro dessa aproximação, a massa da Terra será

$$M \cong g \cdot R^2/\gamma,$$

logo, a energia potencial gravitacional do corpo m será

$$U_g = -\gamma \cdot m \cdot M/(r+R) \cong -[\gamma \cdot m/(r+R)][g \cdot R^2/\gamma] = -m \cdot g \cdot R^2/(r+R).$$



Energia mecânica dos humanos ao fazerem um salto^(1,2)

Os saltos dos humanos normalmente são feitos de duas maneiras:

- ♦ um simples salto vertical, ou seja, salto a partir de uma posição de repouso e
- ♦ um salto que exige uma corrida prévia, como é o caso dos saltos com vara ou de altura, nas competições esportivas.

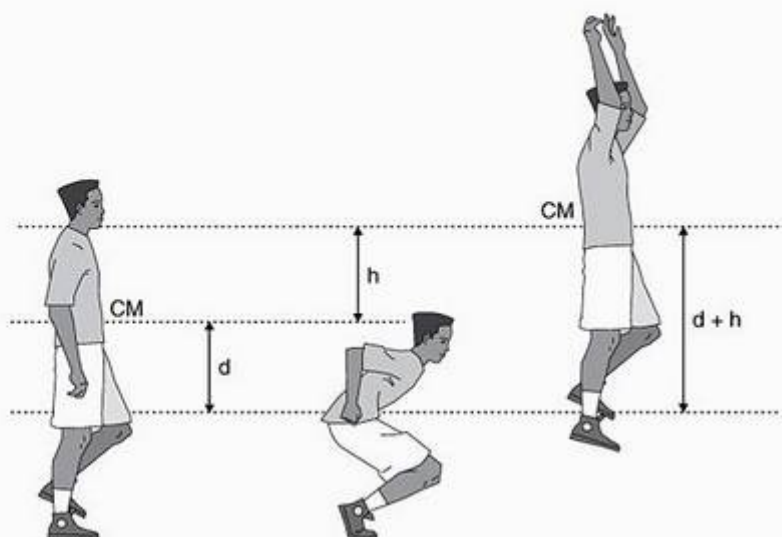


Figura 5.5 Quando um salto vertical é realizado, a variação da energia potencial gravitacional é dada por $m \cdot g(h + d)$, onde h é a altura a que se eleva o centro de massa (CM) e d a distância entre os CM do corpo inteiro e dos joelhos.

Para realizar um *salto vertical*, um atleta utiliza principalmente os músculos de seus membros inferiores. Considere um atleta com *massa* m e *altura* h_a , com seu CM (centro de massa) a uma altura $h_{cm} \equiv 0,58 h_a$ do chão (veja a Tabela 3.1). Como se vê na Figura 5.5, o *trabalho* $W_{mús}$ realizado pelos músculos, quando o CM se eleva a uma altura h , se transforma em *energia potencial* necessária para o salto, pois é nula a *energia cinética* do atleta tanto no início como no final do salto. Logo,

$$W_{mús} = m \cdot g(h + d),$$

sendo $d \equiv 0,3 h_a$ a distância entre o CM do corpo inteiro na posição ortostática e agachada, e h toma valores entre

h_s : distância entre o CM do corpo inteiro quando atinge a elevação máxima e na posição ortostática e

h_c : distância entre o CM do tronco e do corpo inteiro.

O trabalho muscular por unidade de peso do atleta satisfaz a relação $0,44 h_a < W_{mús}/m \cdot g < 0,54 h_a$. Assim, pode-se concluir que, quanto maior h_a , o *trabalho muscular* tende a um valor máximo igual ao trabalho necessário para elevar a 1 m de altura o peso do atleta.

Em relação à altura dos saltos verticais de animais com formas semelhantes, esta será aproximadamente independente do tamanho do animal. Isto é, se entre esses animais o fator de escala é L , teremos

$$h_{sv} = h + d = \text{trabalho/peso} \propto L^2 \cdot L/L^3 = \text{constante}.$$

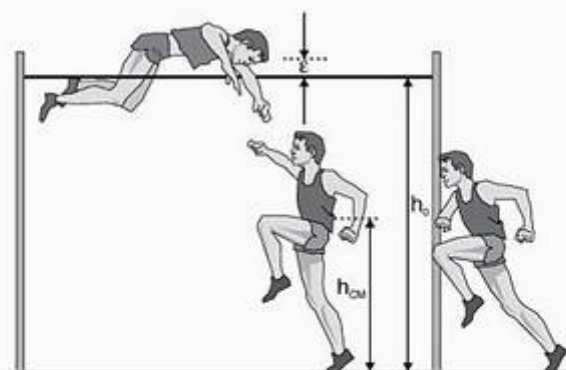


Figura 5.6 Para realizar um salto em altura, um atleta deve antes adquirir energia cinética. Para isso ele deve correr antes de realizar o salto.

No caso do *salto em altura*, para realizá-lo, o atleta deve correr antes, ou seja, deve adquirir uma *energia cinética* que irá se transformar na *energia potencial* necessária para o salto. De acordo com a Figura 5.6, neste tipo de salto o CM do atleta se eleva até a altura

$$H = h_0 - h_{cm} + \epsilon,$$

onde $\epsilon \equiv 0,08 h_a$. Lembre-se de que todo atleta, ao fazer um *salto vertical*, eleva seu CM a uma altura h_{sv} , sem necessidade alguma de adquirir energia cinética previamente. Logo, a energia cinética adquirida na corrida deve ser *suficiente* para que, ao se transformar em energia potencial, o atleta possa elevar seu CM a uma altura $H - h_{sv}$.

Se, ao iniciar o salto, o atleta com massa m tem uma velocidade média v , então sua energia cinética será $\frac{1}{2} m \cdot v^2$. Como o salto exige uma energia potencial $m \cdot g(H - h_{sv})$, para realizá-lo, deve-se satisfazer a condição

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 \geq m \cdot g(H - h_{sv}) \text{ ou } v^2 \geq 2g(H - h_{sv}). \quad (5.9)$$

Para um atleta com 1,70 m de altura, tem-se $h_{CM} \cong 1$ m e $\epsilon \cong 0,14$ m; logo, se $h_0 = 2,3$ m (o atual recorde mundial, 2,45 m, pertence ao atleta cubano Jávier Sotomayor e foi obtido em 27 de julho de 1993), teremos $H = 2,3 \text{ m} - 1 \text{ m} + 0,14 \text{ m} = 1,44$ m. Com $h_{sv} \cong 0,4$ m, a velocidade de impulso deverá ser $v \geq [2 \times 1,03 \text{ m} \times 9,8 \text{ m/s}^2]^{1/2} \cong 5 \text{ m/s}$.

A determinação da velocidade do atleta, ao iniciar o salto, exige que se conheça a perda de energia pelo atrito dos pés do atleta com o chão e também a resistência do ar quando a corrida está acontecendo.

No salto com vara, como se vê na Figura 5.7, o atleta inicialmente adquire uma energia cinética K , que será convertida em energia elástica da vara. Essa energia será devolvida ao humano para que ele complete o salto. Como o salto tem altura total $H = h + h_{CM} + h_{sv}$, onde h é a altura que o CM do humano ganha pela transferência da energia elástica da vara (o valor de h_{CM} já foi definido na Figura 5.6), então a energia da vara deve ser igual a $m \cdot g(h + \epsilon)$ (ϵ foi definida na Figura 5.6).

Se não tivermos nenhuma perda nessas transformações da energia, então

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g(h + \epsilon) \text{ ou } h = (v^2/2g) - \epsilon. \quad (5.10)$$

Normalmente, no salto com vara, nem toda energia cinética do atleta é utilizada para dobrar a vara, ficando, assim, uma velocidade horizontal residual.

Para um atleta com 1,70 m de altura, temos $h_{CM} \cong 1$ m e $h_{sv} \cong 0,4$ m; logo, se $H = 6$ m (o atual recorde mundial, 6,14 m, foi conseguido pelo atleta ucraniano Sergey Bubka, em 31 de julho de 1994), então temos $h = 6 \text{ m} - 1 \text{ m} - 0,4 \text{ m} = 4,6$ m. Assim, a velocidade de corrida deverá ser, pelo menos, $v = [2 \times 4,74 \text{ m} \times 9,8 \text{ m/s}^2]^{1/2} = 9,6 \text{ m/s}$.

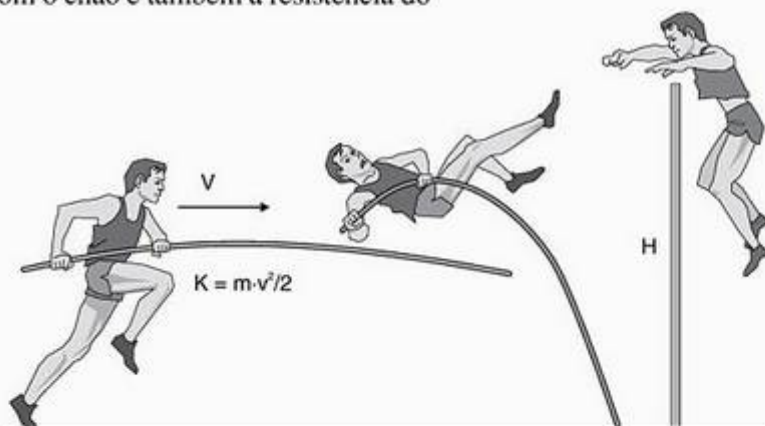


Figura 5.7 Um atleta, com energia cinética K , transfere temporariamente parte dessa energia para uma vara elástica, que se dobra. Ao se esticar novamente, a vara devolve a energia ao atleta para que ele complete o salto.

Exemplo: Um atleta com 70 kg de massa e 1,72 m de altura faz um salto vertical simples.

- Calcule a quantidade de trabalho que o atleta realiza ao saltar de uma posição inicial agachada até a altura máxima que ele pode alcançar.
- Ao realizar este salto, os músculos dos membros inferiores agem durante 0,18 s. Qual será a potência desenvolvida por esses músculos?

Resolução:

- a) De acordo com a Figura 5.5, se $h \cong 0,4 \text{ m}$ e $d \cong 0,52 \text{ m}$, então a altura total a que se eleva o atleta será $h + d = 0,92 \text{ m}$. Logo, pela equação 5.8, o trabalho desenvolvido neste movimento será $0,92 \text{ m} \times 70 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2 = 631 \text{ J}$.
- b) Admitindo que o trabalho realizado nesse salto é devido principalmente à ação dos músculos dos membros inferiores e que a eficiência desses músculos é de 100%, a potência desenvolvida será $631 \text{ J} / 0,18 \text{ s} = 3506 \text{ W}$.

Exemplo: Qual será a altura que um atleta com 70 kg de massa e 1,72 m de altura atingirá ao realizar um salto com vara se, ao correr com a vara a uma velocidade de 8,6 m/s, ele utiliza 90% de sua energia cinética para realizar este salto?

Resolução: A energia cinética do atleta, antes de iniciar o salto é $\frac{1}{2} 70 \text{ kg} \times (8,6 \text{ m/s})^2 = 2588,6 \text{ J}$. Como 90% dessa energia é transformada em energia potencial elástica da vara, que, por sua vez, é devolvida integralmente ao atleta para completar o salto, teremos $0,9 \times 2588,6 \text{ J} = 70 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2 \times (h + \epsilon)$, ou $h = 3,26 \text{ m}$. Logo, a altura total do salto será $H = h + h_{\text{CM}} + h_{\text{sv}} = 3,26 \text{ m} + 1 \text{ m} + 0,4 \text{ m} = 4,66 \text{ m}$.



5.3 ENERGIA POTENCIAL ELÁSTICA

Conforme foi discutido no Capítulo 3, na Seção 3.5, Forças e Biomecânica, a *elasticidade de um corpo* é caracterizada pelo material que o constitui. Essa *elasticidade* se manifesta sempre que uma força deformadora **T** é aplicada temporariamente ao corpo, permitindo, depois de retirada, que o corpo retorne a sua forma inicial.

A Figura 5.8a mostra uma mola, feita de um material de *constante elástica (ou rigidez)* κ , deformada pela aplicação de uma força **T**. Pela lei de Hooke (equação 3.20), temos

$$T = \kappa \cdot x_0$$

onde x_0 é a deformação causada por **T**.

Quando a mola é esticada Δx , o *trabalho realizado* pela força **T** será dado por

$$W = \int_0^{\Delta x} T \cdot dx = \int_0^{\Delta x} \kappa \cdot x \cdot dx = \frac{\kappa}{2} (\Delta x)^2. \quad (5.11)$$

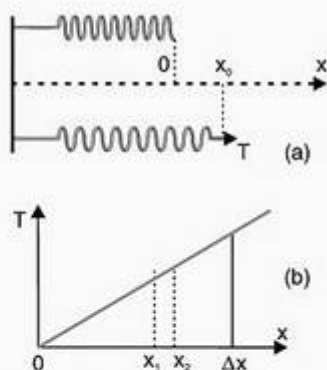


Figura 5.8 a) Deformação x_0 de uma mola. b) O trabalho realizado pela força deformadora **T** é igual à área do triângulo com base Δx .

Ou seja, W é a área subtendida pelo gráfico da força deformante T e pela deformação x , como mostra a Figura 5.8b. Note que, se a mola é *esticada* pela ação de uma força T , desde um tamanho x_1 até outro x_2 , o trabalho realizado por $T = \kappa \cdot x$ será

$$\blacktriangleright \quad W = \int_{x_1}^{x_2} T \cdot dx = \kappa \int_{x_1}^{x_2} x \cdot dx = \frac{\kappa}{2} x_2^2 - \frac{\kappa}{2} x_1^2. \quad (5.12)$$

Se aplicarmos a um corpo de constante de rigidez κ uma força deformadora T , o corpo exercerá uma *força elástica (restauradora) F*, na mesma direção de T , porém em sentido contrário. Como essas forças têm a mesma intensidade, o *trabalho realizado pelo corpo*, quando experimenta uma deformação Δx , será $-\frac{1}{2} \kappa (\Delta x)^2$.

Na Figura 5.9 temos um corpo com massa m preso a uma mola de constante elástica κ . Quando aplicamos uma força deformadora T , a mola estica desde a posição x_1 até x_2 , então o trabalho devido à força elástica F será dado por

$$\blacktriangleright \quad W_{\text{elas}} = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx = -\kappa \int_{x_1}^{x_2} x \cdot dx = \frac{\kappa}{2} x_1^2 - \frac{\kappa}{2} x_2^2. \quad (5.13)$$

Definindo-se a *energia potencial elástica* da mola como

$$\blacktriangleright \quad U_e = \frac{1}{2} \kappa \cdot x^2, \quad (5.14)$$

a equação (5.13) diz que

$$\blacktriangleright \quad W_{\text{elas}} = U_{e1} - U_{e2} = -\Delta U_e. \quad (5.15)$$

Ou seja, o trabalho devido à força elástica é igual ao negativo da variação da energia potencial elástica.

Se W' é o trabalho devido à força deformadora T , então, pelo teorema do trabalho-energia

$$W' + W_{\text{elas}} = \Delta K, \text{ ou } W' = \Delta U_e + \Delta K.$$

Pelas equações (4.4) e (5.15), teremos que

$$W' = \left(\frac{1}{2} m \cdot v_2^2 + \frac{1}{2} \kappa \cdot x_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \kappa \cdot x_1^2 \right) = E_2 - E_1 = \Delta E,$$

de forma que, quando W' é nulo, a energia mecânica é conservada.

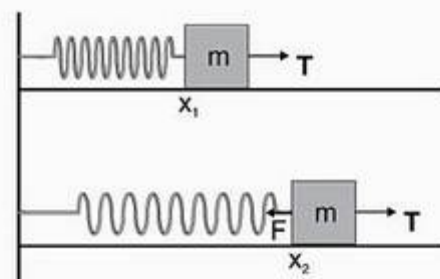
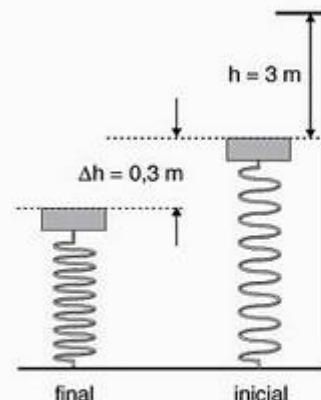


Figura 5.9 A força elástica F realiza um trabalho que é igual à variação da energia potencial elástica da mola.

Exemplo: Um homem com 80 kg cai de uma altura de 3 m sobre uma mola. Como a mola foi comprimida 0,3 m, determine a constante elástica κ da mola.

Resolução: Pelo princípio da conservação da energia mecânica, quando a compressão da mola for máxima, a energia cinética é nula, logo, a perda de *energia potencial gravitacional* deverá ser igual ao ganho da *energia potencial elástica da mola*. Como o homem tem uma queda total de $h + \Delta h$, teremos

$$m \cdot g(h + \Delta h) = \frac{1}{2} \kappa (\Delta h)^2, \text{ ou: } \kappa = 2 m \cdot g(h + \Delta h) / (\Delta h)^2 = 57\,493 \text{ N/m}.$$





5.4 ENERGIA POTENCIAL MOLECULAR

Energia potencial molecular é uma *forma de energia* cuja origem é a interação eletromagnética entre os átomos que constituem a molécula. O valor U_m dessa energia depende da *energia total* E da molécula e das distâncias relativas entre seus átomos. Para uma energia E da molécula, U_m pode tomar valores positivos, negativos ou nulos.

A Figura 5.10 é uma representação gráfica de $U_m = f(r)$ típica de uma *molécula diatômica*. Em $r = r_0$, ou *distância de equilíbrio*, a força entre os átomos é zero, e U_m alcança seu valor mínimo. A energia E_1 é chamada de *energia de ligação*, ou seja, é a energia mínima necessária para dissociar os átomos ou íons da molécula.

Quando a energia total da molécula é *negativa*, dizemos que os átomos estão *ligados*, tendo distâncias de separação mínima e máxima. Na Figura 5.10, se $E = E_2$, então as separações mínima e máxima serão, respectivamente, r_1 e r_2 . Para um valor *positivo* da energia total da molécula (por exemplo $E = E_3$ na Figura 5.10), dizemos que o sistema *não está ligado*, ou seja, os átomos ou íons da molécula estão dissociados.

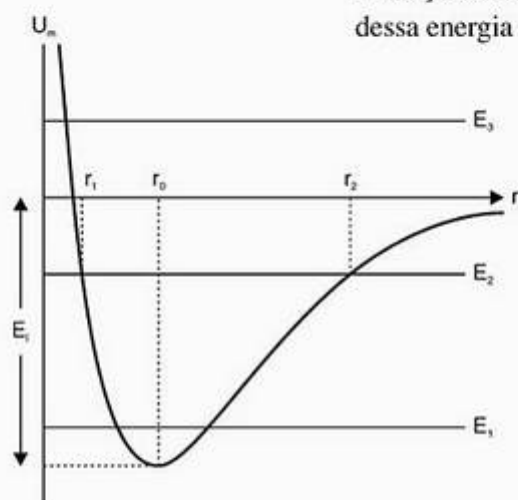


Figura 5.10 Energia potencial em função da distância entre os átomos de uma molécula diatômica. E_1 , E_2 e E_3 são três valores de energia total da molécula.

Exemplo: A energia potencial U_m da molécula de NaCl, em função da distância r entre os íons Na^+ e Cl^- , tem as seguintes características:

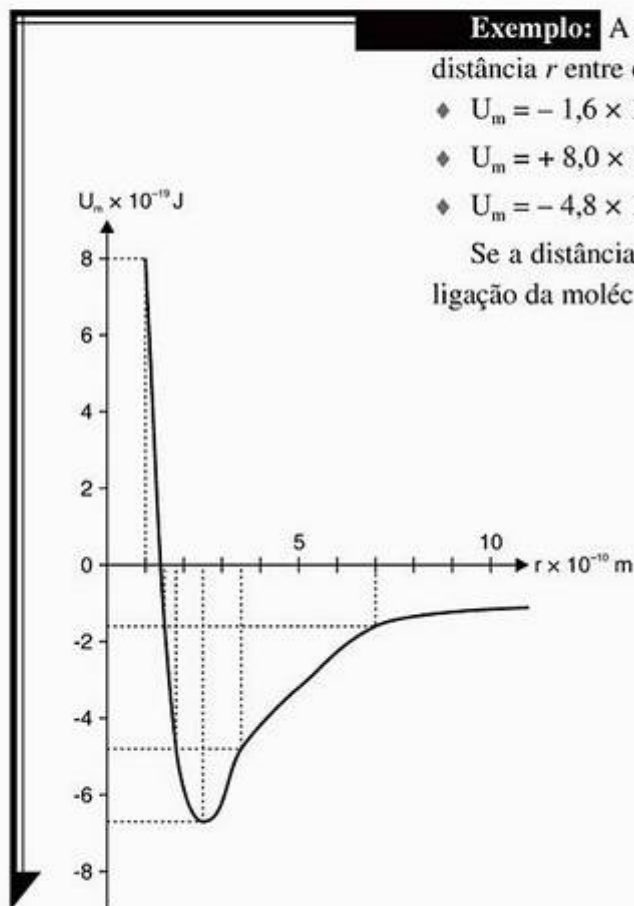
- ♦ $U_m = -1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$, quando $r = 1,5 \times 10^{-10} \text{ m}$ ou $7,0 \times 10^{-10} \text{ m}$
- ♦ $U_m = +8,0 \times 10^{-19} \text{ J}$, quando $r = 1,0 \times 10^{-10} \text{ m}$ e
- ♦ $U_m = -4,8 \times 10^{-19} \text{ J}$, quando $r = 1,8 \times 10^{-10} \text{ m}$ ou $3,5 \times 10^{-10} \text{ m}$.

Se a distância de equilíbrio entre os íons for $2,4 \times 10^{-10} \text{ m}$, e a energia de ligação da molécula $-6,7 \times 10^{-19} \text{ J}$,

- a) faça o gráfico U_m em função de r ;
- b) determine as separações máxima r_s e mínima r_c entre os íons, quando a energia total da molécula for $-3,2 \times 10^{-19} \text{ J}$;
- c) sendo a energia total da molécula $-3,2 \times 10^{-19} \text{ J}$, determine a energia cinética da molécula para $r = 2,5 \times 10^{-10} \text{ m}$, $r = r_s$ e $r = r_c$.

Resolução:

- b) Quando $E = -3,2 \times 10^{-19} \text{ J}$, do gráfico achamos que os íons estarão separados dentro do intervalo $r_c \leq r \leq r_s$, onde $r_s = 5,0 \times 10^{-10} \text{ m}$ e $r_c = 1,8 \times 10^{-10} \text{ m}$.



c) Como $E = K + U_m = -3,2 \times 10^{-19} \text{ J}$, então, para $r = r_s$ e $r = r_c$ teremos $K = E - U_m = 0$.

Quando $r = 2,5 \times 10^{-10} \text{ m}$, do gráfico, achamos $U_m \cong -6,7 \times 10^{-19} \text{ J}$; logo, $K = E - U_m = -3,2 \times 10^{-19} \text{ J} + 6,7 \times 10^{-19} \text{ J} = 3,5 \times 10^{-19} \text{ J}$.



5.5 OUTRAS FORMAS DE ENERGIA: LEI DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Energia térmica

Essa forma de energia é consequência do movimento das moléculas na matéria. Este movimento equivale a uma *agitação molecular* ou, como também é conhecida, *agitação térmica*. Essa agitação dá origem à chamada *energia térmica* da matéria, e ela se manifesta em forma de *calor*. A matéria ficará *aquecida* quando *receber* calor, ou seja, quando sua energia térmica aumentar, e, inversamente, será *esfriada* quando *perder* calor, ou seja, quando sua energia térmica diminuir.

Outro modo de manifestação de energia térmica é a alteração da *temperatura da matéria*. A temperatura aumentará se as moléculas da matéria intensificarem sua movimentação e diminuirá se as moléculas reduzirem a movimentação. Logo, podemos dizer que *a energia térmica equivale à energia cinética gerada pelo movimento das moléculas da matéria*.

Se um corpo com massa m tem sua temperatura alterada em Δt° , a quantidade de calor Q trocada nesse processo será

$$\blacktriangleright \quad Q = m \cdot c \cdot \Delta t^\circ, \quad (5.16)$$

onde c é o calor específico do corpo, e seu valor depende do material que constitui o corpo. Na equação 5.16, o termo $C = mc$ é denominado *capacidade calorífica do corpo* e o interpretamos como a quantidade de calor necessária para elevar em 1°C ou 1 K a temperatura do corpo. A unidade mais usual para Q é a *caloria (cal)*. Para isso, m deve ser expresso em gramas e a temperatura em graus centígrados ($^\circ\text{C}$) ou Kelvin (K). Um múltiplo bastante utilizado dessa unidade é a *quilocaloria (kcal)*, que equivale a mil calorias. Experimentalmente foi determinado que $1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$.

Se um líquido está em equilíbrio termodinâmico e contém *partículas idênticas* suspensas que participam da agitação térmica do meio, então a *energia cinética média* de cada partícula, devido a seu movimento de translação, será dada por

$$\blacktriangleright \quad \langle K \rangle = (3/2) kT, \quad (5.17)$$

onde T é a temperatura absoluta do meio, e $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ é a constante universal de Boltzmann.

Exemplo: Calcule a velocidade média quadrática v_{mq} das moléculas de O_2 (massa molecular = 32) e de N_2 (massa molecular = 28) da atmosfera, cuja temperatura média é $27^\circ C$. (Número de Avogadro $N_0 = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.)

Resolução: A energia cinética de uma partícula com massa m em um meio com temperatura T será $\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT$, onde $\langle v^2 \rangle$ é a média quadrática de v . Logo, a *velocidade média quadrática* da partícula é dada por $v_{mq} = \langle v^2 \rangle^{1/2} = [3kT/m]^{1/2}$.

Como $T = 300 \text{ K}$, então para uma molécula de O_2 $m = (32 \times 10^{-3}/6,02 \times 10^{23}) \text{ kg} \Rightarrow v_{mq} = 4,8 \times 10^2 \text{ m/s}$. E para uma molécula de N_2 $m = (28 \times 10^{-3}/6,02 \times 10^{23}) \text{ kg} \Rightarrow v_{mq} = 5,2 \times 10^2 \text{ m/s}$.

Energia química

Como foi discutido na Seção 5.4, *Energia potencial molecular*, toda molécula possui uma *energia potencial*, de origem eletromagnética, cujo valor depende da interação entre seus átomos. As *forças* que originam essa energia são de *natureza elétrica*. Quando juntamos várias moléculas, é possível originar uma reação química devido à absorção ou emissão de alguma outra forma de energia. Logo, *todas as formas de energia química têm basicamente uma natureza elétrica*.

Como a manutenção de qualquer forma de vida envolve transformações moleculares, a necessária transferência de energia para um ser vivo é realizada através de algumas reações químicas. Por exemplo, no caso das diversas ligações da molécula apresentada na Figura 5.11, o *trifosfato de adenosina (ATP)*, uma grande quantidade de energia potencial está armazenada nela. Essa molécula funciona como o maior *portador* de energia química das células de todos os organismos vivos.

Células vivas capturam, armazenam e transportam energia em forma química, principalmente como ATP. A molécula de ATP pode *transferir energia* a outras biomoléculas durante sua hidrólise, quando a ligação P_i - P_i

terminal é quebrada, como se vê na Figura 5.11. Assim, a energia do ATP deu origem à molécula de *difosfato de adenosina (ADP)*, que é menos rica em energia. Como se vê na Figura 5.12, a molécula de ADP, à custa da energia solar (nas células fotossintéticas) ou da energia química (em células de animais), pode receber um grupo fosfato e constituir uma molécula de ATP. Assim, podemos denominar de *energia biológica* toda energia resultante do processo de transferência de energia química em sistemas biológicos que envolvem as moléculas ATP e ADP.

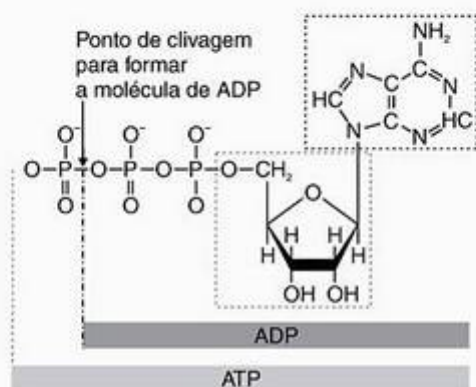


Figura 5.11 Molécula de ATP em sua forma ionizada. Quando esta molécula é hidrolizada, surgem uma molécula de ADP e outra de fosfato (P_i).

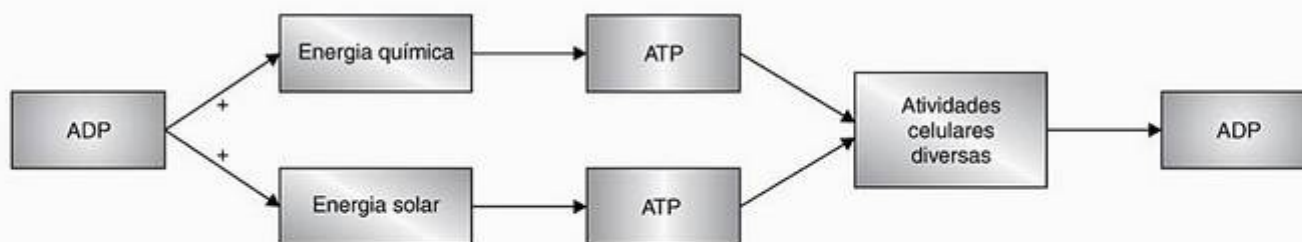


Figura 5.12 As moléculas de ATP são uma fonte de energia que será usada pelas células para realizarem várias funções.

A Figura 5.13 mostra as estruturas das moléculas de ATP, ADP e da molécula de *monofosfato de adenosina* (AMP). Juntamente com a denominação α , β e γ dos grupos fosfatos do ATP.

Na reação $\text{ATP} \rightarrow \text{ADP} + \text{P}_i$, é liberada, para outra reação no organismo, uma energia da ordem de 67 J/g.

As moléculas de ATP são encontradas nas células vivas em concentrações da ordem de 0,5 mg/ml a 5 mg/ml. Essas moléculas são continuamente formadas no interior das células durante os processos de *fermentação*, *respiração* e *fotossíntese*.

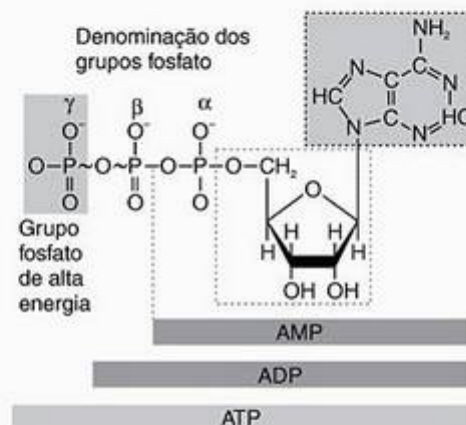


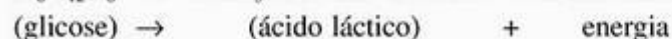
Figura 5.13 Grupos fosfato do ATP, unidos por ligações de alta energia, e as estruturas do ATP, ADP e AMP.

Exemplo: Na reação $\text{ADP} + \text{P}_i \rightarrow \text{ATP}$, são necessárias 7 700 cal para cada mol de ATP sintetizado. A conversão de *glicose* em *ácido láctico* produz uma energia de 52 000 cal/mol. Em uma célula anaeróbica, essa conversão é acoplada à síntese de 2 moles de ATP por mol de glicose. Calcule

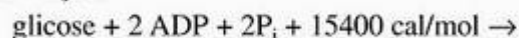
- a energia obtida da reação acoplada total;
- a eficiência do processo na célula anaeróbica.

Resolução:

- Ao serem acopladas, as reações



produzem a reação



Logo, a *energia obtida* será

$$52000 \text{ cal/mol} - 15400 \text{ cal/mol} = 36600 \text{ cal/mol.}$$

- Eficiência = $[\text{energia utilizada}/\text{energia disponível}] \times 100\%$
 $= [15400 \text{ cal}/52000 \text{ cal}] \times 100\% = 29,6\%.$

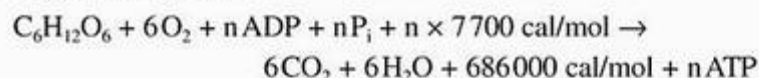
* Note que este valor corresponde à formação da ligação específica $\text{P}_i - \text{ADP}$, e não dos átomos dando origem ao ATP.

Exemplo: Quando a glicose é completamente oxidada a CO_2 e H_2O , é produzida uma energia de 686000 cal/mol. Considerando que a eficiência da célula anaeróbica é 29,6%,

- Quantos moles de ATP por mol de glicose poderiam ser obtidos em um organismo aeróbico, no qual a glicose é completamente oxidada?
- Calcule a energia obtida para a oxidação total acoplada à síntese de ATP.

Resolução:

- A reação da glicose completamente oxidada, acoplada com a síntese de n moles de ATP, produz a reação



A energia total que pode ser obtida é

$$0,296 \times 686000 = 203000 \text{ cal/mol.}$$

Como cada mol de ATP necessita de 7700 cal para sua síntese, obteremos na oxidação completa da glicose

$$203000/7700 = 26 \text{ moles de ATP.}$$

- A *energia obtida* da reação total acoplada será
 $686000 \text{ cal/mol} - 26 \times 7700 \text{ cal/mol} = 485000 \text{ cal/mol.}$

Energia interna e razão metabólica

A *energia interna* I de um sistema está associada às contribuições das energias potencial e cinética de cada parte individual do sistema. Experimentalmente, observamos que a *energia interna* de um sistema aumentará em $-w_{fd}$ quando as *forças dissipativas* realizarem um trabalho w_{fd} sobre o sistema; logo, $\Delta I = -w_{fd}$.

No teorema trabalho-energia, $w = \Delta K$, o trabalho total w pode ser interpretado como $w = w_c + w_{nc}$. Aqui w_c e w_{nc} são os trabalhos devidos à ação das *forças conservativas e não-conservativas*, respectivamente. Por sua vez, o termo w_{nc} pode ser considerado como o resultado de duas contribuições $w_{nc} = w_{fd} + w_{fa}$, ou seja, como resultado do trabalho devido às *forças dissipativas* (w_{fd}) e às *forças aplicadas* (w_{fa}). Logo, o trabalho externo ou o trabalho devido às *forças aplicadas* sobre um sistema será dado por

$$\begin{aligned} w_c = w_{fa} = w_{nc} - w_{fd} = w - w_c - w_{fd} = \\ \Delta K - (-\Delta U) - (-\Delta I) = \Delta(K + U + I) = \Delta E, \end{aligned} \quad (5.18)$$

sendo E energia total do sistema, ou seja, a soma da energia mecânica e interna.

No caso dos seres humanos, assim como no da maioria dos seres vivos, suas fontes de energia são os *alimentos ingeridos*. Essa energia que o ser humano utiliza na realização de suas atividades é gerada através do mecanismo apresentado a seguir.

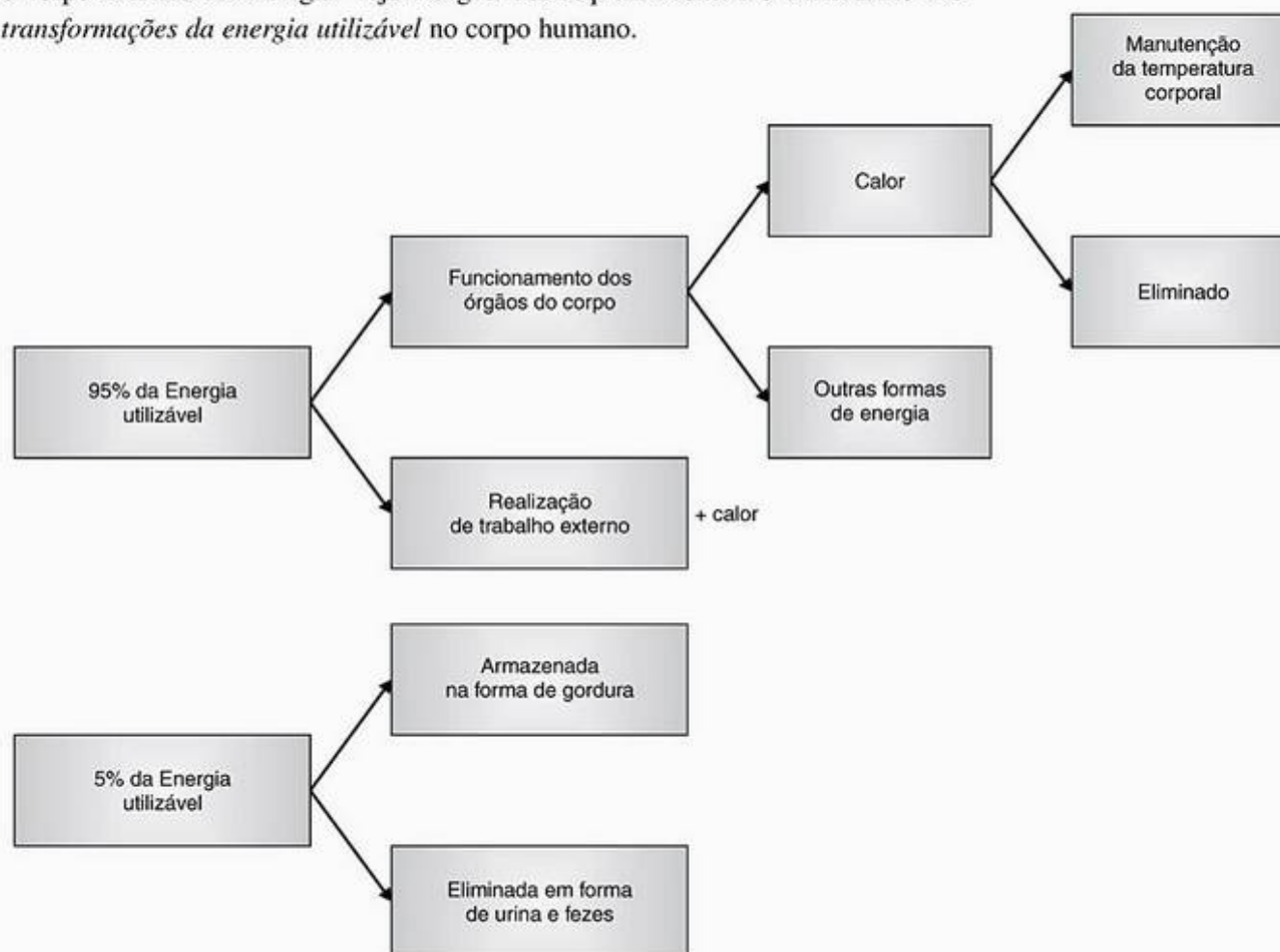


Na Tabela 5.1 são apresentadas as *energias típicas* de alguns nutrientes. E_v , E_{qc} e E_g são, respectivamente, as energias liberadas por unidade de volume de O_2 consumido, por quilograma e por grama.

Tabela 5.1 Energia típica de alguns constituintes dos alimentos.

	$E_v \times 10^3$ (J/litro)	$E_{qc} \times 10^7$ (J/kg)	E_g (kcal/g)
Carboidratos	22,2	1,71	4,1
Proteínas	18,0	1,72	4,1
Gorduras	19,7	3,89	9,3
Dieta típica	20,1 – 20,9	—	—

Nas atividades do corpo humano ocorrem trocas de energia. Mesmo em repouso, o corpo humano usa energia. Veja a seguir um esquema contendo um resumo das *transformações da energia utilizável* no corpo humano.



Utilização de energia pelos vários órgãos do corpo humano

Um humano tem 100 W de potência disponível, podendo usar até $3,6 \times 10^5$ J em uma hora de descanso. De acordo com a Tabela 5.2, usará no funcionamento de seu cérebro $0,23/1,22 \approx 19\%$ desta energia, ou $5,8 \times 10^4$ J, para manutenção de seu esqueleto e funcionamento de seu coração $(0,22 + 0,08)/1,22 \approx 25\%$ desta energia, ou 9×10^4 J, etc.

Tabela 5.2 Consumo de oxigênio e sua contribuição para a taxa metabólica de alguns órgãos de um homem com 65 kg saudável e em repouso

	Massa (kg)	Razão média no consumo de O_2 (ml/min)	Potência consumida TMB (kcal/min)	Potência por kg (kcal/min) /kg RMB	Contribuição como % da TMB
Fígado e baço	—	67	0,33	—	27
Cérebro	1,40	47	0,23	0,16	19
Músculos esqueléticos	28,00	45	0,22	$7,9 \times 10^{-3}$	18
Rim	0,30	26	0,13	0,43	10
Coração	0,32	17	0,08	0,25	7
Restante	—	48	0,23	—	19
	—	250	1,22	—	100

TMB: Taxa de Metabolismo Basal; RMB: Razão de Metabolismo Basal

Tabela 5.3 Razão de Metabolismo Basal (RMB) de alguns seres vivos

	M (kg)	RMB (cal/s·kg)
Cavalo	441	0,131
Porco	128	0,221
Homem	65	0,376
Cão	15	0,588
Camundongo	0,2	0,273

Mesmo em repouso a manutenção das atividades indispensáveis aos organismos vivos requer um consumo de energia. A razão deste consumo com o tempo, ou potência consumida, é denominada *taxa de metabolismo basal* (TMB). Também definimos a *razão de metabolismo basal* (RMB) como a razão entre a TMB e a massa do organismo. Na Tabela 5.3 mostramos alguns valores da RMB.

Exemplo: Uma pessoa, com área corporal total de $2,5 \text{ m}^2$, dormindo 8 horas, apresenta uma razão metabólica de 75 W. A energia gerada no corpo da pessoa devido a sua alimentação é 4,8 kcal por litro de O_2 consumido. Enquanto ela está dormindo, qual será

- a razão de consumo de oxigênio?
- a RMB?

Resolução: Consumo de energia pela pessoa durante as 8 horas em que está dormindo será

$$75 \text{ W} \times 8 \text{ h} \times 3600 \text{ s} = 21,6 \times 10^5 \text{ J} = (21,6 \times 10^5 / 4185) \text{ kcal} = 516,13 \text{ kcal}.$$

O consumo de O_2 neste tempo será $(516,13/4,8) \text{ litros} = 107,52 \text{ litros}$. Logo,

a) a razão de consumo de O_2 é $107,52 \text{ litros} / 8 \times 60 \text{ min} = 0,224 \text{ litro/min}$;

b) a razão de metabolismo basal é $75 \text{ W} / 2,5 \text{ m}^2 = 30 \text{ W/m}^2$.

Realização de trabalho externo

A realização de um trabalho externo (w_e) pelo ser humano está associada ao conceito de *eficiência* η . η é definido pela relação $w_e/(-\Delta I)$ e definimos a *razão total da energia* R utilizada pelo corpo humano para realizar uma atividade externa como

$$\blacktriangleright \quad R = -\Delta I / \Delta t = w_e / \eta \cdot \Delta t = P_m / \eta, \quad (5.19)$$

onde $P_m = w_e / \Delta t$ é a *potência média* com que o ser humano realiza um trabalho. No exemplo da Tabela 5.4, para os músculos do corpo humano $\eta \approx 20\%$; um humano com 76 kg andando de bicicleta tem $\eta \approx 20\%$, porém, se estiver nadando, $\eta \approx 4\%$.

A razão da energia utilizada pelos organismos vivos para realizar uma atividade é denominada *razão ou taxa metabólica*⁽³⁾ (TM), sendo expresso pelo volume de oxigênio consumido por minuto ao realizar a atividade. A cada litro de oxigênio consumido pelo organismo vivo acontece a reação



logo, se uma pessoa, ao andar de bicicleta, consome 1,5 litro de O_2 por minuto, então a potência consumida será $TM = (1,5 \text{ l/m}) \times (20.000 \text{ J/l}) = 500 \text{ J/s} = 500 \text{ W}$. A capacidade máxima de um ser humano para realizar um trabalho é muito variável, sendo proporcional à razão máxima de O_2 consumido no trabalho muscular. A Tabela 5.5 mostra o consumo médio de O_2 para algumas atividades humanas.

Tabela 5.4 Eficiência aproximada (%)

Músculos do corpo humano	20
Andando de bicicleta	20
Nadando embaixo da água	4
Caminhando	3
Nadando na superfície	< 2
Máquina a gasolina	38
Máquina a vapor	17

Tabela 5.5 Consumo de Oxigênio e potência necessária para algumas atividades de um humano

	Consumo de O_2 10^{-3} (litro/s)	Calor produzido kcal/min	W	Consumo de energia $\text{J/m}^2 \cdot \text{s}$
Dormindo	4,0	1,2	83	47,7
Sentado em repouso	5,7	1,7	120	66,8
Em pé relaxado	6,0	1,8	125	72,6
Caminhada lenta ($\approx 1,4 \text{ m/s}$)	12,7	3,8	265	151,1
Andando com bicicleta a 15 km/h	19,0	5,7	400	226,6
Subindo escada a 116 degraus/min	32,7	9,8	685	390,0
Andando com bicicleta a 21 km/h	33,3	10,0	700	395,0
Jogando basquetebol	38,0	11,4	800	450,0

Por exemplo, o membro inferior de um atleta com 70 kg tem massa $m = 10$ kg e, enquanto corre, em cada passada os músculos de seus membros inferiores realizam um trabalho $m \cdot v^2/2 - (-m \cdot v^2/2) = m \cdot v^2$; portanto, para $v = 5$ m/s, o trabalho realizado sobre um membro inferior em cada passada será 250 J. Se, entre dois passos consecutivos com a mesma perna ele avança 2 m, então $2(250 \text{ J/passos})(2,5 \text{ passos/s}) = 1250 \text{ W}$ é a potência consumida pelos dois membros inferiores do atleta nesse tipo de corrida. Considerando que a eficiência dos músculos dos membros inferiores é 25%, então

$$TM = 1250 \text{ W}/0,25 = 5000 \text{ W}.$$

Em 1932, diversas experiências mostraram que a TM no caso dos mamíferos com massa m seguem a lei

$$TM \propto m^{0,75};$$

posteriormente observou-se que a mesma lei também é seguida pelos microorganismos e outros seres vivos menores^(4,5). Quando se considera a TM em função da área A do ser vivo, tem-se

$$TM \propto A^{0,67}.$$

Se para animais com formas semelhantes, porém de tamanhos diferentes, o fator de escala é L , então $TM \propto L^2$, logo a potência máxima consumida por um animal grande é L^2 vezes maior que a de um animal menor.

Perda de calor pelo corpo

São vários os mecanismos para *perda de calor* pelo corpo humano ou de mamíferos em geral. No ser humano, o *hipotálamo* fica no cérebro, sendo o termostato do corpo. Para uma energia de 2400 kcal/dia, a razão de produção de calor é $\approx 1,7 \text{ kcal/min} = 120 \text{ W}$. Portanto, para manter constante sua temperatura, o corpo deve *perder* calor na mesma razão. Essa perda pode ocorrer por radiação, convecção, evaporação ou respiração.

Em condições normais, $\approx 50\%$ da energia trocada é devida à radiação e $\approx 25\%$ é devido à convecção.

Exemplo: A energia resultante da oxidação dos alimentos ingeridos é $\approx 5 \text{ kcal}$ para cada litro de O_2 consumido. A condição respiratória para exercer uma atividade mínima é de 0,5 litro de ar por inspiração, e 11 inspirações por minuto. Como $\approx 20\%$ do ar é constituído por oxigênio e somente $\approx 25\%$ do O_2 inspirado é absorvido e utilizado pelo organismo na condição de repouso, que fração desta energia trocada com os arredores é utilizada para aquecer o ar inspirado, se a temperatura ambiente é -20°C ? (considere que o calor específico do ar é $\approx 0,24 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$ e, a densidade do ar é $1,29 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$).

Resolução: A razão da energia liberada na oxidação dos alimentos ingeridos é

$$(0,5 \text{ litro de ar/insp})(11 \text{ insp/min})(0,2 \times 0,25 \text{ litro de O}_2/\text{litro de ar})(5 \text{ kcal/litro de O}_2) = 1,375 \text{ kcal/min.}$$

Se o organismo, na condição de repouso, encontra-se a 36°C , então a energia necessária para aquecer o ar inspirado em um minuto será

$$(36 + 20)^\circ\text{C}(0,24 \text{ cal/g.}^\circ\text{C})(11 \text{ insp/min})(0,5 \text{ litro de ar/insp})(10^{-3} \text{ m}^3/\text{litro})(1,29 \times 10^3 \text{ g/m}^3) = 0,0954 \text{ kcal/min,}$$

que corresponde a uma fração da energia trocada com os arredores de $(0,0954 \text{ kcal/min})(1,375 \text{ kcal/min}) \times 100\% \approx 7\%$.

5.6 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA NO CORPO HUMANO⁽⁶⁾

Para uma determinada variação de energia interna ΔI do corpo humano é realizada uma certa quantidade de trabalho externo w_e ; a diferença é dissipada em forma de calor, g , aumentando-se a energia interna do ambiente,

$$\therefore -\Delta I = w_e + g. \quad (5.20)$$

Pelo princípio de conservação da energia, o trabalho externo w_e realizado pelo corpo humano é igual à variação da energia total ΔE do sistema. Uma representação esquemática desse princípio é mostrada na Figura 5.14, onde g é a quantidade de calor que é trocada com o ambiente.

ΔI é a variação da energia interna do corpo. Essa variação reflete a quantidade de energia que é liberada por nutrientes ao sofrerem *oxidação*, no interior do organismo; ou uma medida direta da energia liberada por um grama de substância após sofrer combustão no interior de um calorímetro.

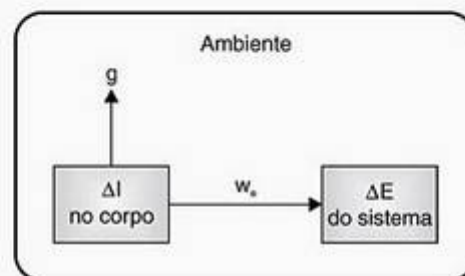
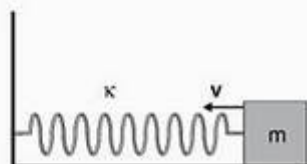


Figura 5.14 Esquema representativo do princípio da conservação da energia.

PROBLEMAS

- Calcule a força da gravidade sobre um astronauta com 80 kg:
 - na superfície da Terra;
 - em uma órbita 200 km acima da superfície da Terra;
 - a meio caminho da Lua, a uma distância de $1,9 \times 10^5$ km do centro da Terra.

2. Estime a velocidade mínima para que uma molécula da atmosfera escape da Terra. Utilizando este resultado, descubra:
 - a) qual das moléculas, H_2 ou O_2 , tem maior probabilidade de escapar da atmosfera;
 - b) qual atmosfera deve ser mais rarefeita, a da Terra ou da Lua? ($\gamma = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$, massa da Terra = $6 \times 10^{24} \text{ kg}$, raio da Terra = $6,4 \times 10^6 \text{ m}$).
3. A massa da Lua é $7,40 \times 10^{22} \text{ kg}$, e seu raio é $1,74 \times 10^6 \text{ m}$. Calcule:
 - a) a aceleração da gravidade na Lua;
 - b) o peso de um astronauta com 80 kg na Lua;
 - c) a velocidade com que um foguete deve ser lançado na superfície da Lua para que possa escapar dela.
4. Estime a velocidade mínima com que um meteoro atinge a atmosfera terrestre. Qual o efeito de fricção devido à resistência do ar sobre o meteoro?
5. A massa do Sol é $2 \times 10^{30} \text{ kg}$, que está a $1,5 \times 10^{11} \text{ m}$ da Terra.
 - a) Encontre a energia potencial gravitacional da Terra devido à força gravitacional do Sol.
 - b) Que velocidade a Terra deveria ter para escapar completamente do Sol?
6. Um atleta com 70 kg e 1,72 m de altura realiza um salto em altura de 2 m. Qual deve ser a velocidade média do atleta, para que 50% de sua energia cinética seja utilizada nesse salto?
7. Em 1994 o atleta *Sergey Bubka* realiza um salto com vara, de 6,14 m de altura. No instante em que inicia o salto, a velocidade do atleta é 10,2 m/s. Se somente 90% da energia cinética do atleta é transferida para a vara, qual deverá ser a eficiência da vara para realizar esse salto?
8. Um bloco de 1 kg colide com uma mola horizontal de massa desprezível e constante elástica $\kappa = 2 \text{ N/m}$. A compressão máxima da mola é de 0,5 m a partir da posição de repouso. Considerando desprezível a força de atrito, qual é o valor da velocidade do bloco no instante da colisão?
9. Uma gaiola para pássaros, de 0,5 kg, pendurada na extremidade de uma mola, abaixou sua altura em 4 cm. A gaiola é puxada para 2 cm abaixo da posição de equilíbrio depois solta. Calcule:
 - a) o valor da constante de mola;
 - b) a frequência de oscilação da gaiola em torno da posição de equilíbrio;
 - c) a energia mecânica da gaiola;
 - d) a velocidade da gaiola ao passar pela posição de equilíbrio.
10. Uma tartaruga com 2 kg é solta a uma altura de 0,4 m e cai sobre uma plataforma sustentada por uma mola vertical, cuja constante de força vale 1960 N/m. Determine o valor da compressão máxima da mola.
11. $F = q^2/4\pi\epsilon r^2$ é a força de atração entre duas partículas com cargas elétrica $+q$ e $-q$, separadas por uma distância r , sendo ϵ a permissividade elétrica do meio. A energia potencial correspondente a essa força é $U(r) = -q^2/4\pi\epsilon r$. Neste caso foi

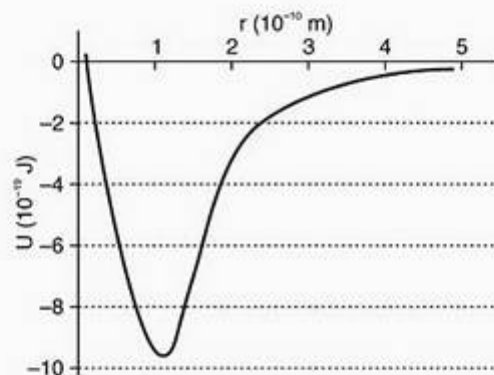


escolhida uma distância infinita como sendo o ponto em que a energia potencial é nula, ou seja, $U(\infty) = 0$.

- Faça um gráfico de U em função da distância r entre as cargas elétricas.
- Suponha que a energia total E do sistema seja conhecida. Se $U(a) = E$, sendo $E < 0$, a que valores de r estão limitados os movimentos dessas partículas?
- Qual seria o menor valor de E para que as duas partículas pudessem se separar definitivamente?

12. A variação da energia potencial de uma molécula de ácido fluorídrico em função da distância r entre os átomos de hidrogênio e flúor é apresentada a seguir. Calcule:

- para quais valores de r os átomos se atraem ou se repelem;
- o valor da energia potencial quando a distância entre os átomos for muito grande ($r \rightarrow \infty$).



- Suponha que um átomo de H, que se encontra a $1,5 \times 10^{-10}$ m de um átomo de F, possua uma energia cinética de $4,0 \times 10^{-19}$ J e que a energia cinética do átomo de F seja desprezível. Utilize a figura do problema 12 para calcular:
 - a energia potencial dessa molécula referente à distância mencionada;
 - a distância máxima possível entre os dois átomos;
 - verifique se, nessas condições, estes dois átomos constituem uma molécula de ácido fluorídrico.
- A energia total de uma molécula de ácido fluorídrico é $-9,5 \times 10^{-19}$ J, estando ambos os átomos praticamente em repouso. A partir da figura do problema 12:
 - calcule a energia mínima que deve ser fornecida à molécula de ácido fluorídrico para obter sua dissociação;
 - nesse caso, descubra qual o trabalho realizado pela força de atração entre os dois átomos;
 - calcule a energia liberada na formação de um mol de ácido fluorídrico.
- Se a alimentação de uma pessoa corresponder à energia de 2,4 kcal por dia e se toda esta energia for convertida em calor, determine:
 - a taxa média de energia liberada em watts;
 - a quantidade necessária de pessoas em um quarto, liberando esta taxa de calor, para liberar a mesma energia que um aquecedor elétrico de 1500 W libera.
- A evaporação do suor é um mecanismo importante no controle da temperatura em animais de sangue quente. Que massa de água deverá evaporar da superfície de um corpo humano com 80 kg para resfriá-lo 1 °C? (calor específico do corpo humano ≈ 1 cal/ g. °C e o calor latente de vaporização da água a 37 °C é de 577 cal/g).

17. Partículas com massa $7,5 \times 10^{-17}$ kg estão suspensas em um líquido a 17°C . Calcule a velocidade média quadrática dessas partículas.
18. A velocidade média quadrática das moléculas de N_2 , em determinado meio, é 1500 m/s a 0°C . Calcule a velocidade média quadrática de partículas coloidais com massa molecular 3×10^3 kg/mol em suspensão nesse meio.
19. Se a temperatura do N_2 é 300 K, então calcule, em J e eV, a energia cinética média das moléculas desse gás.
20. Qual composto produziria maior quantidade de ATP por mol, ao sofrer oxidação completa a $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}$, um ácido graxo com 6 carbonos (por exemplo, ácido n-hexanóico) ou um glicídio com 6 carbonos (por exemplo, frutose)?
21. Nas seguintes reações químicas são liberadas, respectivamente, energias de 52 e 686 kcal/mol:



- a) Calcule a energia produzida na oxidação completa do ácido láctico a CO_2 e H_2O .
 - b) Quantos moles de ATP poderiam ser sintetizados no processo com eficiência de 40%?
22. Nas reações químicas seguintes são produzidas, respectivamente, energias de 55 e 686 kcal/mol:



Calcule o número de moles de ATP que poderia ser sintetizado a partir de ADP + P_i , pela oxidação completa de 1 mol de etanol a $2\text{CO}_2 + 3\text{H}_2\text{O}$. Considere uma eficiência de conservação de energia de 44% sob condições-padrão.

23. Cada fóton de luz tem uma energia hc/λ , onde $h = 6,627 \times 10^{-34}$ J.s = $1,58 \times 10^{-34}$ cal.s é a constante de Planck; c é a velocidade da luz e λ o comprimento de onda da luz. A energia de 1 einstein de fótons é dado por $\xi = Nhc/\lambda$, onde $N = 6,023 \times 10^{23}$ fótons/einstein. Calcule:
 - a) a quantidade de moles de ATP que pode ser sintetizada com eficiência máxima por um organismo fotossintético, quando absorve 1 einstein de luz vermelha com $\lambda = 700$ nm;
 - b) a quantidade de moléculas de ATP que poderia ser produzida com energia equivalente a um fóton;
 - c) a eficiência total para a conversão de energia, quando 1 mol de ATP é formado com a energia de 2 einsteins de fótons de luz vermelha.
24. Supondo que o valor calórico da dieta de uma pessoa seja 4,9 kcal/g, calcule:
 - a) a energia dispendida por esta pessoa ao percorrer 10 km passeando;
 - b) a quantidade de alimentos dessa dieta necessária para que ela reponha a energia utilizada.

25. Um homem com 70 kg subiu a pé, em 3 horas, uma montanha com 1 000 m de altura. Durante a subida, este homem consumiu O_2 com taxa de 2 litros/min. A metabolização de uma dieta típica libera 4,9 kcal por litro de O_2 . Sendo $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, calcule:
- o trabalho externo realizado pelo homem;
 - a potência média com que foi realizado esse trabalho;
 - a eficiência com que foi realizado o trabalho externo calculado no item (a);
 - a quantidade de energia transformada em calor pelo corpo do homem;
 - quanto este homem precisa ingerir para recuperar a energia usada pelo corpo.
26. As eficiências metabólicas de duas pessoas são respectivamente 75% e 60%. Sua dieta típica é de 6000 kcal e ambas realizam trabalho externo total de 3 600 kcal por dia. Aproximadamente, como variará sua massa corporal?
27. Em que porcentagem aumentará sua taxa metabólica, se a temperatura de seu corpo passar de 37°C para 39°C ?
28. Se o corpo de uma pessoa tem uma superfície efetiva de $1,2 \text{ m}^2$ e se a temperatura de sua pele for 34°C , então calcule a razão com que o corpo perde calor para manter a temperatura do ar a 25°C .
29. Admitindo que os músculos têm uma eficiência de 22% para converter energia em trabalho, quanta energia é gasta por uma pessoa com 80 kg ao subir uma distância vertical de 15 m?
30. Todo dia um homem com 70 kg usa aproximadamente 2500 kcal de suas reservas energéticas. (A quantidade exata depende da atividade física desenvolvida pelo homem, ou seja, do trabalho realizado.) Se 1 kcal equivale a 4 185 J. Qual será sua taxa metabólica ou consumo de energia por dia?
31. A potência de um ciclista deslocando-se com velocidade constante de 6.0 m/s em uma estrada plana é de 120 W.
- Calcule a força de atrito exercida pelo ar sobre o ciclista.
 - Debruçando-se no guidão, o ciclista reduz a resistência do vento para 18 N. Se, nestas condições, ele mantiver a mesma potência, qual será sua velocidade?
32. Quando uma pessoa está desperta, mas em repouso absoluto, sua taxa metabólica basal é proporcional à área da superfície corporal total. Uma pessoa cuja área corporal total é $1,7 \text{ m}^2$ consome 15 litros de O_2 por hora, quando está em completo descanso. (Considere que o O_2 consumido reage com os carboidratos, gorduras e proteínas do corpo, liberando em média 4,8 kcal de energia por litro de O_2 consumido.) Determine:
- a taxa metabólica basal;
 - a razão de metabolismo basal.
33. A razão de metabolismo basal (RMB) para um organismo é, por definição, independente de seu tamanho. Qual a RMB para uma pessoa com uma superfície corporal de $2,2 \text{ m}^2$, que consome 0,30 litros de O_2 por minuto?

34. Qual a razão de consumo de O_2 para uma pessoa durante o sono, admitindo-se uma taxa metabólica basal de 75 W?
35. Um corredor consome O_2 a uma razão de 4,1 l/min. Qual sua taxa metabólica?
36. Para um cavalo com 500 kg, determine:
 - a) a taxa metabólica;
 - b) a quantidade mínima de alimento de que ele necessita por dia, supondo que o valor calórico de sua dieta seja 5 kcal/g.

Referências Bibliográficas

1. CAVAGNA, N. A.; WILLEMS, P.A.; HEGLUND, N.C. The role of gravity in human walking: pendular energy exchange, external work and optimal speed. *J. Physio. London*. v. 28, n. 3, p. 657-668, Nov, 2000.
2. NATHAN, A.M. Baseball pitches. *Scientific American*. v. 277, n. 3, p. 102-103, Sep, 1997.
3. WARD, S.; MOOLER, U. et al. Metabolic power, mechanical power and efficiency during wind tunnel flight by the European starling *Sturnus vulgaris*. *J. Exp. Biol.* v. 204, n. 19, p. 3311-3322, Oct, 2001.
4. McMAHON, T.A. Size and shape biology. *Science*, v. 179, n. 4079, p. 1201-1204, 1973.
5. SCHMIDT-NIELSEN, K. Locomotion-energy cost of swimming, flying and running. *Science*. v. 177, n. 4045, p. 222, 1972.
6. WILLEMS, P.A.; CAVAGNA, G. A.; HEGLUND, N.C. External, internal and total work in human locomotion. *J. Exp. Biol.* v. 198, n. 2, p. 379-393, Feb, 1995.

Capítulo 6

Fluidos, Tensão Superficial, Capilaridade e Transporte em um Meio Infinito



6.1 INTRODUÇÃO

Na natureza, a matéria apresenta-se nos estados sólido, líquido ou gasoso. Nos estados líquido ou gasoso, a matéria é denominada *fluido*, não tendo forma definida (como acontece no estado sólido). Enquanto, no estado líquido, o volume da matéria pode ser definido, no estado gasoso pode não acontecer o mesmo. A densidade ρ é uma quantidade muito importante para caracterizar a matéria. Em geral, para um fluido, $\rho = f(P, T)$ é uma função da pressão P e da temperatura T do fluido.

A água é encontrada nos três estados. No estado líquido, a uma temperatura de 0°C e pressão de 1 atmosfera, sua densidade ρ_a tem o valor

$$\rho_a = 1000 \text{ kg/m}^3 = 1 \text{ kg/l} = 1 \text{ g/cm}^3.$$

Qualquer corpo com densidade ρ , ao ser colocado sobre a água, *submergirá* se $\rho > \rho_a$ ou *flutuará* se $\rho < \rho_a$. Por exemplo, a uma pressão de 1 atmosfera, temos o resultado abaixo.

	$\rho_{\text{liq}} \times 10^3 \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$\rho_{\text{gas}} \text{ (kg/m}^3\text{)}$
Água pura	1,00 (0°C)	0,596 (100°C)
Ar	1,14 (-183°C)	1,3 (0°C)
Sangue	1,05 (37°C)	

Uma propriedade muito utilizada para avaliarmos os efeitos de um fluido é a *pressão* P produzida pelo fluido sobre os materiais que estão em torno dele. Como, por definição, a *pressão* é a força exercida pelo fluido por unidade de área, sua unidade no SI será $\text{N/m}^2 = 1$ pascal (Pa). Além do pascal, existem outras unidades em uso para quantificar a pressão, como listamos a seguir:

- ♦ *Bar*: muito utilizado na meteorologia, $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.
- ♦ *Torricelli*: muito utilizado na tecnologia de vácuo, $1 \text{ torr} = 133,3 \text{ Pa}$.
- ♦ *Libra por polegada quadrada*: mais utilizada na engenharia, $1 \text{ lb/pol}^2 = 6,89 \times 10^3 \text{ Pa}$.
- ♦ *Centímetros de água*: $1 \text{ cm de H}_2\text{O} = 98 \text{ Pa}$.
- ♦ *Milímetros de mercúrio*: $1 \text{ mm de Hg} = 133,3 \text{ Pa}$.

6.2 PRESSÕES ATMOSFÉRICA E HIDROSTÁTICA

Todo corpo que se encontra sobre ou acima da superfície terrestre experimenta uma *pressão* da *atmosfera* ou peso do ar. Cada metro quadrado da superfície terrestre *ao nível do mar* experimenta uma força, correspondente ao peso do ar, da ordem de 10^5 N. A pressão produzida por essa força é denominada *uma atmosfera* (1 atm), e seu valor no SI é $1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$.

Na Figura 6.1 apresentamos um gráfico da altura em que se encontra um corpo em relação ao nível do mar em função do percentual de ar atmosférico que o corpo suporta a essa altura. Nesse gráfico, observamos que todo corpo que se encontra a uma altura de 16 km sobre o nível do mar suportará aproximadamente 10% do ar atmosférico.

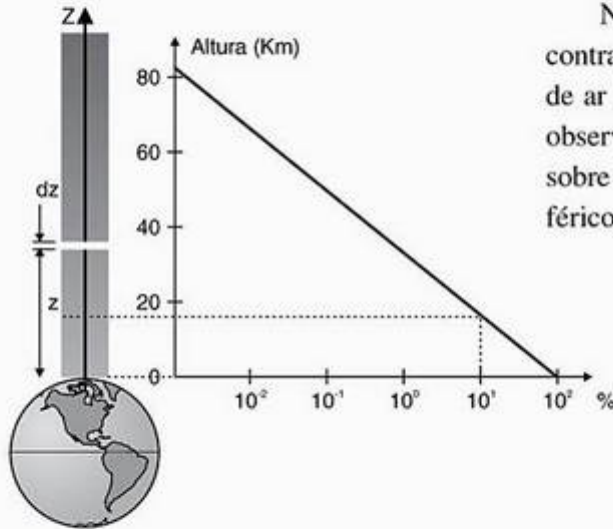


Figura 6.1 Como a densidade do fluido atmosférico diminui conforme nos afastamos da Terra, a pressão atmosférica dependerá da distância em relação à superfície terrestre.

Sabemos que a *densidade* ρ do ar diminui com o aumento da altura em relação ao nível do mar. A variação de ρ pode ser considerada proporcional ao valor da pressão P do fluido; logo, $\rho = kP$, onde $k = k(T)$ e T é a temperatura absoluta do fluido.

Para determinarmos a *pressão atmosférica* P_a a uma altura z acima do nível do mar, admitimos que um elemento de espessura dz que se encontra a uma altura z experimenta a variação de pressão $dP = -\rho \cdot g \cdot dz$ (esta relação está mostrada na dedução da equação 6.2); logo, $dP = -k \cdot P \cdot g \cdot dz$,

$$\Rightarrow \int_{P_0}^{P_a} \frac{dP}{P} = -kg \int_0^z dz \Rightarrow P_a = P_0 e^{-kgz}, \quad (6.1)$$

onde P_0 é a pressão atmosférica em $z = 0$, ou seja, na superfície terrestre ao nível do mar. Note que, para chegarmos à equação (6.1), é necessário que $k = k(T)$ não dependa da pressão; assim, a pressão atmosférica *diminuirá exponencialmente* conforme nos afastamos da superfície terrestre.

Quando um corpo com massa m e densidade ρ é introduzido em um líquido com densidade ρ_0 , ele sofre uma pressão devido ao fluido. O valor dessa pressão dependerá da distância do corpo em relação à superfície do líquido e do valor ρ_0 . De acordo com a Figura 6.2, se o paralelepípedo retangular de espessura Δy estiver em equilíbrio, então, $F_1 + m \cdot g = F_2$.

Se P_1 e P_2 forem as pressões exercidas pelo fluido a uma distância y_1 e y_2 do nível superior do fluido, respectivamente, então as forças, devido ao fluido, sobre as superfícies de área A do corpo em relação às distâncias y_1 e y_2 , serão $F_1 = AP_1$ e $F_2 = AP_2$. Como a massa do corpo é $\rho \cdot A \cdot \Delta y$, então

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \rho \cdot g \cdot \Delta y.$$

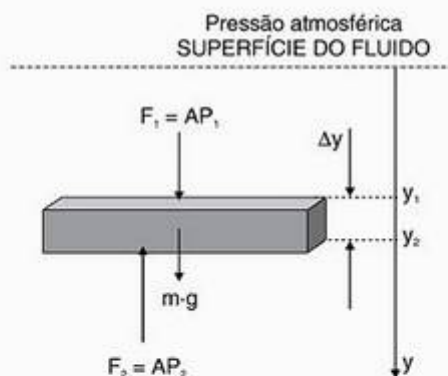


Figura 6.2 Para determinarmos a pressão do fluido a uma distância y de sua superfície, introduzimos um corpo uniforme no interior do fluido. Posteriormente, fazemos com que a espessura $\Delta y \rightarrow 0$.

Quando o corpo tem dimensões infinitesimais, e se ele for idêntico ao fluido, ou seja, se $\rho = \rho_0$, teremos que $(dP/dy) = \rho_0 \cdot g$. Logo, a *pressão absoluta* do fluido a uma profundidade y , em relação a seu nível superior, será

$$P = P_0 + \rho_0 \cdot g \cdot y. \quad (6.2)$$

Aqui, P_0 é a pressão na superfície do fluido, sendo, normalmente, a *pressão atmosférica*. ρ_0 foi considerado independente da pressão e da temperatura. A quantidade $(P - P_0)$ é denominada *pressão padrão* ou *pressão manométrica**.

Os medidores de pressão mais utilizados são o barômetro e o manômetro de mercúrio. Nesses aparelhos, a pressão exercida por uma coluna de 1 mm de mercúrio é denominada 1 torricelli (1 Torr); logo, 1 mm de mercúrio = 133,3 Pa.

Aplicação: Variação da pressão arterial no corpo humano

No coração do homem, durante a *contração (sístole)*, a pressão máxima é próxima de 120 mm de Hg e, durante o *relaxamento (diástole)*, é próxima de 80 mm de Hg. Na *contração*, o sangue sai do ventrículo esquerdo com pressão máxima e, depois de percorrer o corpo, ele retorna ao átrio direito com uma pressão quase nula.

O sangue circula através de artérias ou veias. Em uma mesma parte do corpo humano, as pressões arterial e venosa apresentam valores cuja diferença é de aproximadamente 100 mm de Hg.

Em alguma parte do corpo humano, que se encontra a uma distância h do centro do coração, a *pressão arterial* é calculada a partir da equação (6.2)

$$P = P_{\text{cor}} - \rho_s \cdot g \cdot h,$$

onde $\rho_s \approx 1,055 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ é a densidade do sangue e P_{cor} é a pressão no coração.

Na Figura 6.3 apresentamos um homem com 1,80 m de altura e os valores, em mm de mercúrio, das pressões arterial e venosa** em quatro pontos do corpo. Por exemplo, se a distância entre o centro da cabeça e o coração deste homem for 0,55 m, a pressão arterial na cabeça será

$$P_{\text{cab}} = 100 \text{ torr} - (1,055 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9,8 \text{ m/s}^2)(0,55 \text{ m})(1 \text{ torr}/133,3 \text{ Pa}) = 100 \text{ torr} - 42,66 \text{ torr} = 57,34 \text{ torr}.$$

No caso das girafas, a cabeça está a 2,5 m acima do coração, logo

$$P_{\text{cor}} - P_{\text{cab}} = (1,055 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9,8 \text{ m/s}^2)(2,5 \text{ m})(1 \text{ torr}/133,3 \text{ Pa}) = 193,9 \text{ torr}.$$

Como $P_{\text{cab}} \approx 59,6 \text{ torr}$, então $P_{\text{cor}} \approx 253,5 \text{ torr}$ (valor muito maior do que a de outros mamíferos). Nas girafas, os valores das pressões sistólica e diastólica assumem valores encontrados dentro dos intervalos $200 \text{ torr} < P_{\text{sis}} < 300 \text{ torr}$ e $100 \text{ torr} < P_{\text{dia}} < 170 \text{ torr}$, respectivamente.

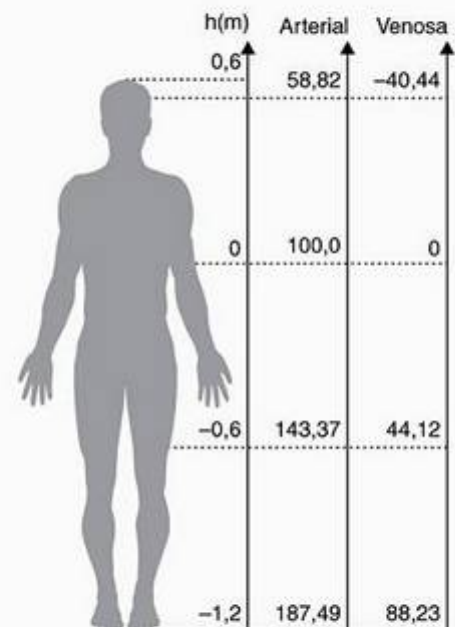


Figura 6.3 Valores, em mm Hg, das pressões arterial e venosa de um homem com 1,80 m de altura.

* Esta é a expressão da 3ª Lei de Pascal.

** As pessoas que têm em casa esfigmomanômetro (medidor de pressão arterial) eletrônico devem calibrá-lo periodicamente.

Flutuação: o princípio de Arquimedes

Quando um corpo com volume V e massa m está flutuando dentro de um líquido com densidade ρ , a massa do fluido deslocado por este corpo será $\rho \cdot V$. Logo, o peso do fluido deslocado será $\rho \cdot g \cdot V$. De acordo com o princípio de Arquimedes *o empuxo, ou força de flutuação, exercido por um fluido sobre um objeto é igual ao peso do fluido deslocado pelo objeto*. Assim, o corpo experimenta um empuxo cuja magnitude é $E = \rho \cdot g \cdot V$.

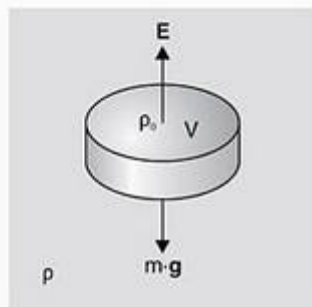


Figura 6.4 Um corpo com densidade ρ_0 , ao flutuar em um fluido com densidade ρ , experimentará um empuxo E .

Na Figura 6.4 apresentamos um corpo com densidade ρ_0 , flutuando dentro de um líquido com densidade ρ . A força total exercida sobre este corpo será $F = E - m \cdot g$. A magnitude dessa força é $F = \rho \cdot g \cdot V - \rho_0 \cdot g \cdot V = (\rho - \rho_0) g \cdot V$.

Quando $\rho > \rho_0$, o sentido de F é para cima; portanto, o objeto flutuará. Se, em uma situação de equilíbrio, somente uma fração V' do corpo de volume V estiver dentro do fluido; então $\rho \cdot g \cdot V' = \rho_0 \cdot g \cdot V$ ou $V'/V = \rho_0/\rho$.

Toda vez que um peixe com massa m está em repouso dentro da água, a força total sobre ele é nula; portanto, $E = m \cdot g$. Como $E = \rho_a \cdot g \cdot V$ e $m = \rho_p \cdot V$, então $\rho_a = \rho_p$.

Ou seja, as densidades da água e do peixe serão as mesmas. Alguns peixes possuem uma bexiga natatória que lhes permite modificar sua densidade. Assim, eles podem ficar em repouso toda vez que quiserem.

Exercício: Qual é a pressão atmosférica sobre uma cidade localizada a 1 500 m acima do nível do mar? Considere que $1,0 \text{ kg/m}^3$ é a densidade do ar nessa cidade.

Resolução: Na Figura 6.1 observamos que $z = 1,5 \text{ km}$ corresponde a uma *pequena variação* da densidade do fluido atmosférico. Logo, a equação 6.1 pode ser aproximada da forma

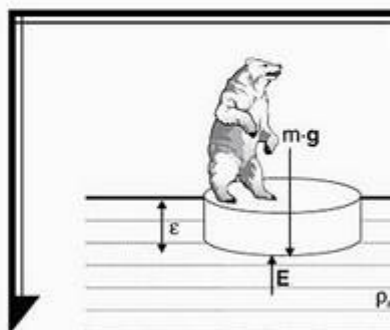
$$P_a = P_0[1 - k \cdot g \cdot z + \dots] \cong P_0 - P_0 k \cdot g \cdot z.$$

Usando-se os argumentos que nos levaram à equação (6.2), teremos

$$P_0 k \cdot g \cong \rho_0 \cdot g \text{ ou}$$

$$k \cong \rho_0/P_0 = (1,0 \text{ kg/m}^3)/(1,013 \times 10^5 \text{ Pa}) = 0,9872 \times 10^{-5} \text{ s}^2/\text{m}^2.$$

$$\therefore P_a = P_0 \exp(-0,9872 \times 10^{-5} \times 9,8 \times 1\,500) = P_0 \exp(-0,145) \\ = 0,8649 P_0 = 0,865 \text{ atm} = 0,876 \times 10^5 \text{ Pa}.$$



Exercício: Um urso polar com 300 kg encontra-se sobre um bloco de gelo ($\rho_g = 0,917 \text{ g/cm}^3$) com 50 cm de espessura. Qual deve ser a área da seção transversal do bloco para que o mesmo flutue totalmente na água ($\rho_a = 1,018 \text{ g/cm}^3$)?

Resolução: O volume do bloco de gelo será $V = \epsilon A$, onde ϵ é a espessura do bloco e A a área de sua seção transversal. O peso do fluido deslocado pelo bloco será $\rho_a \cdot g \cdot \epsilon \cdot A$, que é igual ao empuxo E exercido pelo fluido

sobre o bloco de gelo. Como o peso do bloco é $\rho_g \cdot g \cdot \epsilon \cdot A$, então a condição de equilíbrio implica em que $m \cdot g + \rho_g \cdot g \cdot \epsilon \cdot A = \rho_a \cdot g \cdot \epsilon \cdot A$.

$$\text{Logo, } A = m / \epsilon (\rho_a - \rho_g) = 300 \text{ kg} / 0,5 \text{ m} (1018 - 917) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 5,94 \text{ m}^2.$$

Exercício: O plasma flui de uma bolsa através de um tubo até a veia de um paciente. A bolsa encontra-se 1,5 m acima do braço do paciente. Calcule:

- Qual é a pressão do plasma ao entrar na veia?
- Se a pressão sangüínea na veia for 12 mm de Hg, qual é a altura mínima em que a bolsa deve ser suspensa para que o plasma flua para dentro da veia?
- Supondo que um astronauta precise fazer uma transfusão sangüínea na Lua, qual deve ser a altura mínima da bolsa nesse caso? ($\rho_{\text{plasma}} = 1,05 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ e $g_{\text{lua}} = 1,63 \text{ m/s}^2$.)

Resolução:

- A pressão exercida pelo plasma ao entrar na veia será a pressão manométrica $\rho_{\text{plasma}} \cdot g \cdot h = 1,05 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9,8 \text{ m/s}^2 \times 1,5 \text{ m} = 1,54 \times 10^4 \text{ Pa} = 115,8 \text{ mm de Hg}$.
- Se a pressão na veia for 12 mm de Hg = $1,6 \times 10^3 \text{ Pa}$, a altura mínima em relação ao braço em que deve ser suspensa a bolsa com plasma satisfaz a relação $\rho_{\text{plasma}} \cdot g \cdot h_{\text{mín}} = 1,6 \times 10^3 \text{ Pa}$; logo, $h_{\text{mín}} = 0,155 \text{ m}$.
- No caso de o paciente encontrar-se na Lua, a altura mínima em relação ao braço em que deve ser suspensa a bolsa com plasma será $h_{\text{mín}} = 1,6 \times 10^3 \text{ Pa} / (\rho_{\text{plasma}} g_{\text{lua}}) = 0,935 \text{ m}$.

Exemplo: Qual é a pressão de um fluido a uma profundidade de 10 m

- em um lago ($\rho_l = 1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$)? e
- no mar ($\rho_m = 1,025 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$)?

Resolução: Usando-se a equação 6.2, teremos que a pressão em cada caso será:

$$\begin{aligned} \text{a) No lago: } P_0 + \rho_l \cdot g \cdot h &= P_0 + 1,0 \times 10^3 \times 9,8 \times 10 \text{ Pa} \\ &= 1,99 \times 10^5 \text{ Pa} = 1,97 \text{ atm.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) No mar: } P_0 + \rho_m \cdot g \cdot h &= P_0 + 1,025 \times 10^3 \times 9,8 \times 10 \text{ Pa} \\ &= 2,02 \times 10^5 \text{ Pa} = 1,99 \text{ atm.} \end{aligned}$$



6.3 TENSÃO SUPERFICIAL E ATRAÇÃO CAPILAR

Em um líquido, as *forças atrativas* entre suas moléculas são suficientes para manter o fluido em um estado condensado, exibindo uma superfície. Essas forças entre moléculas do mesmo tipo e próximas entre si são denominadas *forças coesivas*, e elas são muito importantes nos fenômenos associados com a superfície do líquido. As partículas da superfície experimentam uma força resultante média dirigida para seu interior. Podemos dizer que a origem dessa força é uma energia potencial da superfície. Essa energia potencial por unidade de área define uma propriedade intrínseca do líquido, que é denominada *tensão superficial* γ .

A tensão superficial também é uma medida do trabalho necessário por unidade de área para aumentar a superfície do líquido. No SI, a quantidade γ tem unidades de J/m^2 ou N/m .

Tabela 6.1 Valores de tensão superficial de líquidos em temperaturas diferentes.

Líquido – Ar	γ (N/m)
água (100 °C)	0,0589
água (37 °C)	0,0700
água (20 °C)	0,0728
água (0 °C)	0,0756
mercúrio (20 °C)	0,0465
sangue (37 °C)	0,0580

Os valores de γ para um líquido dependem do fluido gasoso com o qual o líquido forma interface. Na Tabela 6.1, apresentamos alguns valores representativos de γ .

Toda superfície de um líquido possui uma característica semelhante a uma membrana elástica esticada. A força necessária para se *romper* a superfície de um líquido pode ser medida. A Figura 6.5 mostra o *efeito* de uma força vertical F que puxa para cima, da superfície do líquido, uma estrutura de arame em forma de cone com peso $m \cdot g$. A força de tensão superficial T_γ pode ser expressa em função da diferença entre a força máxima F necessária para libertar o cone do líquido e o peso $m \cdot g$ do cone:

$$\blacktriangleright \quad T_\gamma = F - m \cdot g. \quad (6.3)$$

A magnitude de T_γ é proporcional ao *comprimento* l do cone que é puxado através da superfície, ou seja, $T_\gamma \propto l$, ou $T_\gamma = \gamma l$, sendo o valor da constante γ uma característica do líquido.

Toda informação sobre a intensidade das forças intermoleculares está contida na constante γ , que é o *parâmetro da tensão superficial* do líquido, que é diferente para cada líquido.

A *tensão superficial* dos líquidos tem um papel importante no funcionamento dos pulmões⁽¹⁾ e da traquéia dos insetos e permite explicar o movimento e a corrida de seres vivos sobre a água⁽²⁾.

A Figura 6.6 mostra a pata de um inseto pisando em um líquido cuja tensão superficial é γ . Se f_γ é a força devido a essa tensão que age no comprimento δl da circunferência, definindo a *curva de nível*, então a intensidade dessa força será

$$f_\gamma = \gamma \cdot \delta l.$$

Para encontrarmos a *força total* T_γ devida à tensão superficial, devemos ainda considerar que

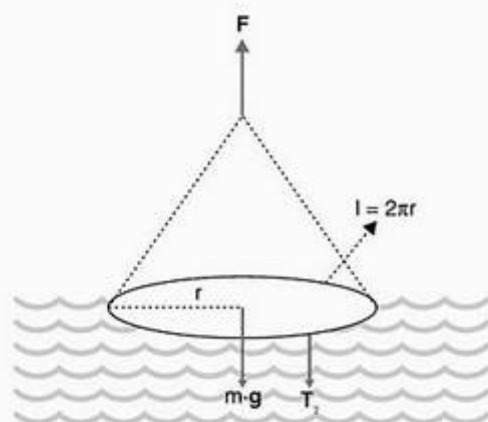


Figura 6.5 Conjunto de forças que agem sobre o cone que é puxado pela força externa F da superfície de um líquido.

$$\sum f_{yx} = \sum f_y \sin \theta = \sum \gamma \cdot \delta l \sin \theta = 0$$

$$\sum f_{yy} = \sum f_y \cos \theta = \sum \gamma \cdot \delta l \cos \theta = 2\pi r \gamma \cos \theta.$$

Logo,

$$\blacktriangleright T_y = 2\pi r \gamma \cos \theta. \quad (6.4)$$

Essa força equilibra a fração do peso do inseto que é suportada por essa pata.

Outro efeito bastante conhecido, devido à tensão superficial de um líquido, é a capacidade que ele tem para subir ou descer dentro de um tubo com diâmetro muito pequeno, aparentemente violando a ação da gravidade. Esse efeito é denominado *ação capilar* ou *capilaridade*.

Quando há capilaridade, o líquido dentro do capilar alcança uma determinada altura e a superfície do líquido no interior do capilar apresenta uma curvatura que define um ângulo denominado *ângulo de contato* ⁽³⁾. As Figuras 6.7a e 6.7b apresentam a *ação capilar* ao se introduzir um tubo fino com extremidades abertas dentro da água ou do mercúrio, respectivamente.

O ângulo de contato θ e a altura a que o líquido *sobe* ou *desce* dentro do tubo dependerão da intensidade relativa das forças coesivas F_c entre as moléculas do líquido e também das forças adesivas F_a entre as moléculas do líquido e as do material do tubo.

Se a força coesiva F_c for

- ♦ $< F_a$, então o líquido *subirá* dentro do tubo;
- ♦ $> F_a$, o líquido *descerá* dentro do tubo.

Assim, teremos, respectivamente, $\theta < 90^\circ$ e $\theta > 90^\circ$.

A Figura 6.8 apresenta as forças que agem no líquido com densidade ρ , quando se *eleva* a uma altura h dentro do tubo com raio r . De acordo com a equação (6.4), a força vertical resultante devido à tensão superficial será $T_y = 2\pi r \gamma \cos \theta$, e o peso da coluna de líquido com altura h será dado por $m \cdot g = \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot g$. Como o líquido está em repouso, teremos $T_y = m \cdot g$

$$\blacktriangleright \therefore h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho \cdot g \cdot r}. \quad (6.5)$$

Logo, o parâmetro de tensão superficial e a densidade do líquido são as principais variáveis que determinam a altura h que o líquido atinge dentro do tubo.

A *capilaridade* é parcialmente responsável pela elevação da seiva, desde as raízes de uma planta ou árvore até sua folhagem. A *pressão negativa* é outro fenômeno relacionado com a *capilaridade*.

Existem substâncias denominadas *surfactantes*, também conhecidas como agentes umidificadores ou detergentes, que reduzem a *tensão superficial* de um líquido quando nele dissolvidas, alterando conseqüentemente o ângulo de contato.

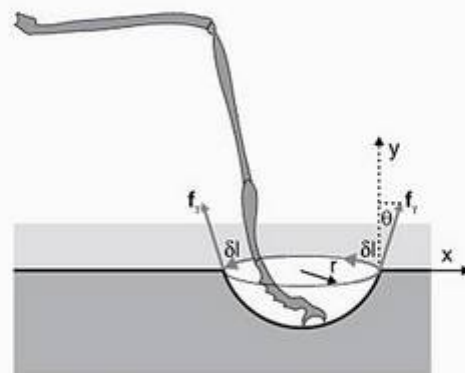


Figura 6.6 Ao pisar em um líquido, a pata de um inseto cria uma depressão, cuja *curva de nível* tem um raio r . A força resultante T_y devida à *tensão superficial* terá magnitude $2\pi r \gamma \cos \theta$.

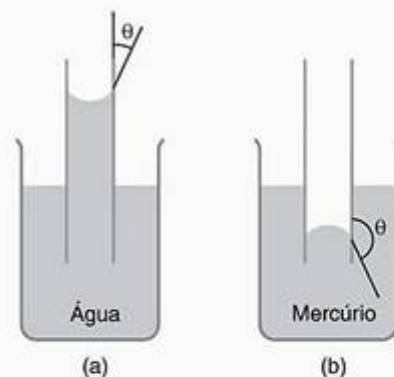


Figura 6.7 Ação capilar quando o líquido é a) água e b) mercúrio, sendo θ o ângulo de contato.

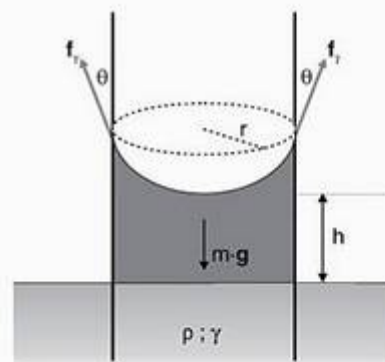


Figura 6.8 Caso em que um líquido se eleva a uma altura h dentro de um tubo fino com raio r .

Exemplo: Considere que os condutores do xilema de uma árvore de 100 m de altura têm um diâmetro médio de 0,1 mm. Admitindo-se que a *tensão superficial* seja a única responsável pelo transporte da seiva ($\rho \cong 1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$) até a folhagem, determine:

- Qual deveria ser o valor da tensão superficial da seiva?
- Que conclusão é possível tirar desse resultado?

Resolução:

- Considerando os condutores da seiva como capilares, da equação (6.5), determinamos

$$\gamma \cong \frac{1}{2} h \cdot \rho \cdot g \cdot r = \frac{1}{2} 10^2 \text{ m} \times 1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9,8 \text{ m/s}^2 \times 5 \times 10^{-5} \text{ m} = 24,5 \text{ N/m}.$$

- Como a tensão superficial da seiva é da ordem de $5,5 \times 10^{-2} \text{ N/m}$, podemos concluir que o fenômeno de tensão superficial não é suficiente para explicar o transporte da seiva ao topo das árvores muito altas.

Exemplo: Um inseto encontra-se em pé sobre a água de uma lagoa, e sua pata produz uma depressão com 2 mm de raio e ângulo de 40° . Calcule

- a fração de peso do inseto que essa depressão está suportando;
- a massa do inseto, admitindo-se que cada uma de suas seis patas suporta pesos aproximadamente iguais. [$\gamma_{\text{água}} (20^\circ) = 0,0728 \text{ N/m}$]

Resolução:

- A equação (6.4) permite calcular a fração do peso T_γ suportado pela depressão; logo,

$$T_\gamma = 2\pi r \cdot \gamma \cdot \cos\theta = 2\pi \times 2 \times 10^{-3} \times 0,0728 \times \cos 40^\circ \text{ N} = 7 \times 10^{-4} \text{ N}.$$

- O peso total do inseto é
 $6 \times 7 \times 10^{-4} \text{ N} = 4,2 \times 10^{-3} \text{ N},$
 e sua massa será $m = 0,43 \text{ g}.$

Exemplo: Suponha que os capilares existentes na camada externa ativa de uma árvore sejam cilindros uniformes e que a elevação da seiva deve-se exclusivamente à *capilaridade*, com ângulo de contato de 45° e tensão superficial de $0,05 \text{ N/m}$. Qual é o raio máximo dos capilares em uma árvore com 20 m de altura?

Resolução: Da equação (6.5) determinamos que o raio dos capilares da árvore pode ser obtido da relação $r = 2\gamma \cdot \cos\theta / \rho \cdot g \cdot h$. Para árvores com 20 m, o valor máximo de r será

$$r_{\text{máx}} = 2 \times 5 \times 10^{-2} \cos 45^\circ / 10^3 \times 9,8 \times 20 \text{ m} = 0,36 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

6.4 PRESSÃO NO INTERIOR DE UMA BOLHA DE AR

Considere uma *bolha de ar* com forma esférica. Ela experimenta uma *pressão interna* P_i em seu lado côncavo e uma *pressão externa* P_e em seu lado convexo. Para se determinar a pressão P_i , usaremos a Figura 6.8, considerando que o menisco côncavo que define a superfície do líquido no tubo é parte de uma esfera com raio R . A Figura 6.9 mostra esta situação. Aqui, a pressão sobre a superfície do líquido é P_1 , enquanto a pressão na parte interna do menisco é P_2 . Como o tubo tem raio r , então $R = r/\cos\theta$; logo, de acordo com a equação (6.5), $\rho \cdot g \cdot R \cdot h = 2\gamma$;

$$\therefore \rho \cdot g \cdot h = 2\gamma/R. \quad (6.6)$$

Pela equação 6.2

$$P_1 - P_2 = 2\gamma/R \quad (6.7)$$

será a diferença de pressão no menisco, onde P_1 é a pressão exercida pelo ar sobre o lado côncavo do menisco e P_2 é a pressão exercida pelo líquido sobre o lado convexo do menisco. Logo, para o caso da bolha com raio R ,

$$P_i = P_e + 2\gamma/R. \quad (6.8)$$

Quando a bolha apresenta duas superfícies, como no caso das bolhas de sabão, a diferença de pressão entre seus lados interno e externo será dado por

$$P_i = P_e + 4\gamma/R. \quad (6.9)$$

Por exemplo, para um alvéolo pulmonar com forma esférica e raio médio de 0,05 mm, a diferença de pressão entre seus lados interno e externo será $P_i - P_e = (2 \times 0,05 \text{ N/m})/5 \times 10^{-5} \text{ m} = 2000 \text{ Pa} \approx 0,02 \text{ at}$.

Exemplo: Um tubo capilar é mergulhado na água ($\gamma = 0,073 \text{ N/m}$) com sua extremidade inferior a 10 cm abaixo da superfície. A água sobe no tubo até uma altura de 5 cm acima do nível do líquido em volta, e o ângulo de contato é nulo. Calcule

- a) a pressão manométrica necessária para soprar uma bolha hemisférica na extremidade inferior do tubo; e
- b) o raio que o tubo capilar deverá ter.

Resolução: Pela equação (6.2), a pressão no extremo inferior do capilar, devido ao líquido em seu interior, será $P_1 = P_0 + 3\rho gh$.

A pressão no extremo inferior do capilar, devido ao líquido em volta do tubo, será $P_2 = P_0 + 2\rho gh$.

- a) Na bolha, P_1 é a pressão no lado côncavo e P_2 é a pressão sobre seu lado convexo. Logo, a pressão manométrica necessária para soprar a bolha será $P_1 - P_2 = \rho \cdot g \cdot h = 1 \times 10^3 \times 9,8 \times 5 \times 10^{-2} \text{ Pa} = 490 \text{ Pa}$.

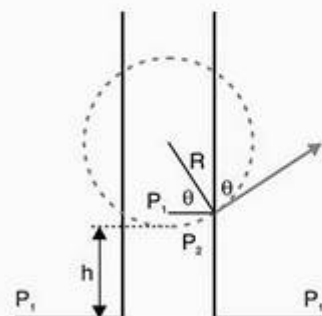
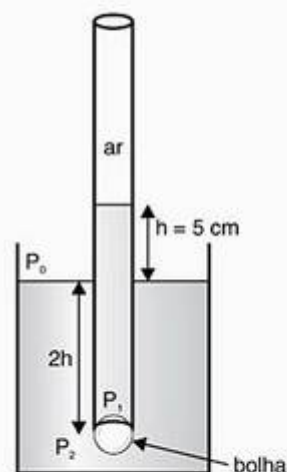


Figura 6.9 Modelo utilizado para se determinar a pressão no interior de uma bolha com uma superfície.



b) O raio R da bolha é dado pela equação (6.8),

$$R = 2\gamma/(P_1 - P_2) = 2 \times 7,3 \times 10^{-2}/490 \text{ m} = 0,3 \times 10^{-3} \text{ m} = 0,3 \text{ mm}.$$

Logo, concluímos que o raio r do capilar na Figura 6.9 será $r = R \cos \theta = R$.

6.5 TRANSPORTE EM UM MEIO INFINITO

Apresentaremos algumas idéias gerais sobre o movimento de partículas (*soluto*) dentro de uma *solução*. Essa *solução* é um *fluido* que pode estar em movimento ou em repouso. Como estaremos tratando de *solutos* que, ao serem colocados em um *solvente*, produzem uma *solução* que não envolve nenhum tipo de reação química, então as partículas do *soluto* não experimentarão transformação em outro tipo de partícula. Assim, *permanecerão constantes*

- ♦ o número N de partículas e sua massa m ; e
- ♦ o volume V das partículas, no caso de um fluido incompressível ($\rho = \text{constante}$).

Esta conservação de N ou m nos leva à *equação de continuidade*.

A Figura 6.10 mostra um tubo cilíndrico com área transversal constante A . Em seu interior, há partículas que se movimentam na direção x do eixo do cilindro. Este movimento pode ser entendido como um *fluxo* $\mathbf{j}$ de partículas em uma *solução*. Ou seja, um número N (ou massa m) dessas partículas é transportado por unidade de tempo e de área. O valor de $\mathbf{j}$ muda com a posição das partículas no tubo e também com o tempo, ou seja, para esse movimento unidimensional, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x, t)$.

Se $\Delta N(x, t)$ for o número de partículas contido no volume definido pelas posições x e $x + \Delta x$ no tubo, sua concentração $C(x, t)$ (ou o número de partículas por unidade de volume) será

$$C(x, t) = \Delta N(x, t) / A \cdot \Delta x.$$

Generalizando, o fluxo e a concentração estão relacionados por uma equação, em que o movimento das partículas não está restrito a uma única direção. Para encontrar essa equação, no caso de um *fluido incompressível*, vamos considerar um volume fechado V , como se vê na Figura 6.11. No instante t , este volume contém um número N_v de partículas dado por

$$N_v = \int_V C(x, y, z, t) dv,$$

onde $C(x, y, z, t)$ é a concentração das partículas.

Se N_v for *invariante* dentro de V , então, para um fluxo de partículas através da superfície S que limita V , o número de partículas transportado a partir de V , por unidade de tempo, será

$$N_t = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s},$$

onde N_t deve ser igual à taxa de decréscimo de N_v , ou seja, $N_t = -dN_v/dt$,

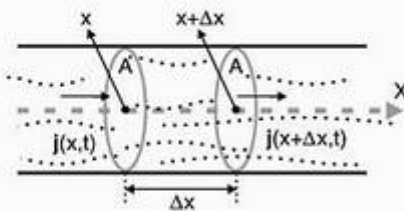


Figura 6.10 Fluxo $\mathbf{j}$ de partículas em um tubo cilíndrico com área transversal A .

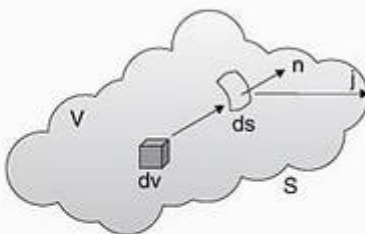


Figura 6.11 Transporte de partículas, a partir de um volume definido V de um fluido incompressível, e o fluxo $\mathbf{j}$ associado.

$$\blacktriangleright \quad \therefore \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{d}{dt} \int_V C(x,y,z,t) dv. \quad (6.10)$$

Como a superfície S é fixa, teremos $dN_v/dt = \partial N_v/\partial t$. Aplicando-se o *teorema da divergência** à integral de superfície da equação (6.10), temos

$$\blacktriangleright \quad \int_V (\text{div} \mathbf{j} + \frac{\partial C}{\partial t}) dv = 0. \quad (6.11)$$

Como o volume V é arbitrário, o integrando da equação (6.11) deverá ser zero. Assim, obtemos a relação denominada *equação de continuidade*:

$$\blacktriangleright \quad \text{div} \mathbf{j} + \frac{\partial C}{\partial t} = 0. \quad (6.12)$$

Quando o movimento de partículas é unidimensional, como se vê na Figura 6.10, a equação (6.12) se reduz a

$$\frac{\partial j(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = 0.$$

Note que a *equação de continuidade* expressa a *conservação* de alguma quantidade física. Para entender melhor essa conclusão, podemos dizer que a equação (6.12) tem o seguinte significado: *a taxa com que as partículas abandonam uma certa região é igual a seu fluxo através da superfície em torno dessa região*. A aplicação da equação (6.12) não se restringe a um *fluxo de partículas*, como moléculas ou cargas elétricas. Essa equação também se aplica aos fluxos de energia e de fluidos.

Por exemplo, se o fluxo é de um líquido com massa m , volume V e densidade $\rho = m/V$, então, se o líquido for *incompressível*, uma certa massa sempre ocupará o mesmo volume e, portanto, a densidade ρ não mudará. Logo, $\partial \rho / \partial t = 0$ e a equação de continuidade será

$$\text{div} \mathbf{j}_l = 0,$$

sendo $\mathbf{j}_l$ o fluxo do líquido ou taxa de escoamento.

Difusão: 1ª lei de Fick

A *difusão* é um movimento resultante de partículas a partir de uma região com alta concentração C_+ para outra com baixa concentração C_- . A *difusão* de partículas em fluidos é uma resposta à existência de um gradiente de concentração ($\text{grad. } C$), como se pode ver na Figura 6.12. Os movimentos das partículas que se difundem são aleatórios e *independentes* entre si. Eles podem colidir frequentemente com as moléculas do fluido em que se encontram, porém é raro colidirem entre eles.

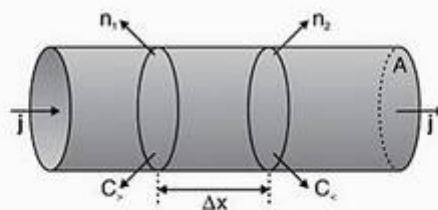


Figura 6.12 Fluido propagando-se na direção x . No intervalo Δx do tubo, $\Delta C = C_- - C_+$ ou $\Delta C_M = n_2 - n_1$ (n , número de moles).

* O teorema da divergência estabelece para um campo vetorial $\mathbf{D}$:

$$\int_V \text{div} \mathbf{D} dv = \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{n} ds,$$

onde v é um volume contornado pela superfície S . Este teorema é usual na determinação da relação diferencial entre o fluxo de um campo vetorial e as fontes destes fluxos.

Na Figura 6.12 pode-se ver um tubo com secção transversal constante, através do qual se propaga um fluido. Se V é o volume da *solução* (*soluto* + *solvente*) que se propaga, então a concentração do *soluto* com massa m será $C = m/V$, e sua concentração molar será $C_M = n/V$, onde n é o número de moles do *soluto*.

Se a diferença entre as concentrações C_x e C_z no intervalo x até $x+\Delta x$ do tubo for pequena, então o fluxo do soluto $j(x,t)$ será proporcional ao gradiente da concentração $j(x,t) \propto \text{grad} \cdot C(x,t) = \nabla C(x,t)$. Essa proporcionalidade dá origem à 1ª lei de Fick, cuja forma geral é

$$\mathbf{j}(x,y,z,t) = -D \cdot \text{grad} \cdot C(x,y,z,t) = -D \cdot \nabla C(x,y,z,t), \quad (6.13)$$

onde D é o coeficiente de difusão do soluto na solução. Sua unidade no SI é m^2/s . O sinal negativo na equação (6.13) significa que o fluxo do *soluto* ocorre no sentido de alta para baixa concentração. Para a situação apresentada na Figura 6.12, a 1ª lei de Fick se reduz à expressão

$$j(x,t) + D \frac{\partial C}{\partial x} = 0.$$

As Figuras 6.13 a, b e c mostram a difusão de uma solução de açúcar na água. Quando tornamos porosa a placa que separa a solução de açúcar e água, inicia-se a difusão das moléculas do *soluto* e do *solvente*, de um compartimento ao outro. Quando o sistema atinge o *equilíbrio*, a concentração de açúcar nos dois compartimentos será a mesma.

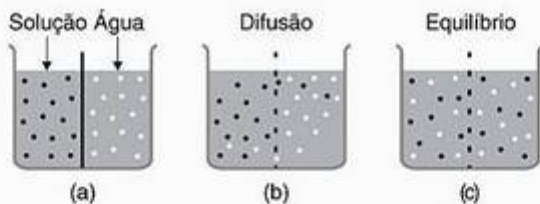
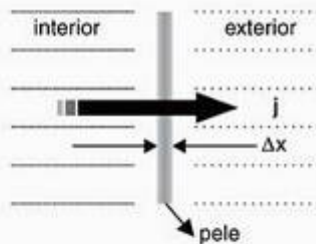


Figura 6.13 a) A solução de açúcar separada da água por uma placa impermeável; b) trocando-se por uma placa porosa, inicia-se a difusão das moléculas; e c) situação de equilíbrio.

Exemplo: A difusão da água através da pele ocorre com uma taxa média de 350 ml/dia. Considere um adulto cujo corpo tem uma área de $1,75 \text{ m}^2$. Se a espessura da pele é de aproximadamente $20 \mu\text{m}$, calcule a constante de difusão da água.



Resolução: n é o número de moléculas de água por m^3 que atravessa a pele no sentido de dentro para fora do corpo.

A taxa média de difusão de moléculas de água através da pele será

$$[\Delta n / \Delta t] = 3,5 \times 10^{-4} \cdot n / 8,64 \times 10^4 \text{ moléculas/s} = n \cdot 0,41 \times 10^{-8} \text{ moléculas/s}.$$

O fluxo de moléculas através da pele será

$$j = (n \cdot 0,41 \times 10^{-8} / 1,75) \text{ moléculas/m}^2 \cdot \text{s} = 0,23n \times 10^{-8} \text{ moléculas/m}^2 \cdot \text{s}.$$

O gradiente de concentração da água é

$$\Delta C / \Delta x = (n - 0) / 2 \times 10^{-5} \text{ moléculas/m}^4 = 0,5n \times 10^5 \text{ moléculas/m}^4.$$

Então, pela 1ª lei de Fick, temos que $D = j / [\Delta C / \Delta x] = 4,6 \times 10^{-14} \text{ m}^2/\text{s}$ será o valor da constante de difusão da água.

Viscosidade e difusão

A viscosidade é uma propriedade dos fluidos cuja origem são as *forças dissipativas* existentes entre as moléculas do fluido. Substâncias com elevado atrito interno são altamente *viscosas*. Como as interações entre as moléculas de um líquido são mais fortes do que entre as moléculas de um gás, *a viscosidade dos líquidos é muito maior do que a dos gases*. Geralmente a *viscosidade* depende da temperatura do fluido: à medida que a temperatura aumenta, a viscosidade cresce para os gases e diminui para os líquidos.

Na Figura 6.14a mostramos o plano $y = 0$ em um fluido. O fluido na parte inferior ao plano exerce uma força $\mathbf{f}_y$ por unidade de área sobre o fluido acima do plano. Pela 3ª lei de Newton, o fluido na parte superior ao plano exercerá uma força $-\mathbf{f}_y$ sobre o que se encontra embaixo do plano. Se $\mathbf{f}_y$ é *normal ao plano*, sua intensidade será a pressão média no fluido. Quando o fluido está em *equilíbrio*, ou seja, em repouso ou movendo-se com velocidade uniforme, *não existirá* componente da força na direção *paralela ao plano*.

Uma situação do fluido em *desequilíbrio* pode ocorrer quando o fluido não tem a *mesma velocidade* em toda sua massa. Se houver movimento do fluido na direção x e sua velocidade v for variável, ou seja, $v = v(y)$, então podemos representar essa situação de *desequilíbrio* como na Figura 6.14b. Aqui, temos o fluido entre duas lâminas paralelas separadas por uma distância d , estando a *lâmina inferior em repouso* e a *superior com velocidade constante* v_0 . Então, se a velocidade das camadas de fluido em contato com as lâminas é a mesma que essas, as outras camadas do fluido paralelas às lâminas terão velocidades com valores que variam de 0 até v_0 .

Nesse caso de *desequilíbrio*, o fluido exercerá uma *força tangencial* sobre a lâmina móvel ou *força viscosa* $\mathbf{F}_v$, que tende a restaurar a situação de equilíbrio. A intensidade dessa força por unidade de área f_v será *proporcional* à variação da velocidade do fluido $\partial v / \partial y$ (nem todos os fluidos se comportam de acordo com essa proporcionalidade direta), tal que $f_v = 0$ quando a velocidade v não depende de y . Portanto,

$$\mathbf{f}_v = -\eta \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (6.14)$$

η é o *coeficiente de viscosidade* do fluido. Se v aumentar com y , então o fluido sob o plano tende a frear o fluido sobre o plano, exercendo uma força na direção oposta ao do movimento do fluido. Isso explica o sinal negativo na equação 6.14, para que η tenha valor positivo.

A unidade de medida de η no SI é *poiseuille (Pl)*, sendo $1 \text{ Pl} = 1 \text{ Pa.s}$. No sistema CGS a unidade de medida de η é o *poise (P)*, definido como $1 \text{ P} = 1 \text{ dina.s/cm}^2$; logo

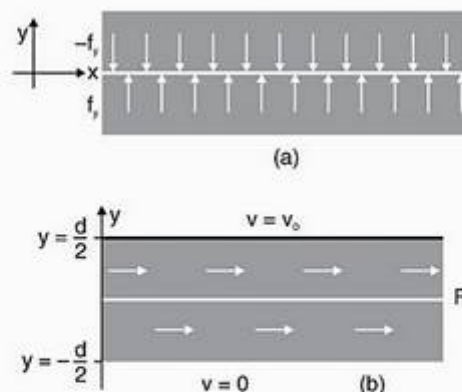


Figura 6.14 a) O plano $y = 0$ em um fluido em equilíbrio experimenta forças por unidade de área f_y ;

b) fluido em *desequilíbrio* contido entre duas lâminas: uma força viscosa aparece devido a $\partial v / \partial y$.

Tabela 6.2 Valores do coeficiente de viscosidade η de alguns fluidos.

Fluido	η (cp)
Plasma do sangue (37 °C)	1,50
Sangue (37 °C)	4,00
Álcool (20 °C)	1,20
Água (0 °C)	1,79
Água (37 °C)	0,691
Água (100 °C)	0,282

1 Pl = 10 P. Um submúltiplo bastante utilizado é o *centipoise* (cp), que é igual a 10^{-2} P. A Tabela 6.2 mostra valores de η do sangue, do álcool e da água a diferentes temperaturas.

Exemplo: Uma arraia com aproximadamente $0,8 \text{ m}^2$ de área na parte inferior de seu corpo está se deslocando ao longo de um canal com velocidade de 3 m/s . Um peixe encontra-se a 10 cm do fundo do canal, e seu deslocamento é paralelo ao leito do canal. Se a viscosidade da água do canal é 10^{-3} Pa.s , qual é a força viscosa exercida sobre o peixe?

Resolução: Se considerarmos que a velocidade do fluido no fundo do canal é 0 m/s , e a uma altura de $0,1 \text{ m}$ é 3 m/s , então a força viscosa por unidade de área no peixe será $f_v = -\eta \Delta v / \Delta y = -10^{-3} \text{ Pa.s} [(3 \text{ m/s}) / 0,1 \text{ m}] = -0,03 \text{ N/m}^2$.

Portanto, a força viscosa que o fluido exerce sobre o peixe é $F_v = -0,03 \times 0,8 \text{ m}^2 = -0,024 \text{ N}$.

Como **Einstein** destacou, *o coeficiente de difusão e a viscosidade estão intimamente relacionados*. Isso não é surpreendente, pois tanto a difusão como a viscosidade são consequência do movimento aleatório das partículas que estão em colisão permanente com átomos vizinhos. Uma relação simples entre os coeficientes D e η pode ser encontrada para certas situações físicas. Por exemplo, se admitirmos que as partículas com massa m movem-se no fluido com uma velocidade média $\bar{v}$ bastante pequena e também que as aproximações lineares para a equação de difusão (equação 6.13) e para a força viscosa (equação 6.14) são válidas, então, tratando-se a difusão das partículas no fluido como um problema de *caminho aleatório**, pode-se mostrar que $D \propto \bar{v} \lambda$, onde λ é o caminho livre médio ou a distância média percorrida pelas partículas com massa m entre colisões. Como $\lambda \propto kT$ e $\bar{v} \propto (kT/m)^{1/2}$, teremos $D \propto (kT)^{3/2}/m^{1/2}$, onde T é a temperatura do fluido e k é a constante de Boltzmann.

A força viscosa exercida pelo fluido sobre as partículas em movimento pode ser considerada como uma força retardadora ou de arraste⁽⁴⁾. Logo, pelos argumentos empregados na Seção 4.2, *Dinâmica dos movimentos aéreos dos animais*, podemos considerar que a força viscosa F_v , para o caso de velocidades médias pequenas, pode ser $F_v = -\beta \bar{v}$, onde β é um parâmetro que depende de η , ou seja, $\beta = \beta(\eta)$.

O fato de considerarmos pequena a velocidade média das partículas equivale, fisicamente, a considerar que as partículas estão em equilíbrio ou que sua concentração C segue a lei da distribuição de Boltzmann**. Nesta situação, se as partículas se

movem na direção y , $|\bar{v} C(y)| = \left| D \frac{\partial C(y)}{\partial y} \right|$, ou $\bar{v} = DF_v/kT$, então $D = kT/\beta$. Esta ex-

* Neste modelo, a probabilidade w por unidade de tempo de que uma partícula sofra uma colisão com outra partícula é a velocidade de colisão v . Ainda que $w = w(v)$, esta probabilidade pode ser normalmente considerada como uma constante independente do tempo.

** Significa que a concentração de partículas varia exponencialmente, sendo dependente da temperatura T do fluido.

pressão do coeficiente de difusão implica em que, nessa aproximação, o movimento das partículas é independente de seu tamanho ou de sua natureza.

No caso da difusão de partículas *suficientemente grandes*, tendo as partículas um raio médio a , pode-se mostrar que $\beta = 6\pi\eta a$ e $D = kT/6\pi\eta a$. Assim, D é inversamente proporcional à viscosidade do fluido e ao raio das partículas. Alguns valores de D , para moléculas na água a 20 °C, são apresentados a seguir.

Moléculas de	m (g/mol)	a (Å)	$D \times 10^{-10} \text{ (m}^2/\text{s)}$
Hemoglobina	~68 000	≈31,0	0,69
Glicose ($\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$)	180	≈5,0	6,7
Oxigênio (O_2)	32	≈2,0	10,0
Uréia ($\text{CO}(\text{NH}_2)_2$)	60	≈4,0	11,0
Água (H_2O)	18	≈1,5	20,0

Se o do fluido for um gás, quando m é a massa molecular do soluto e T a temperatura do gás, então o coeficiente de difusão das moléculas será $D^2 \propto T/m$. Alguns valores de D para pequenas moléculas no ar à pressão atmosférica são apresentados a seguir.

Partículas de	t °C	$D \times 10^{-5} \text{ (m}^2/\text{s)}$	$D \times \sqrt{\frac{T}{m}} \times 10^{-6}$
Vapor de álcool (CH_2OH)	40	1,37	4,380
Hidrogênio (H_2)	0	6,34	5,427
Dióxido de Carbono (CO_2)	0	1,39	5,580
Água (H_2O)	8	2,39	6,049
Oxigênio (O_2)	0	1,78	6,094

Exemplo: Moléculas de sacarose (massa molar = 360 g) dissolvidas na água a 20 °C têm um coeficiente de difusão de $5,2 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$. Quanta sacarose se difundirá em 20 s, através de um tubo horizontal com 1,5 cm de raio, se o gradiente de concentração for $0,25 \text{ kg/cm}^3$ para cada metro de tubo?

Resolução: Se a direção do movimento das moléculas de sacarose for x , o fluxo dessas moléculas será $j(x,t) = \Delta m/A \cdot \Delta t$. Para $\Delta t = 20 \text{ s}$ teremos a quantidade Δm de sacarose que se difunde através do tubo com área transversal $A = \pi r^2 = \pi (1,5 \times 10^{-2})^2 \text{ m}^2 = 7,07 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

Pela equação (6.13), $j(x,t) = D \cdot \Delta C / \Delta x = 5,2 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s} \times 0,25 \times 10^6 \text{ kg/m}^3 \times 1/1\text{m} = 1,3 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}$.

Logo, $\Delta m = 7,07 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \times 20 \text{ s} \times 1,3 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s} = 1,84 \times 10^{-6} \text{ kg} = 1,84 \text{ mg}$.

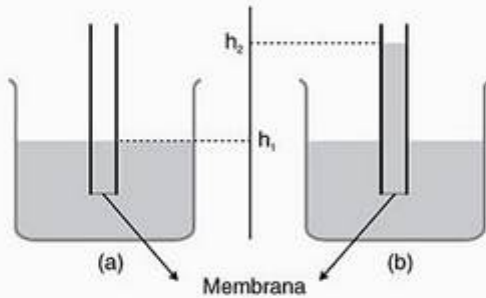


Figura 6.15 Solução de água com açúcar dentro de um tubo. A membrana deixa passar moléculas de água que alteram o nível da solução de a) h_1 até b) h_2 .

Osmose: Pressão osmótica

Osmose é a difusão de um fluido através de uma *membrana com permeabilidade seletiva*. Em geral uma membrana pode ser permeável, pouco permeável ou impermeável a algumas partículas. Um exemplo de *osmose* é apresentado na Figura 6.15, onde uma *membrana semipermeável* não deixa passar as moléculas de açúcar de uma solução de água com açúcar. A passagem de moléculas de água através da membrana altera o nível da solução dentro do tubo, produzindo uma *pressão adicional* $\rho g(h_2 - h_1)$, sendo ρ a densidade da solução.

A pressão que devemos aplicar sobre a superfície da solução para que a osmose *não ocorra* é chamada de *pressão osmótica* Π . No caso da Figura 6.15, teremos $\Pi = \rho g(h_2 - h_1)$.

Em *soluções* com espécies impermeantes em *baixas concentrações*, a pressão osmótica Π é dada pela equação de J. H. van't Hoff,

$$\Pi V = nRT \quad \text{ou} \quad \Pi = C_M RT, \quad (6.15)$$

onde n é o número de moles dos *solutos* impermeantes presentes na solução, C_M a concentração molar destes *solutos*, T a temperatura da solução e $R = 0,0827 \text{ atm}\cdot\text{l/mol}\cdot\text{K}$. Como Π depende da concentração das partículas impermeantes, concentrações iguais de solutos ionizáveis exercem maior pressão osmótica do que de solutos não ionizáveis.

Definimos um *osmol* de um soluto não dissociável como sendo 1 mol deste soluto; logo, 1 mol de NaCl será equivalente a 2 osmol, porque cada molécula de NaCl produz duas partículas, uma de Na^+ e outra de Cl^- . Em uma solução, podemos medir a concentração das partículas impermeantes em termos da

♦ *osmolaridade*: uma osmolaridade igual a 1 significa que a solução consiste de 1 osmol por litro de solução;

♦ *osmolalidade*: uma osmolalidade igual a 1 significa que a solução consiste de 1 osmol por kg de solvente.

Por exemplo, a glicose ($\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$) tem massa molecular de 180 u.m.a; logo, 18 g de glicose dissolvidos em um litro de solução terão uma osmolaridade de 0,1 osmol/l.

Se a osmolaridade de um líquido celular for 0,3 osmol/l, a pressão osmótica à temperatura do corpo (37°C) será

$$\Pi = C_M RT = (0,3 \text{ osmol/l})(0,0827 \text{ atm}\cdot\text{l/mol}\cdot\text{K})(310 \text{ K}) = 7,7 \text{ atm}.$$

Esse valor de Π é alto porque neste cálculo está implícito que o fluido extracelular é água pura. Na realidade, a pressão osmótica sobre a membrana depende da diferença entre as concentrações das partículas impermeantes dos dois lados da membrana: $\Delta\Pi = \Delta C_M RT$, onde $\Delta\Pi = \Pi_e - \Pi_i$ e $\Delta C_M = C_e - C_i$ (i = interno; e = externo).

Se a concentração molar da hemoglobina dentro da hemácia for 10 milimol/litro e supondo que não haja outro soluto intracelular impermeante, então a pressão osmótica no interior de uma hemácia se ela for imersa em água destilada a 27°C será

$$\Pi = C_M RT = (10 \times 10^{-3} \text{ mol/l})(0,0827 \text{ atm}\cdot\text{l/mol}\cdot\text{K})(300 \text{ K}) = 0,25 \text{ atm}.$$

Este valor, calculado para o equilíbrio, na realidade não chega a se estabelecer, pois ocorre lise antes disso. Para evitar lise, a hemácia deveria ser imersa em solução isomótica, ou seja, 10 milimol/litro de impermeantes.

Exemplo: Considere uma árvore com 30 m de altura, estando a seiva a 20 °C. Qual deve ser a concentração molar dos solutos na seiva? ($\rho_{\text{seiva}} \cong 1 \text{ g/cm}^3$)

Resolução: A pressão osmótica necessária para elevar a seiva até seu topo será

$$\Pi = \rho gh = (1000 \text{ kg/m}^3)(9,8 \text{ m/s}^2)(30 \text{ m}) = 2,94 \times 10^5 \text{ Pa} = 2,9 \text{ atm.}$$

Esta pressão implica em que a concentração molar mínima dos solutos na seiva deve ser $C_M = \Pi/RT = 0,12 \text{ osmol/l}$.

Se admitirmos que a seiva sobe até uma altura h pela *ação capilar*, então, com $\gamma_{\text{seiva}} = 0,073 \text{ N/m}$ e sendo 0,02 mm o diâmetro do xilema, teremos

$$h = 2\gamma/\rho ga = (2 \times 0,073 \text{ N/m})/(10^3 \text{ kg/m}^3)(9,8 \text{ m/s}^2)(10^{-5} \text{ m}) = 1,5 \text{ m.}$$

Assim, a ação capilar justificaria a subida da seiva em árvores com alturas menores do que 1,5 m. A explicação mais aceita para o movimento ascendente da seiva é que o movimento é resultante da ação das forças devidas à tensão superficial e à coesão entre suas moléculas.

Exemplo: Tendo 10 g de sacarose (massa molar = 360 g) e 5 g de glicose (massa molar = 180 g) dissolvidos em 1 litro de água a 87 °C, qual será a pressão osmótica da solução se esta for separada da água por uma membrana impermeável a este soluto?

Resolução: Na solução temos $n_s = 10/360 = 1/36$ moles de sacarose e $n_g = 5/180 = 1/36$ moles de glicose.

O total de moles na solução é $1/36 + 1/36 = 1/18$ moles.

Logo, a pressão osmótica da solução será $\Pi_{\text{sol}} = (1/18) \times 0,0821 \times (87 + 273) \text{ atm} = 1,64 \text{ atm}$.

Convém lembrar que osmolaridade tem o significado de concentração e que tonicidade tem significado de pressão. Então a solução acima, colocada em um frasco na prateleira, não desenvolve pressão osmótica alguma. Entretanto, se for colocada em contato com uma face de uma membrana semipermeável, tendo água na outra face, pode-se observar o fenômeno da osmose.

6.6 ESCOAMENTO DE FLUIDOS

O escoamento de fluidos analisa a dinâmica dos fluidos em movimento⁽⁵⁾. Esse movimento é caracterizado pela velocidade V de escoamento ou de fluxo do fluido e por sua densidade ρ . Se, em qualquer instante, em um ponto do fluido, V for constante, então teremos um *escoamento permanente*; quando V não for constante, então teremos um *escoamento variado*. Se em um fluido que está em movimento a *densidade não variar*, dizemos que o fluido é *incompressível*. Se, além disso, o fluido não apresentar resistência ao movimento ($\eta \approx 0$), então o *fluido é ideal*. Por outro lado, quando as forças dissipativas no fluido são importantes, dizemos que o *fluido é real*.

O *fluxo* Q ou taxa de escoamento de um fluido é definido como o volume do fluido que escoar através de uma seção por unidade de tempo. A Figura 6.16 representa o *escoamento permanente* de um *fluido ideal*. Os fluxos nas seções A_1 e A_2 serão, respectivamente,

$$Q_1 = A_1 v_1 \Delta t / \Delta t = A_1 v_1 \quad \text{e} \quad Q_2 = A_2 v_2.$$

Como o volume de fluido entre A_1 e A_2 é constante, então $\rho A_1 v_1 \Delta t = \rho A_2 v_2 \Delta t$. Logo, $A_1 v_1 = A_2 v_2$, ou $Q_1 = Q_2$; portanto, o *fluxo é constante*.

Na Figura 6.17 os capilares T_1 , T_2 e T_3 , fixados sobre um tubo com raio a , por onde escoar um fluido com densidade ρ , funcionaram como *manômetros*. Se a altura do fluido em cada capilar satisfizer a relação $h_1 > h_2 > h_3$, então os valores da pressão em A, B e C (pontos que estão ao longo do tubo) satisfazem a condição $P_A > P_B > P_C$.

Dessa maneira, teremos ao longo do tubo um *gradiente de pressão* $\Delta P / \Delta x$, onde ΔP é a diferença de pressão entre os pontos A e B (ou B e C) e Δx é a distância AB (ou BC). Fisicamente haverá uma diminuição de energia devido à existência de forças de resistência (forças viscosas) ao movimento do fluido que está escoando.

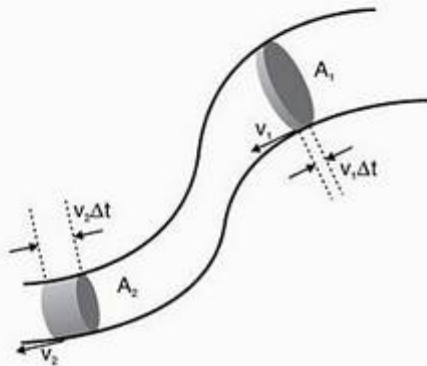


Figura 6.16 Escoamento permanente de um fluido ideal. Se Q_1 e Q_2 forem os fluxos em A_1 e A_2 , respectivamente, então $Q_1 = Q_2$.

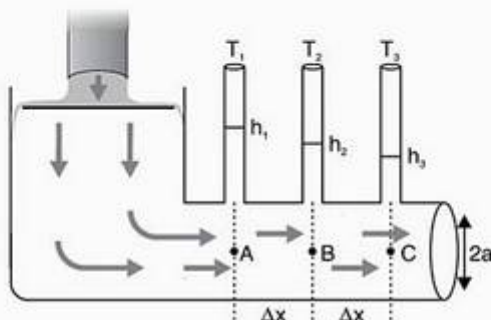


Figura 6.17 Os três capilares sobre o tubo funcionam como medidores de pressão do fluido que está escoando em seu interior.

Exemplo: A *potência do coração* corresponde ao trabalho realizado por segundo pelo coração para bombear sangue ao organismo. Para um adulto que está realizando atividades normais, a velocidade média do sangue através de uma aorta com 9 mm de raio é 0,33 m/s. Calcule

- A potência do coração, se a pressão média do sangue na aorta for 100 mm de Hg.
- Seu consumo de oxigênio, se a taxa metabólica desse adulto for aproximadamente 100 vezes a potência de seu coração e se cada litro consumido liberar uma energia de 4,78 kcal.

Resolução:

- a) O fluxo
- Q
- do sangue na aorta é

$Q = A\langle v \rangle = \pi(9 \times 10^{-3})^2 \text{ m}^2 \times 0,33 \text{ m/s} = 8,4 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$. Como a pressão do sangue na aorta é $100 \times 133,3 \text{ Pa} = 1,333 \times 10^4 \text{ Pa}$, então a potência do coração será $P = \text{pressão} \times Q = 1,333 \times 10^4 \times 8,4 \times 10^{-5} = 1,12 \text{ W}$.

- b) Uma taxa metabólica de
- $TM = 112 \text{ J/s}$
- equivale a
- $TM = 112/4,186 \text{ cal/s} = 26,76 \text{ cal/s}$
- . O consumo de 1 litro de
- O_2
- libera uma energia de 4780 cal; logo, a taxa de consumo de
- O_2
- por esse adulto é
- $26,76/4780 = 5,6 \times 10^{-3} \text{ litro/s}$
- .

Escoamento laminar: equação de Poiseuille

No *escoamento laminar* de um fluido ao longo de um tubo com *raio* a , sua velocidade através de uma seção transversal do tubo é *máxima* no centro da seção e vai decrescendo, segundo uma parábola, até um *valor nulo* na camada adjacente à parede do tubo. Esse decréscimo ocorre devido à ação das forças de atrito tangencial ou *forças viscosas*, como se pode ver na Figura 6.18.

O equilíbrio entre a *força propulsora*, $F_p = [(p_1 - p_2)\pi r^2]$, e a *força viscosa*, $F_v = [\eta 2\pi r \Delta x (dv/dr)]$, permite encontrar uma expressão para a velocidade do fluido:

$$\blacktriangleright \quad \frac{dv}{dr} = \frac{(p_1 - p_2)}{2\eta \Delta x} r \therefore v = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{p_1 - p_2}{\Delta x} \right) (a^2 - r^2). \quad (6.16)$$

Em $r = 0$ teremos $v = v_{\max} = \frac{a^2}{4\eta} \left(\frac{p_1 - p_2}{\Delta x} \right)$ e em $r = a$, $v = v_{\min} = 0$.

Apresentamos a forma de $v = v_{\max} \cdot (1 - \frac{r^2}{a^2})$ na Figura 6.19.

Como a equação (6.16) descreve a variação da velocidade do fluido viscoso através do tubo com raio a devido ao gradiente de pressão $\Delta p/\Delta x$ ao longo do tubo, então agora podemos calcular o fluxo total Q através do tubo:

$$\blacktriangleright \quad Q = A\bar{v} = \pi a^2 \cdot \frac{v_{\max}}{2} = \frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{\Delta x}. \quad (6.17)$$

A equação (6.17) foi determinada experimentalmente pelo físico *J. L. M. Poiseuille* ao fazer estudos sobre o fluxo sanguíneo através dos capilares. Por exemplo, quando um homem está em *repouso*, seu fluxo sanguíneo através da *artéria aorta* é $Q = 80 \text{ cm}^3/\text{s}$. Como o raio da aorta é $\approx 1 \text{ cm}$, de acordo com a lei de Poiseuille, o gradiente de pressão será $\Delta p/\Delta x = 80 \text{ Pa/m} = 0,6 \text{ Torr/m}$.

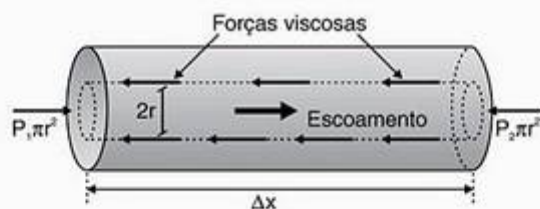


Figura 6.18 No escoamento laminar, o fluido experimenta uma *força propulsora* que é equilibrada pela *força viscosa*. A variação da velocidade do fluido na direção radial do tubo ocorrerá devido ao gradiente de pressão existente ao longo do tubo.

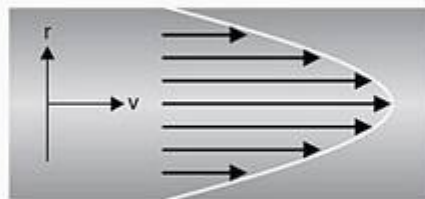


Figura 6.19 Variação da velocidade de um fluido viscoso através de um tubo com raio a .

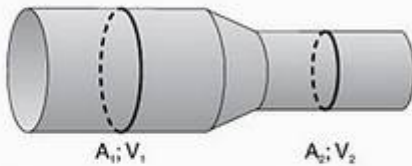


Figura 6.20 Quando o fluxo total Q de uma tubulação é constante, então, se $A_1 > A_2$, teremos $V_2 > V_1$.

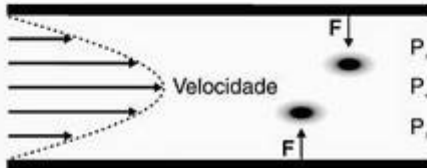


Figura 6.21 A pressão, devido ao fluxo sanguíneo, é mínima (p_c) no centro da artéria e máxima (p_s) próximo à parede arterial.

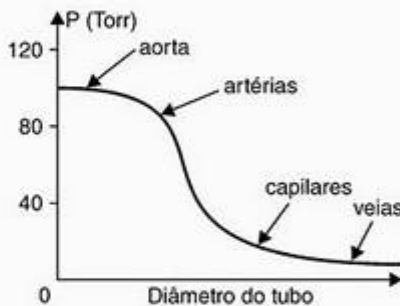


Figura 6.22 Variação da pressão do fluxo sanguíneo.

Se aplicarmos a equação (6.17) ao fluxo de um fluido ao longo de uma tubulação de comprimento L e raio a , podemos definir a *resistência da tubulação* ao fluxo do fluido como sendo $R = \Delta p/Q = 8\eta L/\pi a^4$.

Para *fluidos reais*, a velocidade média do fluxo de escoamento será

$$\bar{v} = \frac{\text{vazão}}{\text{secção do tubo}} = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{a^2}{8\eta} \frac{\Delta p}{\Delta x}.$$

Se na Figura 6.20 o *fluxo total* através da tubulação com secção variável for *constante* e se $A_2 < A_1$, então $Q = A_1 \bar{v}_1 = A_2 \bar{v}_2$, o que implica em $\bar{v}_2 > \bar{v}_1$.

No caso do *fluxo sanguíneo* através das artérias, este geralmente é *laminar* (a definição de fluxo laminar é dado na próxima seção). Como existem *forças atrativas* entre as paredes da artéria e as moléculas do sangue, então, nas paredes das artérias, $v = 0$. Ao observar a secção transversal de uma artéria, notamos que a *pressão*, devido ao fluxo sanguíneo, aumenta radialmente (como se vê na Figura 6.21). Assim, a diferença de pressão experimentada pelas células sanguíneas produzirá uma força que as puxa para o centro da artéria.

O sangue, ao fluir através do leito vascular, produz pressões variáveis devido à diferença entre os diâmetros dos tubos por onde flui. Esse efeito é apresentado no gráfico da Figura 6.22. Por exemplo, no coração de um homem adulto temos pressão diastólica ≈ 80 Torr e pressão sistólica ≈ 120 Torr; logo, a pressão média será 100 Torr, como sugere o gráfico da Figura 6.22.

Exemplo: A vazão máxima do sangue ao sair do coração é 500 ml/s. Se a aorta tem um diâmetro de 2,5 cm, então

- calcule a velocidade do sangue no centro da aorta;
- calcule o gradiente de pressão ao longo da aorta; e
- faça o gráfico da velocidade do sangue em função da distância medida a partir do centro da aorta. (Coeficiente de viscosidade do sangue, $\eta = 4 \times 10^{-3}$ Pa.s.)

Resolução: Se $a = 1,25$ cm for o raio da aorta e o sangue estiver fluindo na direção x , então, da equação (6.17) encontramos que o gradiente de pressão é $\Delta p/\Delta x = 8\eta Q/\pi a^4$. Pela equação (6.16) determinamos a velocidade do fluido a uma distância r do centro da aorta $v(r) = [2Q/\pi a^4](a^2 - r^2)$.

a) A velocidade do sangue em $r = 0$ é

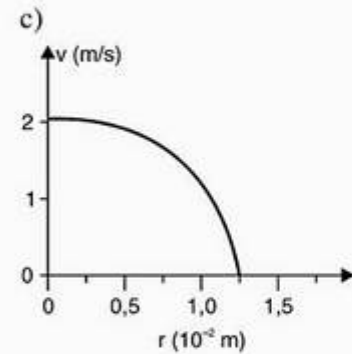
$$v(0) = 2Q/\pi a^2 = 2 \times 500/\pi (1,25)^2 \text{ cm/s} = 203,7 \text{ cm/s} = 2,04 \text{ m/s.}$$

$\therefore$ Para qualquer distância r a partir do centro da aorta

$$v(r) = 2,04 [1 - (r/a)^2] \text{ m/s.}$$

b) O gradiente de pressão ao longo da aorta é

$$[\Delta p/\Delta x] = 8Q\eta/\pi a^4 = 208,6 \text{ N/m}^3 = 208,6 \text{ Pa/m} = 1,56 \text{ Torr/m.}$$



Número de Reynolds

O escoamento de fluidos mais simples é o *laminar*. Porém, quando a velocidade do fluido atinge um certo *valor crítico*, o escoamento torna-se altamente irregular, sugerindo *correntes circulares aleatórias*, além de um aumento bastante pronunciado na resistência ao fluxo. Esse tipo de escoamento é chamado de *turbulento*. Essas mudanças no escoamento ocorrem devido a uma combinação de quantidades que excede um determinado valor crítico. Essa combinação é chamada *número de Reynolds*, sendo definida, para um fluido com densidade ρ e coeficiente de viscosidade η , como

$$\Re = \rho d \bar{v} / \eta, \quad (6.18)$$

onde $\bar{v}$ é a velocidade média do fluido e d é uma dimensão típica do sistema. Por exemplo, para um fluido no interior de um tubo, d é o diâmetro do tubo. A aplicação da equação (6.18) requer uma velocidade média do fluido que seja *suficientemente pequena* ou *não muito grande*.

Em geral, no escoamento de fluidos, quando $\Re < 2000$, o escoamento é *laminar*, e quando $\Re > 2000$, é *turbulento*. A transição de um tipo de escoamento para outro em um mesmo sistema está tipificada por um determinado valor do número de Reynolds, denominado *número crítico de Reynolds* ($\Re_c$).

A equação (6.18) também pode ser usada quando um corpo com formato determinado desloca-se dentro de um fluido⁽⁶⁾. Neste caso, d será um *comprimento característico* do corpo. Por exemplo, para uma esfera dentro de um fluido, d será o diâmetro da esfera. Se o corpo em movimento for um espécime de *comprimento característico* d , este símbolo pode representar tanto o comprimento do espécime como a largura ou ainda a altura de uma asa, etc. $\bar{v}$ será a velocidade de cruzeiro com que se desloca o corpo no fluido⁽⁷⁾. O mesmo $\Re_c$ caracterizará o valor de $\bar{v}$ para a transição fluxo laminar $\rightarrow$ fluxo turbulento de uma bolha de ar subindo em um recipiente com água ou uma bola caindo no ar. Se corpos estiverem em movimento, na região do fluido com

- ♦ $\Re < \Re_c$, então o fluxo do fluido em volta do corpo será pouco crítico;
- ♦ $\Re > \Re_c$, o fluxo do fluido em volta do corpo será bastante crítico.

Como foi visto, para uma pessoa em repouso, a vazão do sangue através da artéria aorta é $Q = 8 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$; logo, a velocidade média do fluxo de escoamento

será $\bar{v} = 0,25$ m/s e, pela equação (6.18), $\mathfrak{R} \equiv 1\,300$ ($\mathfrak{R}_c \equiv 3\,000$ dá início ao fluxo turbulento em um tubo cilíndrico longo). Ou seja, se considerarmos a aorta como um tubo cilíndrico, então o escoamento sanguíneo será *laminar*.

Água a 20 °C escoar em um tubo com raio de 0,5 cm, $\bar{v} = 10$ cm/s e $\mathfrak{R} = 1\,300$; nessa situação, o escoamento será *laminar*. Se a velocidade média do fluxo for $\bar{v} = 30$ cm/s, então $R = 3\,000$; portanto, o escoamento será *turbulento*.

A 20 °C, para a água, $(\eta/\rho)_a = 10^{-6}$ m²/s e, para o ar, $(\eta/\rho)_{ar} = 16 \times 10^{-6}$ m²/s. Logo, os respectivos números de Reynolds serão $\mathfrak{R}_a = 2,0 \times 10^{-6} d\bar{v}$ e $\mathfrak{R}_{ar} = 3,2 \times 10^{-5} d\bar{v}$. Essa regra, $\mathfrak{R} \propto \bar{v}$, aplica-se a corpos pequenos movendo-se lentamente. Situações correspondentes a corpos grandes ou ainda maiores deslocando-se mais rapidamente serão analisadas a seguir⁽⁸⁾.

Exemplo: Uma baleia azul tem 30 m de comprimento e formato aproximadamente cilíndrico com 1,5 m de diâmetro médio. Quando submersa, ela se desloca a uma velocidade próxima de 20 m/s. O fluxo de água em torno do animal é laminar ou turbulento? (Considere a densidade e a viscosidade da água do mar iguais às da água doce, ou seja, $\rho = 10^3$ kg/m³ e $\eta = 10^{-3}$ Pa.s.)

Resolução: Para o movimento desse espécime, o cálculo do número de Reynolds será feito tomando-se $d = 30$ m como comprimento característico; logo,

$$\mathfrak{R} = \rho d \bar{v} / \eta = (10^3 \text{ kg/m}^3 \times 30 \text{ m} \times 20 \text{ m/s}) / 10^{-3} \text{ Pa.s} = 6 \times 10^8.$$

Esse valor está muito acima do número crítico de Reynolds para corpos com forma cilíndrica. Assim, o fluxo deverá ser turbulento.

Lei de Stokes

Todo corpo que se desloca através de um fluido (ou fluido que escoar por um tubo) com coeficiente de viscosidade η e velocidade *não muito grande* $\bar{v}$ experimentará uma força de atrito $\mathbf{D}$, proporcional a $\bar{v}$, que se opõe ao movimento, $\mathbf{D} = -\kappa \eta \bar{v}$, onde κ depende da forma e das dimensões do corpo e de alguns parâmetros físicos do fluido. $\mathbf{D}$ é similar à *força de arraste* apresentada no estudo do *movimento aéreo* de animais. Quando $\bar{v}$ for *relativamente baixa*, $\mathbf{D}$ é denominada *força de arrastamento viscoso*.

Se o corpo em movimento for um espécime de *comprimento característico* d , que se desloca em um fluido com velocidade de cruzeiro $\bar{v}$, então a força exercida pelo fluido sobre o espécime pode ter a forma $\mathbf{D} = -\kappa' \eta d \bar{v}$, onde κ' depende do tipo de fluido⁽⁹⁾.

Embora a análise do movimento de *corpos esféricos* em fluidos seja muito complicada, podemos mostrar que $\kappa = 6\pi a$, para uma esfera com raio a , de modo que a força de arrastamento viscoso será dada por

$$\mathbf{D} = -6\pi a \eta \bar{v}. \quad (6.19)$$

Esta equação, válida para valores suficientemente pequenos de v , é denominada *lei de Stokes*. Essa lei aplica-se somente a obstáculos de forma esférica.

Quando a velocidade de fluxo (ou do corpo) cresce muito, o fluxo torna-se turbulento e a força de arraste associada será muito maior do que para o fluxo laminar. Nestas condições a relação $D \propto v$ não é mais válida.

Exemplo: Em um adulto em repouso, o fluxo do sangue através da aorta é $80 \text{ cm}^3/\text{s}$. Se os raios da aorta e de um capilar típico forem de aproximadamente 1 cm e $0,2 \text{ mm}$, respectivamente,

- calcule o número de Reynolds para o sangue que flui nesses condutores; e
- determine as condições para que o fluxo de sangue através de um capilar seja laminar. ($\rho_{\text{sangue}} = 1,05 \text{ g/cm}^3$; $\eta_{\text{sangue}} = 4 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$.)

Resolução:

- A velocidade média do sangue através da aorta será

$$\bar{v}_a = Q/\pi r^2 = 8 \times 10^{-5} / \pi (0,01)^2 \text{ m/s} = 0,25 \text{ m/s}.$$

O número de Reynolds para esse fluxo é

$$\Re = 2 \times 1,05 \times 10^{-3} \times 0,01 \times 0,25 / 4 \times 10^{-3} = 1\,335.$$

Considerando que o fluxo do sangue é o mesmo através do capilar, então

$$\bar{v}_c = Q/\pi r^2 = 8 \times 10^{-5} / \pi (2 \times 10^{-4})^2 \text{ m/s} = 6,37 \times 10^2 \text{ m/s}.$$

Para esse fluxo,

$$\Re = 2 \times 1,05 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-4} \times 6,37 \times 10^2 / 4 \times 10^{-3} = 6,7 \times 10^{-2}.$$

- O número de Reynolds é dado pela equação (6.18) ou $\Re = (\rho d/\eta)(Q/\pi r^2) = (2\rho/\eta\pi)(Q/r) = [16,71 \times 10^4 \text{ m/(m}^3/\text{s})](Q/r) = [1\,671 \text{ dm/(litro/s)}](Q/r)$. Para que o fluxo seja laminar, $\Re < 2\,000$; então, para esse caso, $(Q/r) < 1,2$, com Q em litros/s e o raio r em dm.

Exemplo: Um fluido está escoando com velocidade média de 20 cm/s através de um tubo com 1 cm de diâmetro. O fluxo será laminar ou turbulento se o fluido for

- água a 20°C ? ($\eta_{\text{água}} = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$);
- ar a 20°C ? ($\eta_{\text{ar}} = 1,84 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$; $\rho_{\text{ar}} = 1,29 \text{ kg/m}^3$).

Resolução:

- Se o fluido for água, $\Re = (10^3 \text{ kg/m}^3 \times 2 \times 10^{-2} \text{ m} \times 0,2 \text{ m/s}) / 10^{-3} \text{ Pa.s} = 4\,000$; logo, o fluxo será *turbulento*.
- Se o fluido for ar, $\Re = (1,29 \text{ kg/m}^3 \times 2 \times 10^{-2} \text{ m} \times 0,2 \text{ m/s}) / (1,84 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}) = 280$; logo, o fluxo será *laminar*.

Forças resistivas em um fluido

Dizemos que dois corpos em um fluido são *hidrodinamicamente semelhantes* quando têm formas geométricas semelhantes e valores de $\mathcal{R}$ iguais. Nos animais em que o corpo rígido e o aparelho locomotor estão estruturalmente separados, como na tartaruga marinha, no besouro etc., a *força resistiva* D , devido ao atrito com o fluido, é originada no corpo do próprio animal, e a estrutura da nadadeira só exerce uma *força de impulso*. Em geral, nos animais nadadores, além da força resistiva D , há também uma *força propulsora* $F^{(10)}$. No caso dos peixes, como as enguias, e de animais com forma alongada (golfinho, baleia, foca, pingüim, etc.), F e D estão biomecanicamente integradas em um único sistema^(11,12).

Normalmente a *força resistiva* D é função de $\mathcal{R}$. Quando $D(\mathcal{R})$ tem uma variação

♦ desprezível em relação às variações de $\mathcal{R}$, então dizemos que os corpos no fluido são *insensíveis* a $\mathcal{R}$;

♦ grande em relação às variações de $\mathcal{R}$, dizemos que os corpos são *sensíveis* a $\mathcal{R}$.

A *força resistiva* resulta da soma de dois componentes, $D = D_f + D_p$, onde D_f é o componente de atrito ou *arraste superficial* e D_p é o componente de pressão ou *arraste de contorno*. A magnitude desses componentes depende do tamanho do corpo do animal e da velocidade de escoamento do fluido. No entanto, a viscosidade do meio influi muito na magnitude da força D_f e a inércia do meio em escoamento leva

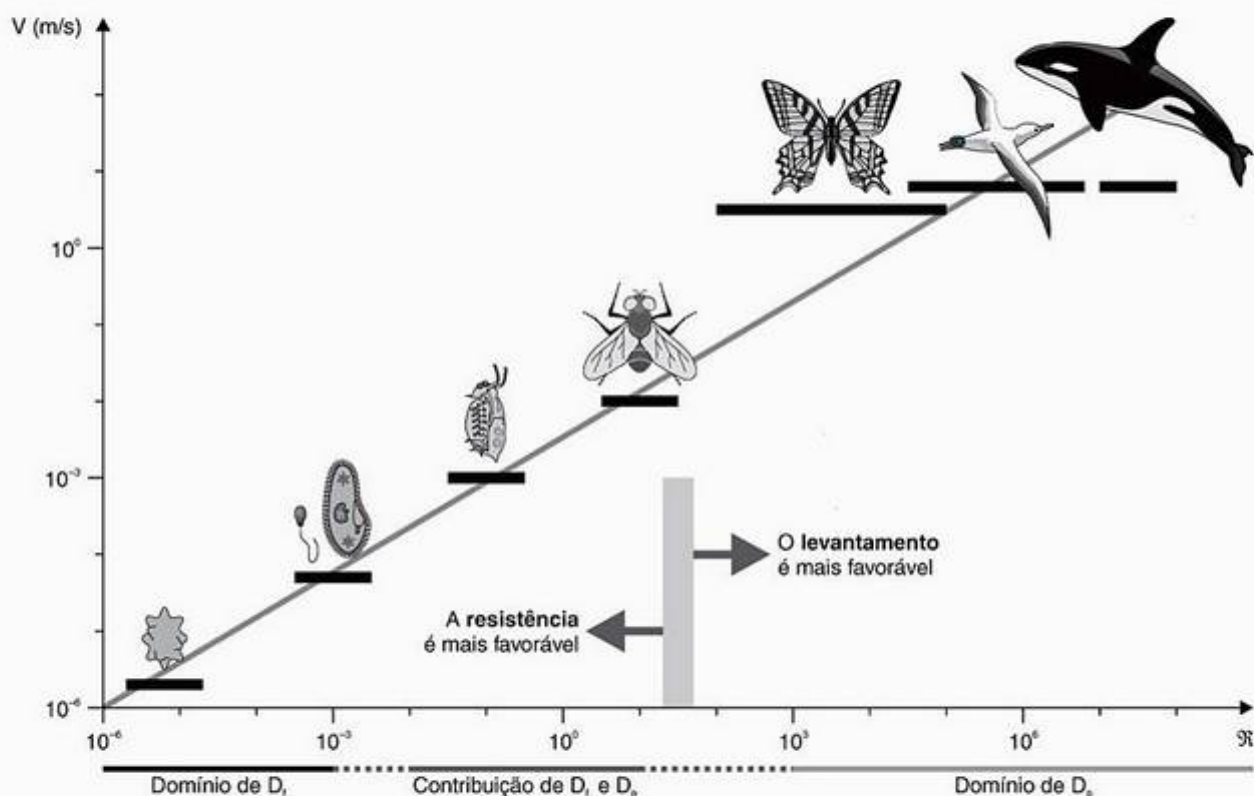


Figura 6.23 O movimento dos organismos em fluidos depende dos valores do número de Reynolds. Para valores de $\mathcal{R}$ onde predomina o componente D_f , temos $D \propto V$ (caso dos flagelíferos).

Para valores de $\mathcal{R}$ onde predomina D_p , temos $D \propto V^2$ (caso das baleias). Para valores intermediários de $\mathcal{R}$ (caso do voo de pequenos insetos), D depende de V e V^2 (adaptado de Nachtigal⁽¹³⁾).

à separação de uma camada-limite, influenciando, assim, na magnitude da força D_p . Na Figura 6.23, apresentamos o intervalo de valores de $\mathfrak{R}$ em que os componentes D_t e D_p são individualmente dominantes e também a região de valores de $\mathfrak{R}$ onde esses componentes D são importantes⁽¹⁴⁾.

Uma análise completa do *fluxo turbulento* escapa a este estudo; no entanto, sabe-se que, para uma ampla faixa de valores da velocidade v do fluido (ou do corpo em relação ao fluido), os valores de $\mathfrak{R}$ são grandes. Nesta situação, a força resistiva total tem a forma

$$\blacktriangleright \quad D = \delta S(\rho/2)v^2 = \delta Sq, \quad (6.20)$$

onde ρ é a densidade do fluido, S é uma área de referência que o corpo apresenta para o fluido, q é a pressão na cabeceira do corpo em movimento (ou uma energia cinética por unidade de volume) e δ é o *coeficiente de escoamento* (ou constante empírica) adimensional, que depende da forma do corpo.

Na verdade, quando um corpo se desloca através de um fluido, ele *arrasta* uma parte do fluido consigo. A *esteira* deixada pelo fluido não é arrastada com a velocidade v de modo uniforme. A constante δ relaciona a área da secção transversal real de um corpo com a correspondente área imaginária que deixaria uma esteira ideal.

Como vimos no estudo do movimento aéreo das aves, a equação (6.20) define a *força de arraste* nesses movimentos, e a constante δ foi denominada *coeficiente de arraste* C_D ; logo, $C_D = D/Sq$. O valor de C_D dependerá de $\mathfrak{R}$ e de S e, por sua vez, a área S depende de qual componente da *força resistiva total* predomina no movimento do corpo. Quando esta é

- ♦ D_{Dt} , então $S = S_T$ (área da superfície do corpo); logo, $C_{Dt} = D/S_T q$.
- ♦ D_{Dp} , então $S = S_b$ (a área da superfície frontal ou de proa); logo, $C_{Dp} = D/S_b q$.

Outra área de referência importante é a área volumétrica $S_v = V^{2/3} \propto (l^3)^{2/3} = l^2$, que tem a dimensão de área (l : comprimento característico do corpo). Neste caso, $C_{Dv} = D/S_v q$. A área S_v é usada nas análises de custo do transporte de energia por unidade de volume deslocado. Quando $\mathfrak{R}$ é constante, os coeficientes D_{Dt} , D_{Dp} e D_{Dv} permitem comparar as características hidrodinâmicas de corpos de diversos tamanhos e velocidades, desde que $C_D(\mathfrak{R})$ seja variável. Para *valores médios* de $\mathfrak{R}$, os valores de C_D são $\leq 0,2$ e $\geq 1,3$.

Na região do fluido com valores de $\mathfrak{R} \approx \mathfrak{R}_c$, $dC_D/d\mathfrak{R}$ mudará drasticamente para uma forma determinada de um corpo no fluido.

Exemplo: Um peixe ao absorver ar adquire uma forma esférica com 10 cm de raio. A densidade média do peixe é $1,02 \text{ kg/m}^3$. Calcule

- a) a força de arraste experimentada pelo peixe, ao se deslocar na água ($\eta_{\text{água}} = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$) com velocidade de 2 m/s ;
- b) a velocidade terminal quando a força de arraste equilibrar o peso do peixe, se ele seguir uma trajetória vertical em direção ao fundo do oceano.

Resolução:

- a) Pela lei de Stokes, a força de arraste para esse corpo com forma esférica será

$$D = 6\pi\eta av = 6\pi \times 1 \times 10^{-3} \text{ Pa.s} \times 0,1 \text{ m} \times 2 \text{ m/s} = 3,8 \times 10^{-3} \text{ N.}$$

- b) O equilíbrio entre a força de arraste e o peso do peixe implica em que

$$6\pi\eta av_t = mg = (4/3)\pi a^3 \rho_{\text{peixe}} g,$$

onde v_t é a velocidade terminal do peixe; logo,

$$v_t = 2\rho_{\text{peixe}} g a^2 / 9\eta = \\ (2 \times 1,02 \text{ kg/m}^3 \times 9,8 \text{ m/s}^2 \times 10^{-2} \text{ m}^2) / 9 \times 10^{-3} \text{ Pa.s} = 22,2 \text{ m/s.}$$

Note que estamos considerando desprezível o efeito do empuxo do fluido sobre o peixe e que a densidade média do peixe inclui o ar absorvido.

**PROBLEMAS**

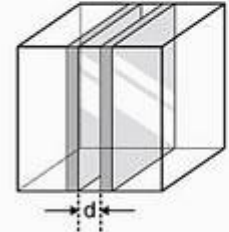
1. Uma dançarina com 490 N está sobre um único pé. Qual é a pressão exercida sobre o chão se a área da ponta do pé é 22 cm²?
2. A pressão do ar liberado por um paciente em um respirador é de 20 cm de H₂O. Converta essa pressão em
 - a) mm de Hg
 - b) Pascal
 - c) atmosferas
3. Uma explosão cria um aumento momentâneo da pressão do ar em sua vizinhança. Calcule a força total exercida por uma pressão de 2700 Pa nas paredes de um edifício com 9 m de largura por 6 m de altura.
4. Em um manômetro de tubo aberto, o diâmetro de um dos ramos é o dobro do diâmetro do outro. Explique de que modo este fato influi sobre as medidas feitas com o manômetro. Há interesse em saber qual dos ramos do manômetro está ligado à câmara cuja pressão queremos medir?
5. A pressão média com que o coração bombeia o sangue para a aorta é 100 mm de Hg. Se a secção transversal da aorta for 3 cm², qual será a força média exercida pelo coração sobre o sangue que está entrando na aorta?
6. Qual será a pressão absoluta no pulmão, durante a respiração normal, se a pressão manométrica pulmonar for -7 cm de água?
7. A seção transversal de uma seringa hipodérmica é 3 cm² e da agulha, 0,6 mm². Calcule
 - a) a força mínima que se deve aplicar sobre o êmbolo para injetar o fluido na veia, se a pressão sanguínea venosa for 12 mm de Hg;

- b) a pressão manométrica sobre o fluido dentro da seringa, se a força aplicada ao êmbolo for uma vez e meia maior que a força mínima.
8. A transfusão de sangue é feita ligando-se, por um tubo, a veia do paciente a uma bolsa com plasma ($\rho = 1,04 \text{ g/cm}^3$) que se encontra a uma altura h acima do paciente.
- a) Se $h = 1 \text{ m}$, qual será a pressão exercida pelo plasma (em mm de Hg) ao entrar na veia?
- b) A que altura mínima deve ser colocada a bolsa de plasma se a pressão venosa for 3 mm de Hg?
- c) A que altura mínima deveria se colocar a bolsa de plasma em um planeta onde a aceleração da gravidade é 70% do valor da aceleração gravitacional da Terra?
9. Quando usam elevadores, algumas pessoas apresentam problemas nos ouvidos devido a mudanças de pressão. Se a pressão interna do tímpano não mudar durante a subida, então a diminuição na pressão externa causará o aparecimento de uma força direcionada para fora do tímpano. Determine
- a) a mudança na pressão do ar quando subimos 100 m em um elevador;
- b) a força exercida sobre o tímpano, nessas condições, considerando uma área de $0,6 \text{ cm}^2$ para o mesmo.
10. Uma bolha com ar quente (30°C) se forma no chão, em um ambiente a 10°C , e então sobe para uma camada de ar mais alta. Dados $\rho_{\text{ar}}(10^\circ\text{C}) = 1,25 \text{ kg/m}^3$ e $\rho_{\text{ar}}(30^\circ\text{C}) = 1,16 \text{ kg/m}^3$, determine
- a) a força total que age sobre ela, se o volume da bolha for 8 m^3 ;
- b) a aceleração inicial da bolha, considerando-se a resistência do ar desprezível;
- c) o volume da bolha quando ela atingir equilíbrio térmico com o meio.
11. Um bloco de granito está suspenso na água por meio de um barbante amarrado a um dinamômetro. Mostrar que a leitura no dinamômetro é dada por $W' = W(1 - \rho_{\text{água}}/\rho)$ (esta leitura é denominada *peso efetivo* do corpo). W é o peso do bloco no ar, ρ é a densidade do bloco e $\rho_{\text{água}}$ é a densidade da água.
12. Um objeto suspenso por um dinamômetro no ar pesa 300 N. O mesmo objeto pesa 250 N se o dinamômetro for introduzido na água. Determine sua densidade e seu volume.
13. Há um corpo com forma cilíndrica, tendo 10 cm de comprimento por 4 cm de diâmetro. Determine
- a) a massa do cilindro se ele for de alumínio;
- b) a densidade do tungstênio, se a massa do cilindro de tungstênio for 1 758 g.



14. Um líquido não viscoso de densidade igual a 950 kg/m^3 flui por um tubo com 4,5 cm de raio. Em uma região constrita do tubo, com raio igual a 3,2 cm, a pressão é $1,5 \times 10^3 \text{ Pa}$ menor do que na tubulação principal. Determine
 - a) a velocidade do líquido no tubo; e
 - b) a vazão desse líquido.
15. Durante a micção, a urina é expelida da bexiga para o exterior através da uretra. Determine a secção da uretra, sendo a pressão manométrica da bexiga 45 mm de Hg, o comprimento da uretra feminina 4 cm, a vazão do fluido $28 \text{ cm}^3/\text{s}$ e a viscosidade da urina $6,9 \times 10^{-4} \text{ Pa.s}$.
16. No fundo de um lago, onde a temperatura é 7°C , a pressão é 2,8 atm. Uma bolha de ar com 4 cm de diâmetro sobe para a superfície, onde a temperatura é 27°C . Qual será o diâmetro da bolha na superfície?
17. Determine a resistência total do sistema circulatório, sendo a vazão média para um adulto $0,83 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ e a queda de pressão entre a aorta e os capilares 90 mm de Hg.
18. Na *inspiração*, o diafragma desloca-se para baixo, de modo que a pressão do ar dentro dos pulmões (ar alveolar) fica 3 mm de Hg abaixo da pressão atmosférica, provocando a entrada de ar para dentro dos mesmos. Na *expiração*, ocorre o processo contrário, isto é, o diafragma se eleva, aumentando a pressão interna dos pulmões para cerca de 3 mm de Hg acima da pressão atmosférica. Desse modo, a pressão média do ar dentro dos pulmões é aproximadamente igual à pressão atmosférica do ambiente. Calcule
 - a) a porcentagem de CO_2 na constituição do ar alveolar, sendo a pressão parcial desse gás no ar alveolar 42 mm de Hg;
 - b) a pressão parcial do O_2 , considerando que o ar seja constituído só por 14% de O_2 ;
 - c) a fração do N_2 nesse ar se, além do CO_2 e do O_2 , o ar alveolar ainda estiver saturado com vapor de água (a pressão de vapor do H_2O a 37°C é 47 mm de Hg);
 - d) a porcentagem do volume total ocupado pelo O_2 , admitindo que ele se comporta como um gás ideal nas condições dadas. Considere que existe 0,1 mol de ar nos pulmões.
19. A concentração e a massa molecular média das três principais proteínas dissolvidas no plasma sanguíneo são: albumina, 45 g/l e 69 000 u.m.a.; globulina, 25 g/l e 140 000 u.m.a.; fibrinogênio, 3 g/l e 400 000 u.m.a. Se as paredes dos capilares forem impermeáveis a essas proteínas, qual será a pressão osmótica do plasma provocado pelo transporte de água vinda dos arredores?
20. Os rins retiram do sangue cerca de 180 litros de fluido por dia (125 ml/min). Esse processo é uma *osmose inversa*, e a pressão osmótica do sangue é 28 mm de Hg. Que trabalho os rins realizam por dia para filtrar esse líquido do sangue?

21. Admitindo-se que o fenômeno de tensão superficial seja o único mecanismo responsável pelo transporte de seiva até o topo das árvores, calcule o diâmetro dos condutores no xilema de uma árvore com 100 m. Que conclusão é possível tirar desse resultado?
22. Considere duas placas de vidro quadradas, com 15 cm de lado, separadas por uma distância d . Se as placas estiverem molhadas e mergulhadas (a parte imersa das placas corresponde a 5 cm) perpendicularmente em uma cuba contendo água, qual deverá ser a distância d para que todo o espaço entre elas seja preenchido com água por ação capilar? Admita que o ângulo α formado pela direção da força T_γ , devido à tensão superficial e da vertical seja quase nulo e que o coeficiente de viscosidade da água, durante a experiência, seja $7,2 \times 10^{-2}$ N/m.
23. A velocidade v_m do sangue através do centro de um capilar é 0,066 cm/s. O comprimento L do capilar é 0,1 cm e seu raio $r = 2 \times 10^{-4}$ cm.
 - a) Qual o fluxo de fluido através do capilar?
 - b) Estime o número total de capilares no corpo, sabendo-se que a vazão de sangue através da aorta é de 83 cm³/s.
24. Considere um tubo capilar com raio r (tendo líquido em seu interior) em cuja extremidade se forma uma gota com raio R . Quando a gota se destacar, qual será seu raio? Dados: densidade do líquido: $1,5 \times 10^3$ kg/m³; tensão superficial do líquido: 0,27 N/m e raio do capilar: 1 mm.
25. Em uma transfusão sangüínea, a bolsa com o sangue está 1,5 m acima da agulha ligada à veia. Admita que o diâmetro interno da agulha seja 0,4 mm, seu comprimento 3,14 cm e que 4,5 cm³ de sangue passem por minuto pela agulha. Determine a viscosidade do sangue, sendo sua densidade $1,05 \times 10^3$ kg/m³ e a pressão na veia igual à atmosférica.
26. Que diferença de pressão é necessária para se enviar sangue com vazão de 1 cm³/s através de uma agulha hipodérmica com 2,0 cm de comprimento e 0,2 mm de diâmetro? A viscosidade do sangue a 37 °C é 4×10^{-3} kg/m.s.
27. Os peixes podem se manter a determinada profundidade dentro da água sem necessidade de gastar energia extra; para isto, ajustam o conteúdo de ar de seus ossos pneumáticos ou da bexiga natatória, fazendo com que a sua densidade seja igual à da água ($\rho = 1,028$ g/cm³). Um certo peixe tem uma densidade de 1,09 g/cm³ quando a bexiga natatória está vazia. De que fração do volume corporal a bexiga natatória precisa se encher para reduzir sua densidade até o valor da densidade da água?
28. Se a vazão do sangue bombeado pelo coração é da ordem de 5 litros/min,
 - a) com que velocidade média o sangue passa pela aorta, cuja área é 4,5 cm²?
 - b) ao chegar aos capilares com diâmetro médio igual a 8 μ m, a vazão do sangue continua aproximadamente igual a 5 litros/min. Determine a velocidade média do sangue ao passar por um capilar, admitindo que há cerca de 5×10^9 deles na rede capilar.



29. Flui água através de um capilar de vidro com 0,06 cm de raio e 20 cm de comprimento. Determine
 - a) a resistência hidráulica para esse fluido;
 - b) o fluxo através do capilar quando a diferença de pressão for 15 cm de água; e
 - c) a diferença de pressão para uma razão de 0,5 cm³/s.
30. Com um intenso esforço de inspiração, a pressão manométrica nos pulmões pode ser reduzida a -80 torr. Qual é a altura máxima que um líquido consegue subir, ao ser aspirado por um canudo, se for
 - a) água?
 - b) álcool de densidade 920 kg/m³?
31. Calcule a resistência hidráulica (para o sangue)
 - a) dos capilares descritos no Problema 28; e
 - b) quando o raio do capilar se dilata para $2,5 \times 10^{-4}$ cm.
32. Admita que os tubos capilares de uma árvore são cilindros uniformes com $1,5 \times 10^{-4}$ mm de raio. A seiva deve ser conduzida até uma altura máxima de 50 m. Se o ângulo de contato for 45° e a tensão superficial da seiva 0,05 N/m, qual a pressão mínima que deve existir nas raízes para que a seiva chegue até a altura máxima da árvore?
33. Uma aranha com 2 g de massa está em pé sobre uma superfície de água. Se cada pata suporta 1/8 de sua massa total, qual será o raio da depressão feita por cada pata? Considere 45° o ângulo de depressão.
34. A 20 °C a água está fluindo através de um cano com 1 cm de raio. Se a velocidade de escoamento no centro do cano for 10 cm/s, determine a queda de pressão devido à viscosidade do líquido, em um trajeto de 2 m ao longo do cano.
35. Qual será a diferença de pressão osmótica desenvolvida nas faces de uma membrana semipermeável se, em um dos lados, 10 g de sacarose (massa molar = 360 g) forem dissolvidos em 1 litro de água a 87 °C? Admita que na outra face haja apenas água à mesma temperatura.
36. Qual é a concentração de partículas asmoticamente ativas na seiva a 20 °C para que ela alcance a parte mais alta de uma árvore com 30 m de altura?
37. Qual é a osmolaridade de uma solução com 1% de
 - a) açúcar (massa molecular = 342,3 u)?
 - b) sal, lembrando que cada molécula de NaCl dissocia-se na água em Na⁺ e Cl⁻?
38. Para cada um dos seguintes movimentos, é dada uma velocidade característica v e um comprimento característico d . Calcular o número de Reynolds em cada caso e dizer o tipo de fluxo que ocorre em torno do corpo de
 - a) um falcão peregrino mergulhando para atingir a presa: $v = 70$ m/s; $d = 0,15$ m;
 - b) uma carpa nadando em um riacho calmo: $v = 1$ m/s; $d = 0,03$ m;
 - c) um paramécio nadando em uma lagoa: $v = 10^{-3}$ m/s; $d = 2 \times 10^{-4}$ m.

Dados: $\delta_{ar} = 1,2$ kg/m³; $\eta_{ar} = 1,8 \times 10^{-5}$ Pa.s; $\delta_{água} = 10^3$ kg/m³; $\eta_{água} = 10^{-3}$ Pa.s.

39. Calcule o número de Reynolds e diga o tipo de fluxo que ocorre no caso de

- a) uma bola de futebol lançada pelo goleiro: $v = 30 \text{ m/s}$; $d = 9 \text{ cm}$;
- b) uma bala disparada dentro da água: $v = 6 \times 10^2 \text{ m/s}$; $d = 2 \text{ cm}$;
- c) uma partícula de poeira em um dia calmo: $v = 2 \times 10^{-4} \text{ m/s}$; $d = 10^{-3} \text{ mm}$;
- d) um dirigível de cruzeiro: $v = 10 \text{ m/s}$; $d = 50 \text{ m}$.

Dados: $\delta_{\text{ar}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$; $\eta_{\text{ar}} = 1,8 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$; $\delta_{\text{água}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$; $\eta_{\text{água}} = 10^{-3} \text{ Pa.s}$.

40. Faça um gráfico, em um papel com escala logarítmica, da velocidade característica do corpo em função dos respectivos números de Reynolds, variando os valores de $\mathcal{R}$ desde 10^{-5} até 10^{10} . Coloque nesse gráfico todos os movimentos citados nos problemas 38 e 39, usando ainda os seguintes valores para os *números críticos* de Reynolds:

$\mathcal{R}$ (aproximado)	Situação física
10	Limite superior para a validade da lei de Stokes
1 200	Início do fluxo turbulento em tubo cilíndrico com entrada irregular
3 000	Início do fluxo turbulento em tubo cilíndrico longo
20 000	Início do fluxo turbulento em tubo com entrada otimizada
3×10^5	Limite superior para a lei do v^2

Destaque os movimentos que

- a) devem envolver fluxo laminar;
- b) devem envolver fluxo turbulento, descrito pela lei quadrática de arrastamento;
- c) provavelmente são muito rápidos para obedecer à lei quadrática de arrastamento.

41. Um submarino tem 100 m de comprimento. Seu casco tem uma forma cilíndrica com 15 m de diâmetro. Quando submerso, ele desenvolve uma velocidade de 30 m/s. O fluxo em torno do casco é laminar ou turbulento?

Referências Bibliográficas

1. JONES, J.H.; EFFMANN, E.L.; SCHMIDT-NIELSEN, K. Control of airflow in bird lungs – radiographic studies. *Respiration Physiology*. v. 45, n. 2, p. 121-131, 1981.
2. GLASHEEN, J.W.; McMAHON, T. A. Running on water. *Scientific American*, v. 277, n. 3, p. 68-69, Sep, 1997.
3. MERCHANT, G.J.; KEELLER, J.B. Contact angles. *Phys. Fluids A - fluid*. v. 4, n. 3, p. 477-485, Mar, 1992.
4. ROSEN, M.W.; CORNFORD, N.E. Fluid friction of fish slimes. *Nature*. v. 234, n. 5323, p. 49-51, 1971.
5. LIGHTHILL, J. Physiological fluid dynamics – Survey. *J. Fluid. Mech.* v. 52, p. 475, Apr, 1972.
6. NACHTIGALL, W. Some aspects of Reynolds number effects in animals. *Math. Method Appl. Sci.* v. 24, n. 17-18, p. 1401-1408, Nov-Dec, 2001.
7. LIGHTHILL, J. Hydromechanics of aquatic animal propulsion. *Ann. Rev. Fluid. Mech.* v. 1, 413-445, 1969.
8. GLASHEEN J.W.; McMAHON T.A. Vertical water entry of disks at low Froude numbers. *Phys. Fluids*. v. 8, n. 8, p. 2078-2083, Aug, 1996.
9. GLASHEEN, J.W.; McMAHON, T.A. A hydrodynamic model of locomotion in the basilisk lizard. *Nature*. v. 380, n. 6572, p. 340-342, Mar, 1996.
10. LIGHTHILL, J. Large-amplitude elongated-body theory of fish locomotion. *Proc. Roy. Soc.* v. B179, n. 1055, p. 125-138, 1971.
11. TAYLOR, G.J. Analysis of the swimming of long and narrow animals. *Proc. R. Soc. London, Ser. v. A* 214, p. 158-183, 1952.
12. NACHTIGALL, W.; BILO, D. Flow adaptation of the penguin during swimming under water. *J. Comp. Physiol.* v.137, n. 1, p. 17-26, 1980.
13. NACHTIGALL, W. Funktionelle Morphologie — Kinematik und Hydromechanik des Ruderapparates von Gyrinus. *Z. Vergl. Physiol.* v. 45, n. 2, p. 193-226, 1961.
14. Idem, ibidem.

Capítulo 7

Bioeletricidade, Lei de Nernst-Planck, Transporte Ativo de Íons



7.1 INTRODUÇÃO

Em seres humanos e animais, cerca de 20% da taxa metabólica basal é usada para manter o funcionamento elétrico das células, ou seja, esses 20% são usados para controlar:

- ♦ o fluxo de íons que se encontram em grande quantidade nos lados externo e interno da superfície celular; e
- ♦ os efeitos devidos às diferentes concentrações dos íons presentes no interior da célula e no meio extracelular.

Entre os líquidos intra e extracelular há uma diferença de potencial, denominada *potencial da membrana*, que tem um papel importante no funcionamento elétrico das células.

Para entendermos os diversos fenômenos elétricos manifestados por uma célula em atividade, precisamos introduzir alguns conceitos básicos de eletricidade. Sabemos que as seguintes *partículas* estão sempre presentes em um *átomo*:

- ♦ elétron, com massa $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg e carga elétrica $q_e = -1,602 \times 10^{-19}$ C;
- ♦ próton, com massa $m_p = 1,675 \times 10^{-27}$ kg e carga elétrica $q_p = +1,602 \times 10^{-19}$ C;

e

- ♦ nêutron, com massa $m_n = 1,673 \times 10^{-27}$ kg e carga elétrica nula.

Logo, $m_n \cong m_p \gg m_e$ e $q_e = -q_p$.

O valor da carga elétrica dos elétrons e prótons é denominado *carga elétrica fundamental*. No SI a unidade para medida da carga elétrica é o Coulomb (C). Na Figura 7.1 está esquematizado um átomo eletricamente neutro, ou seja, com o mesmo número de prótons e elétrons.

Sua parte central é o núcleo, onde estão os prótons e nêutrons, enquanto os elétrons estão distribuídos na parte externa ao núcleo.

Uma *carga elétrica* pode ser negativa ou positiva. Conseqüentemente, se um conjunto de partículas carregadas estiver interagindo, as *forças elétricas* que surgem entre essas partículas poderão ser:

- ♦ *atrativas*, quando as partículas têm cargas elétricas com sinais opostos; ou
- ♦ *repulsivas*, quando as partículas têm cargas elétricas com o mesmo sinal.

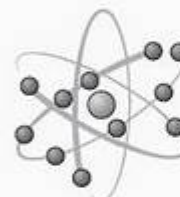


Figura. 7.1 Esquema de um átomo eletricamente neutro.

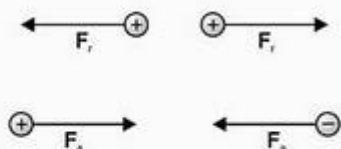


Figura 7.2 As forças elétricas podem ser atrativas (F_a) ou repulsivas (F_r).

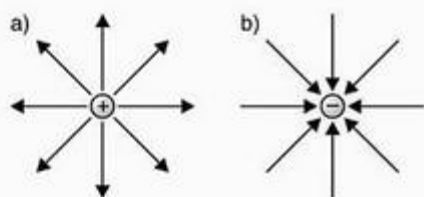


Figura 7.3 Linhas do campo elétrico E devido a cargas positivas (a) e negativas (b).

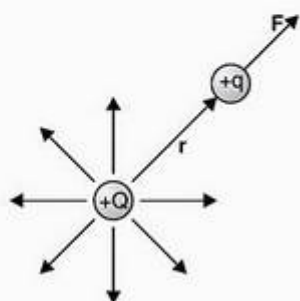


Figura 7.4 Força elétrica F sobre a carga $+q$ devido à carga $+Q$.

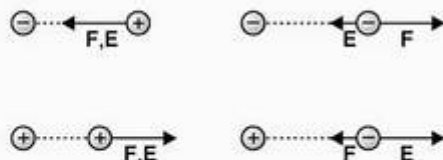


Figura 7.5 Sentidos relativos para quatro situações possíveis entre os vetores E e F .

Como se pode ver na Figura 7.2, as forças elétricas são vetores, cuja *direção* é a linha que une os centros das cargas. O *sentido* dessas forças depende do sinal das cargas e sua *magnitude* é dada pela lei de Coulomb. Quando uma única partícula carregada interage simultaneamente com várias outras partículas carregadas, a força elétrica resultante sobre a partícula será a soma vetorial das forças produzidas por cada uma das partículas.

Campo Elétrico: Lei de Coulomb

O *campo elétrico* E caracteriza a capacidade que uma *carga elétrica* tem para influir no espaço que a circunda. O campo elétrico é uma *grandeza vetorial*: sua *intensidade* diminui com a distância em relação à carga, sendo mais intenso próximo à carga e diminuindo progressivamente ao se afastar dela. Sua *direção* é *radial*, ou seja, em um determinado ponto, o campo tem a direção da reta que une esse ponto à carga. O *sentido* do campo depende do sinal das cargas elétricas que originam essas linhas. Assim, para uma *carga positiva*, as linhas do campo elétrico *divergem* da carga e, para uma *carga negativa*, as linhas *convergem* para ela (como se vê na Figura 7.3).

Quando colocamos uma carga $+q$ no campo elétrico criado por uma carga $+Q$, esta experimentará uma força elétrica repulsiva F , cuja *intensidade* é dada pela *lei de Coulomb*

$$\blacktriangleright F = k \frac{qQ}{r^2} = qE, \quad (7.1)$$

onde k é uma constante, cujo valor no SI de unidades é $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2$ (ϵ_0 é a permissividade elétrica do ar). Como se vê na Figura 7.4, r é a distância entre as cargas elétricas.

Como a força elétrica F sobre uma carga de prova q , colocada em um campo elétrico E , é dada por

$$F = qE,$$

o *sentido relativo* desses vetores dependerá do sinal das cargas elétricas que estiverem interagindo (Figura 7.5).

A intensidade de E depende da distância r entre a fonte Q do campo elétrico e o ponto para o qual calculamos o campo. De fato, da lei de Coulomb

$$\blacktriangleright E = kQ/r^2. \quad (7.2)$$

No SI de unidades, o campo elétrico é medido em N/C .

Quando queremos determinar o campo elétrico resultante E em um ponto, em torno de n fontes de campo, calculamos o valor do campo elétrico de cada fonte nesse ponto ($E_1, E_2, \dots, E_n$) e então, aplicando o *princípio da superposição* de vetores, teremos

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n.$$

Potencial elétrico e energia potencial

O potencial elétrico V é definido a partir do trabalho necessário para movimentar uma *carga unitária positiva* desde o infinito até o ponto em que medimos o potencial. Se esse ponto denominado P (Figura 7.6) encontra-se a uma distância r da fonte de carga Q , então, pela lei de Coulomb, a intensidade da força experimentada pela *carga unitária* q será $F = kQ/r^2$. Como essa força é repulsiva e o deslocamento experimentado pela carga unitária ocorreu no sentido à carga Q , então o trabalho realizado por $\mathbf{F}$, quando a carga unitária se desloca ao longo da distância dr , será $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -F \cdot dr$. Portanto, o *potencial elétrico* em P será dado por

$$V(r) = \int dW = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\infty}^r kQ \frac{dr}{r^2} = -kQ \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2}.$$

Como a carga unitária foi trazida desde o infinito até uma distância r em relação à carga Q , teremos

$$\blacktriangleright \quad V(r) = -kQ \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = k \frac{Q}{r}. \quad (7.3)$$

No SI de unidades, o potencial elétrico é medido em volts, onde $1V = 1J/1C$. Comparando-se a expressão do campo elétrico (equação 7.2) com a do potencial elétrico (equação 7.3) no ponto P, podemos concluir que $E = -dV/dr$, ou, genericamente,

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{E} = -\text{grad}V. \quad (7.4)$$

Pelo teorema trabalho energia, o trabalho realizado pela força elétrica $\mathbf{F}$ ao trazer a carga unitária desde o infinito até P é igual à variação da energia cinética dessa carga ou $W = \Delta K = K_p - K_{\infty}$. Expressando-se em função da *energia potencial* U da carga no infinito e no ponto P, $W = \Delta U = U_{\infty} - U_p$; portanto, $U_p + K_p = U_{\infty} + K_{\infty}$. Assim, a soma das energias cinética e potencial da carga pontual q é a mesma em qualquer ponto de sua trajetória. Logo, a *energia total da carga* q é constante.

A *energia potencial* $U(r)$ de uma carga elétrica q , que se encontra a uma distância r de outra carga Q , é definida como $U = qV$, onde V é o potencial elétrico no ponto em que se encontra q . Como este potencial é $V(r) = kQ/r$, temos

$$\blacktriangleright \quad U(r) = kqQ/r. \quad (7.5)$$

Notem que $U \rightarrow 0$ quando a separação entre as cargas $r \rightarrow \infty$.

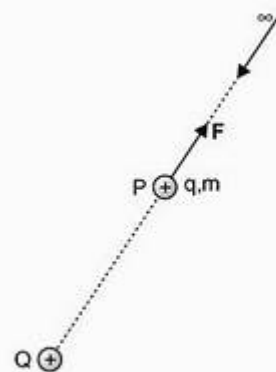


Figura 7.6 Uma carga elétrica unitária q trazida desde o ∞ até o ponto P experimenta um campo elétrico E .

Exemplo: Duas cargas elétricas com $5 \times 10^{-6} \text{ C}$ cada uma estão separadas por 1 m de distância. Determine:

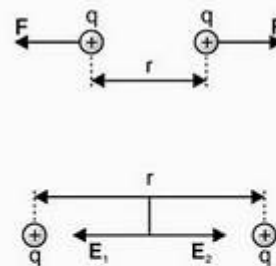
- a) a força elétrica entre as cargas;
- b) o campo elétrico no ponto médio entre as cargas; e
- c) o potencial elétrico nesse mesmo ponto.

Resolução:

- a) Pela lei de Coulomb, a intensidade da força elétrica entre as cargas é

$$F = \frac{kq^2}{r^2} = \frac{(9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) (5 \times 10^{-6} \text{ C})^2}{(1 \text{ m})^2} = 0,225 \text{ N}.$$

A direção de $\mathbf{F}$ é a mesma que une as duas cargas, sendo de natureza repulsiva.



- b) A intensidade do campo elétrico produzido por cada carga elétrica no ponto médio entre elas é a mesma, porém, com sentidos opostos. Logo, o campo resultante será

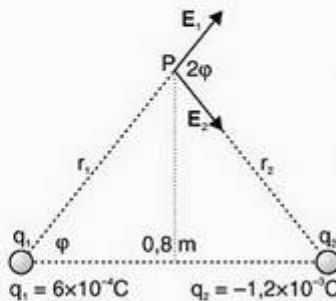
$$E = E_1 + E_2 = E_1 + (-E_1) = 0.$$

- c) O potencial elétrico resultante no ponto médio entre as cargas será

$$V = kq/(r/2) + kq/(r/2) = 4 kq/r = \frac{(4 \times 9 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2)(5 \times 10^{-6} \text{ C})}{1 \text{ m}} = 1,8 \times 10^5 \text{ V}.$$

Exemplo: Duas cargas elétricas com $+6 \times 10^{-4} \text{ C}$ e $-1,2 \times 10^{-3} \text{ C}$ estão separadas por uma distância de 30 cm. Se esta separação for alterada para 80 cm, determine:

- a) a variação da energia potencial elétrica; e
b) a intensidade e direção do campo elétrico resultante no ponto localizado a 50 cm do ponto médio da separação.



Resolução: Na figura ao lado estão representados a posição final das cargas elétricas e o ponto P para o qual será calculado o campo elétrico.

- a) Quando a separação entre as cargas muda de $r_0 = 0,3 \text{ m}$ para $r = 0,8 \text{ m}$, a variação da energia potencial elétrica será

$$\Delta U = kq_1q_2 \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right] = 9 \times 10^9 \times 6 \times 10^{-4} \times (-1,2 \times 10^{-3}) \left[\frac{1}{0,8} - \frac{1}{0,3} \right] \text{ J} = 1,35 \times 10^4 \text{ J}.$$

- b) Por geometria elementar, encontramos $r_1 = r_2 = 0,64 \text{ m}$; logo, a intensidade do campo elétrico em P, devido a q_1 , será

$$E_1 = k \frac{q_1}{r_1^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 6 \times 10^{-4}}{(0,64)^2} \frac{\text{V}}{\text{m}} = 1,32 \times 10^7 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

e, devido a q_2 , será

$$E_2 = \frac{kq_2}{r_2^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 1,2 \times 10^{-3}}{(0,64)^2} \frac{\text{V}}{\text{m}} = 2,64 \times 10^7 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Sendo $\phi = \text{tg}^{-1}(0,5/0,4) = 51,34^\circ$, então a intensidade do campo elétrico resultante no ponto P será

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos 2\phi} = [1,32^2 + 2,64^2 - 1,53]^{1/2} \times 10^7 \text{ V/m} = 2,68 \times 10^7 \text{ V/m}.$$

Capacitores

Capacitores são dispositivos constituídos por duas superfícies condutoras separadas por uma fina lâmina isolante ou por ar. Esse dispositivo é usado para armazenar cargas elétricas ou energia elétrica. As superfícies condutoras podem ter formas variáveis. Em particular, para um capacitor cujas superfícies condutoras são *placas paralelas*, com cargas $+Q$ e $-Q$, respectivamente, cada uma com área A e separadas por uma distância d , é bastante simples calcular o campo elétrico E_0 formado entre as placas. Na Figura 7.7, se V_0 for o potencial elétrico ou a diferença de potencial entre as superfícies condutoras, então, pela equação (7.4)

$$E = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow V = -\int E \cdot dx.$$

Como o campo elétrico existente entre as superfícies é uniforme e além disso as superfícies estão posicionadas em $x = x_0$ e $x = x_0 + d$, então a diferença de potencial V_0 será $V_0 = E_0 d$.

Também $E_0 = \sigma/\epsilon$, sendo $\sigma = Q/A$ a densidade de carga superficial e ϵ a permissividade elétrica do material isolante colocado entre as placas. No caso do ar, $\epsilon = \epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$.

Logo, para um capacitor cujas superfícies são paralelas,

$$\frac{V_0}{d} = \frac{Q}{A\epsilon} \quad \text{ou} \quad \frac{Q}{V_0} = A\epsilon/d.$$

Definindo-se a *capacitância* do condensador como $C = Q/V_0$, então, para o caso apresentado na Figura 7.7,

$$\blacktriangleright \quad C = \epsilon \frac{A}{d}. \quad (7.6)$$

Geralmente, a *capacitância* depende da forma das placas, da distância entre elas e também do isolante utilizado. No SI de unidades, a capacitância é medida em *faraday* (F), onde $1\text{F} = 1\text{C}/1\text{V}$. Como esta unidade é muito grande, para fins práticos usamos submúltiplos do faraday, como o picofaraday ($\text{pF} = 10^{-12} \text{ F}$) e o microfaraday ($\mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$).

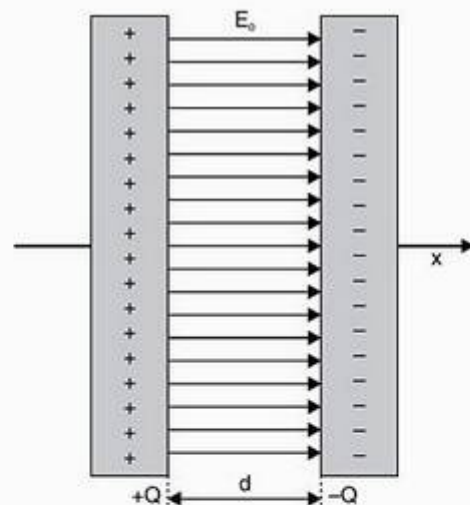


Figura 7.7 Condensador com superfícies condutoras planas e paralelas, separadas por uma distância d .

Exemplo: Um capacitor com 150 pF é constituído por duas placas paralelas com 7 cm^2 cada uma. As placas estão separadas por uma lâmina plástica com espessura igual a 0,2 mm. Qual é a permissividade elétrica do plástico?

Resolução: Usando a equação (7.6) para calcular a permissividade elétrica de um capacitor com placas paralelas, teremos

$$\epsilon = C \cdot d / A = (150 \times 10^{-12} \text{ C}) (2 \times 10^{-4} \text{ m}) / (7 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 4,3 \times 10^{-11} \text{ F/m} = 4,8\epsilon_0.$$

Assim, a permissividade elétrica desse plástico é maior do que a do ar.

Exemplo: A capacitância por unidade de área de muitas membranas biológicas é da ordem de $1 \mu\text{F}/\text{cm}^2$. A membrana celular é essencialmente uma bicamada lipídica com permissividade relativa 3. Qual é a espessura efetiva da membrana?

Resolução: Considerando uma membrana biológica como um capacitor com placas paralelas, temos

$$d = \epsilon \frac{A}{C} = 3 \times 8,85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \times 10^{-2} \frac{\text{F}}{\text{m}^2} =$$

$$26,5 \times 10^{-10} \text{ m} = 26,5 \text{ \AA}$$

(lembrar que $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m} = 10^{-8} \text{ cm} = 10^{-1} \text{ nm}$).

7.2 POTENCIAL DE UMA MEMBRANA CELULAR

O potencial de uma membrana celular é a diferença de potencial entre as superfícies interna e externa de uma membrana celular quando elas estão *eletricamente carregadas*. Esse potencial é importante para a *manutenção dos gradientes de concentração* dos diferentes íons que encontramos nas regiões intracelular e extracelular.

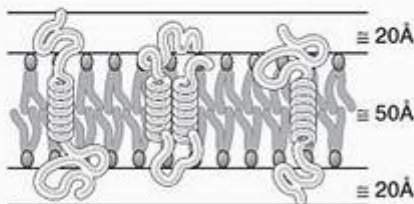


Figura 7.8 Seção transversal de uma membrana biológica (espessura de 75 Å a 100 Å). As proteínas transmembranais dispostas através da bicamada lipídica permitem a difusão de pequenos íons através da membrana.

As membranas celulares são *estruturas complexas* constituídas por uma bicamada de *moléculas de fosfolipídios* onde estão imersas *moléculas de proteínas*, como está esquematizado na Figura 7.8.

Os *fosfolipídios* geralmente ocupam 70% do volume (e mais de 90% da superfície) da membrana. O empacotamento dessas moléculas impede a passagem de íons e água através da membrana; porém, como há *proteínas* transmembranais que formam *canais* através de bicamada, é possível a troca de íons do meio intra para o extracelular e vice-versa. Se considerarmos como espessura da membrana o somatório das camadas mostrado na Figura 7.8.

As membranas celulares apresentam uma *alta resistência elétrica* decorrente da extensa superfície líquida, o que implica em um *potencial elétrico relativamente elevado* (da ordem de 100 mV) entre o interior e o exterior da célula.

As propriedades elétricas de uma membrana *celular* são derivadas da ionização de suas superfícies interna e externa e principalmente de sua capacidade para deixar passar seletivamente apenas alguns tipos de íons.

Os meios extra e intracelular geralmente apresentam característica *salina*. As moléculas suspensas nesses meios encontram-se ionizadas, movendo-se livremente. Por outro lado, tanto *dentro quanto fora* da célula, temos que *a concentração de ânions é muitíssimo próxima da concentração de cátions*. Na Figura 7.9 mostramos os recursos básicos necessários para fazermos medidas do potencial de uma membrana celular.

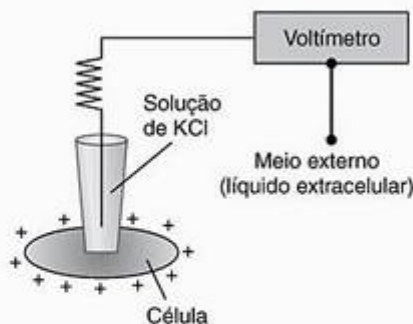


Figura 7.9 Montagem simples para se medir o potencial de uma membrana.

Exemplo: A membrana de uma célula tem permissividade elétrica $\epsilon = 10\epsilon_0$

e espessura de 80 Å. Se na superfície dessa membrana encontramos uma carga elétrica fundamental para cada quadrado com 250 Å de lado, determine:

- o potencial da membrana;
- o campo elétrico no interior da membrana; e
- a força elétrica que experimenta cada íon de Ca^{++} que se encontra no interior da membrana.

Resolução: A carga elétrica fundamental de $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ocupa, na membrana, uma área de $(2,5 \times 10^{-8} \text{ m})^2 = 6,25 \times 10^{-16} \text{ m}^2$. Logo, a densidade de carga superficial será

$$\sigma = (1,6 \times 10^{-19} \text{ C}) / (6,25 \times 10^{-16} \text{ m}^2) = 0,256 \times 10^{-3} \text{ C/m}^2.$$

- a) O potencial elétrico esperado para esta membrana será

$$V_0 = \sigma d / \epsilon = 0,256 \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-9} / 8,85 \times 10^{-11} \text{ V} = 23,14 \text{ mV}.$$

- b) O campo elétrico desenvolvido pela membrana será

$$E_0 = \sigma / \epsilon = 0,256 \times 10^{-3} / 8,85 \times 10^{-11} \text{ V/m} = 2,89 \times 10^6 \text{ V/m}.$$

- c) Sendo a carga elétrica de um íon de cálcio duas vezes uma carga fundamental, a força elétrica sobre esse íon, que se encontra no interior da membrana, será

$$F = 2 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 2,89 \times 10^6 \text{ N} = 9,26 \times 10^{-13} \text{ N}.$$

A Figura 7.10 mostra uma membrana biológica com espessura d . A superfície externa dessa membrana e o exterior da célula têm um mesmo potencial $V(r) = V_e$, que é constante. No interior da célula, o potencial também é constante com $V(r) = V_i$; logo, a diferença de potencial $V_i - V_e$ será o potencial da membrana celular.

Quando não há influências externas sobre a célula, o potencial de uma membrana celular é denominado *potencial de repouso* (V_0).

Se o excesso de *ânions* no interior de uma célula é $-Q$, e o excesso de *cátions* em seu meio externo é $+Q$, então, um arranjo conveniente dessas cargas na membrana celular constitui a origem do *potencial de repouso* da célula.

No caso das *fibras nervosas e musculares estriadas*, o potencial de repouso V_0 tem os valores típicos $-100 \text{ mV} < V_0 < -55 \text{ mV}$. Já no caso das *fibras dos músculos lisos*, o potencial de repouso V_0 tem os valores típicos $-55 \text{ mV} < V_0 < -30 \text{ mV}$.

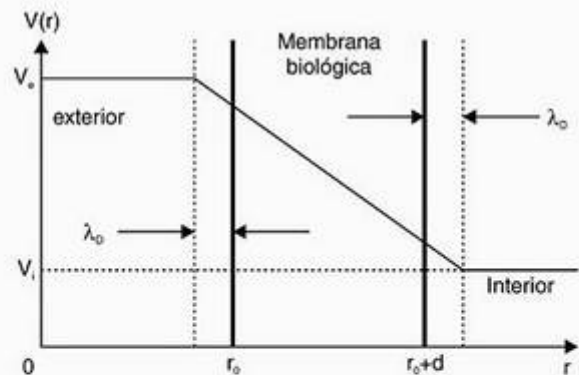


Figura 7.10 Variação do potencial através de uma membrana. λ_D é a espessura de Debye, uma camada fina onde se acumula o excesso de cargas positivas e negativas.

Na Figura 7.11 mostramos esquematicamente uma membrana com carga $+Q$ e $-Q$ em suas superfícies externa e interna, respectivamente. Sua espessura média é $d = 70 \text{ \AA} = 7 \times 10^{-9} \text{ m}$ e seu potencial de repouso é $V_0 = -70 \text{ mV}$. Logo, a intensidade do campo elétrico no interior da membrana será $E_{\text{in}} = -V_0/d = 10^7 \text{ V/m}$. Portanto, qualquer *íon monovalente* no interior da membrana experimentará uma força elétrica de intensidade $F = qE_{\text{in}} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 10^7 \text{ V/m} = 1,6 \times 10^{-12} \text{ N}$, que é muito maior do que o peso do próprio íon.

Se r é o *comprimento característico* de uma célula, a espessura de sua membrana será $d \ll r$; a permissividade elétrica ϵ da membrana é maior que a do ar ϵ_0 , normalmente da ordem de $10\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-11} \text{ C}^2/\text{N.m}^2$. Para $d \approx 70 \text{ \AA}$, a capacitância por unidade de área da membrana será $C/A = \epsilon/d = 1,26 \times 10^{-2} \text{ F/m}^2$. Por outro lado, para o caso de um capacitor com placas paralelas, sua densidade de carga superficial é $\sigma = C \cdot V_0/A$. Logo, para um potencial de membrana $V_0 = -70 \text{ mV}$, teremos $\sigma = 8,85 \times 10^{-4} \text{ C/m}^2$. Na Figura 7.12 estão esquematizados os potenciais elétricos e as densidades de carga superficial das superfícies interna e externa de uma membrana. A membrana tem $70 \text{ \AA}$ de espessura e um potencial de -70 mV .

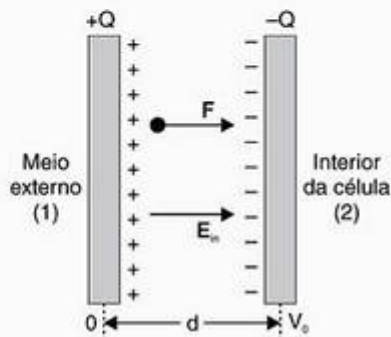


Figura 7.11 O comportamento elétrico da membrana celular lembra as placas de um capacitor. Todo íon, ao atravessar uma membrana, experimentará uma força elétrica F .

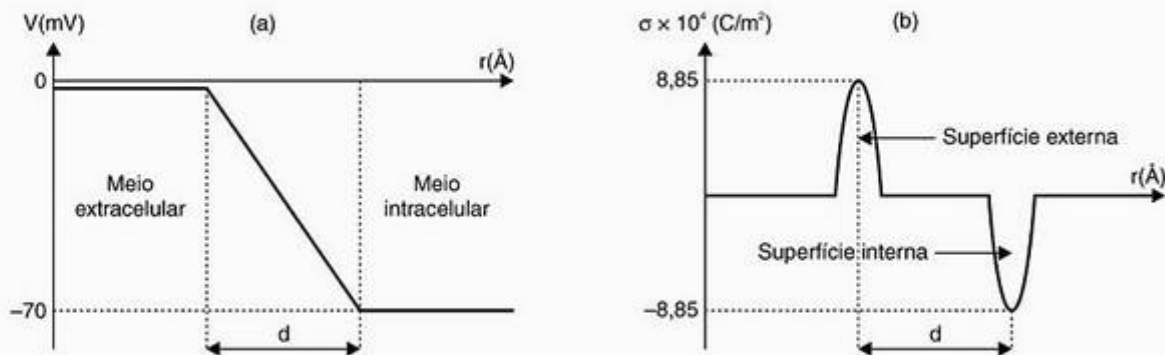


Figura 7.12 a) Membrana com espessura d , com potencial 0 e -70 mV nas superfícies externa e interna, respectivamente.
b) A superfície externa da membrana tem carga positiva e a interna, negativa.

As concentrações dos íons presentes nos fluidos intra (2) e extracelular (1) são bastante diferentes. Por exemplo, em *uma célula muscular de rã*, as concentrações (milimol/litro) dos principais íons são:

Íons	Concentração Intracelular C(2)	Concentração Extracelular C(1)	Razão C(2)/C(1)	Potencial de Nernst* (mV)
K^+	124,0	2,25	55,0	-100,0
Na^+	10,4	109,0	0,095	58,7
Ca^{++}	4,9	2,1	2,3	-12,1
Mg^{++}	14,0	1,25	11,2	-30,2
Cl^-	1,5	77,5	0,019	-90,6
HCO_3^-	12,4	26,6	0,47	-15,8
Íons orgânicos	~74,0	~13,0		

* A definição do *potencial de Nernst* para cada íon será apresentada adiante.

A tabela anterior mostra que $C_K(2) \gg C_K(1)$, $C_{Na}(1) \gg C_{Na}(2)$ e $C_{Cl}(1) \gg C_{Cl}(2)$. Essa distribuição assimétrica entre as concentrações dos íons K, Na e Cl é observada em todas as *células excitáveis* musculares e nervosas.

A carga elétrica presente nas superfícies interna e externa de uma membrana é uma fração muito pequena do total de íons presentes nas regiões intra e extracelular. Por exemplo, vamos considerar que a *célula muscular da rã* seja *esférica* com um volume de 10^{-15} m^3 . Então, com os dados da tabela anterior, podemos *estimar* o percentual de ânions intracelulares que teremos na face interna da membrana. O mesmo pode ser feito para a face externa da membrana. Nesse caso, porém, serão considerados os cátions.

Cada célula tem uma área de $4\pi r^2 \cong 5 \times 10^{-10} \text{ m}^2$. Se considerarmos $\sigma = 8,85 \times 10^{-4} \text{ C/m}^2$, o valor da densidade superficial de carga elétrica, então a carga total na membrana ou superfície da célula, será

$$Q = (8,85 \times 10^{-4} \text{ C/m}^2) \cdot (5 \times 10^{-10} \text{ m}^2) = 4,4 \times 10^{-13} \text{ C}.$$

Se essa carga fosse devida somente aos íons monovalentes, o número desses íons nas faces interna ou externa da membrana seria

$$N_{\text{íons}} = Q/e = 4,4 \times 10^{-13} \text{ C} / 1,602 \times 10^{-19} \text{ C / íons} = 2,75 \times 10^6 \text{ íons}.$$

O número total de *ânions monovalentes intracelulares* será a soma dos íons de Cl^- e HCO_3^- :

$$N_{\text{Cl}}(2) = (1,5 \times 10^{-3} \text{ mol/l})(6,02 \times 10^{23} \text{ íons/mol}) (10^{-15} \text{ m}^3)(10^3 \text{ l/m}^3) = 9,03 \times 10^8 \text{ íons}$$

$$N_{\text{HCO}_3}(2) = (12,4 \times 10^{-3} \text{ mol/l})(6,02 \times 10^{23} \text{ íons/mol}) (10^{-15} \text{ m}^3)(10^3 \text{ l/m}^3) = 74,65 \times 10^8 \text{ íons}.$$

Logo, desprezando-se os ânions orgânicos, o número de ânions monovalentes no interior dessa célula será $N_-(2) = N_{\text{Cl}}(2) + N_{\text{HCO}_3}(2) = 83,69 \times 10^8 \text{ íons}$. Se esses íons fossem os únicos que ficassem na *face interna* da membrana, então teríamos nessa superfície somente

$$(2,75 \times 10^6 \text{ íons} / 83,69 \times 10^8 \text{ íons}) \cdot 100\% = 0,033\%$$

do total de ânions monovalentes no interior da célula.

Podemos mostrar que o número de *cátions monovalentes* no meio extracelular é

$$N_+(1) = N_{\text{Na}}(1) + N_{\text{K}}(1) = 6,56 \times 10^{10} \text{ íons} + 1,35 \times 10^9 \text{ íons} = 6,7 \times 10^{10} \text{ íons}.$$

Como na *face externa* da membrana o número de cátions monovalentes também é $2,75 \times 10^6 \text{ íons}$, então teremos nesta superfície somente

$$(2,75 \times 10^6 \text{ íons} / 6,7 \times 10^{10} \text{ íons}) \cdot 100\% = 0,004\%$$

do total de cátions monovalentes no meio extracelular.

Exemplo: Uma célula tem forma aproximadamente esférica, com volume de 10^{-15} m^3 . Sua membrana tem $90 \text{ \AA}$ de espessura e uma capacitância de 10^{-2} F/m^2 . Se o potencial de repouso da célula for -10 mV , então determine:

- a intensidade do campo elétrico no interior da membrana;
- a carga elétrica total na superfície da membrana;

- c) o número de íons monovalentes na superfície da membrana; e
- d) a força elétrica experimentada por um íon bivalente ao atravessar a membrana.

Resolução: Se r é o raio da célula, então de seu volume $V = (4/3)\pi r^3$ determinamos $r = 0,62 \times 10^{-5}$ m. A área da membrana será $A = 4\pi r^2 = 4,836 \times 10^{-10}$ m² e sua capacitância $C = (10^{-2} \text{ F/m}^2)(4,836 \times 10^{-10} \text{ m}^2) = 4,836 \times 10^{-12}$ F. Sendo o potencial de repouso da célula $V_0 = -10^{-2}$ V, teremos:

- a) a intensidade do campo elétrico no interior da membrana

$$E = V_0/d = -10^{-2} \text{ V}/9 \times 10^{-9} \text{ m} = 1,1 \times 10^6 \text{ V/m};$$

- b) a carga elétrica total na superfície da membrana

$$Q = C \cdot V_0 = 4,84 \times 10^{-14} \text{ C};$$

- c) o número de íons monovalentes na superfície da membrana

$$N = Q/e = 3,02 \times 10^5; e$$

- d) a força elétrica sobre um íon bivalente, ao atravessar a membrana,

$$F = 2eE = 0,35 \times 10^{-12} \text{ N}.$$



7.3 CORRENTE ELÉTRICA E LEI DE NERNST-PLANCK

Todo movimento de partículas carregadas ou portadoras de carga elétrica constitui uma *corrente elétrica*. A corrente elétrica é importante na preparação de *potenciais elétricos* ao longo de *fibras nervosas*. A corrente se manifesta de várias maneiras, como, por exemplo:

- ♦ calor, no caso dos aquecedores;
- ♦ luz + calor, no caso das lâmpadas;
- ♦ energia mecânica, no caso dos motores elétricos;
- ♦ elemento de defesa, no caso dos peixes-elétricos;
- ♦ elemento de navegação, no caso de alguns animais aquáticos, etc.

Definimos corrente elétrica I através de uma secção transversal, com área A , de um condutor, como sendo a taxa do *fluxo* de carga elétrica através dessa área. Se n é o número de portadores por unidade de volume, q a carga elétrica de cada portador e v_d a velocidade de deslocamento ou migração de cada portador, então, no intervalo de tempo Δt , toda a carga ΔQ contida no volume $Av_d\Delta t$ compreendido entre as posições x_1 e x_2 do condutor, como se vê na Figura 7.13, passou pela área A em x_1 ; assim,

$$I = \Delta Q / \Delta t = n \cdot q \cdot A \cdot v_d \cdot \Delta t / \Delta t = nqAv_d \quad (7.7)$$

No SI de unidades, a corrente elétrica é medida em ampère (A), sendo $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$. São bastante usados os submúltiplos 1 miliampère ($\text{mA} = 10^{-3} \text{ A}$) e 1 microampère ($\mu\text{A} = 10^{-6} \text{ A}$).

A corrente elétrica, em soluções eletrolíticas, é originada pelo deslocamento dos íons presentes na solução.

Uma quantidade física bastante usada para descrever os fenômenos que envolvem movimento de portadores de carga elétrica é a densidade de corrente $\mathbf{J}$. Essa quantidade é vetorial, sendo sua magnitude a corrente por unidade de área e a direção e sentido os mesmos que os do campo elétrico que age sobre os portadores. Logo, da equação (7.7), temos

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}_d \quad (7.8)$$

A densidade de corrente $\mathbf{J}$ e os portadores carregados ou as fontes de corrente elétrica satisfazem a equação de continuidade

$$\text{div } \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

onde ρ é a densidade volumétrica de carga elétrica.

Em muitos casos $\mathbf{J}$ é proporcional ao campo elétrico $\mathbf{E}$ no meio em que a corrente ocorre. Nesses meios $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \mathbf{E}/\rho$, sendo σ a condutividade elétrica do meio (não confunda com densidade de carga superficial) e $\rho = 1/\sigma$, sua resistividade (não confunda com densidade de carga volumétrica). Essa relação é denominada lei de Ohm. Se o valor de σ não depende da magnitude de $\mathbf{E}$, então dizemos que o meio é linear.

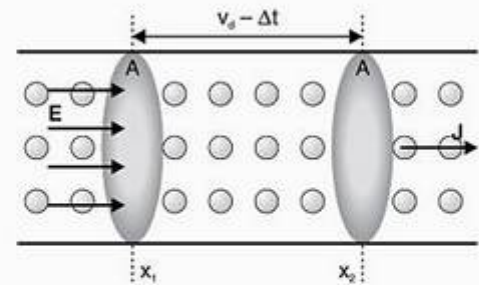
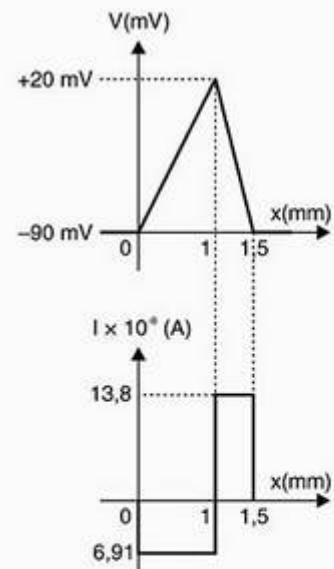


Figura 7.13 Corrente elétrica I devido a portadores de carga elétrica q . A é a área da seção transversal do condutor.

Exemplo: Em dado instante, o potencial ao longo de um axônio varia de acordo com o gráfico ao lado. Se o raio do axônio é 10^{-5} m e a resistividade do axoplasma é $0,5 \text{ V.m/A}$, qual é a corrente elétrica ao longo do axônio em função da posição?

Resolução: Ao longo do axônio, entre 0 e 1 mm, temos campo elétrico $E_1 = -[20 - (-90)] \times 10^{-3} \text{ V} / 10^{-3} \text{ m} = -110 \text{ V/m}$ densidade de corrente $J_1 = E_1/\rho = -220 \text{ A/m}^2$ e corrente ao longo do axônio $I_1 = J_1 A = -6,91 \times 10^{-8} \text{ A}$.

Ao longo do axônio, entre 1 e 1,5 mm, temos campo elétrico $E_2 = -[-90 - 20] \times 10^{-3} \text{ V} / 0,5 \times 10^{-3} \text{ m} = 220 \text{ V/m}$ densidade de corrente $J_2 = E_2/\rho = 440 \text{ A/m}^2$ e corrente ao longo do axônio $I_2 = J_2 A = 13,8 \times 10^{-8} \text{ A}$.



A *condutividade elétrica* de uma solução eletrolítica constituída de íons diferentes dependerá da condutividade elétrica $\sigma_n = \mu_n q_n^2 C_n$ de cada tipo de íon. Aqui μ_n , q_n e C_n são, respectivamente, a mobilidade, a carga elétrica e a concentração na solução eletrolítica dos íons tipo n . A mobilidade μ_n depende da viscosidade do solvente, do tamanho do íon que se movimenta e de sua carga elétrica.

Todo meio condutor pode ser caracterizado por sua *resistividade* elétrica ρ ou sua *condutividade* elétrica σ , sendo $\rho = 1/\sigma$. A resistência R do meio é proporcional à *resistividade* elétrica. A Figura 7.14 apresenta um meio que conduz uma corrente I . Se, nesse meio, σ não depende do campo elétrico E , além de o movimento dos portadores ocorrer em uma mesma direção, teremos $J = \sigma E = E/\rho$. Como nos planos y_1 e y_2 , os potenciais elétricos são V_1 e V_2 , respectivamente; então:

♦ $V = V_2 - V_1 = EI$ é a diferença de potencial entre os extremos y_2 e y_1 do meio condutor.

♦ $I = J \cdot A = \sigma EA$ é a corrente no meio condutor.

A *resistência elétrica* do meio é, por definição,

$$R = V/I = EI/\sigma EA = \rho l/A.$$

No SI de unidades, a resistência elétrica é medida em ohm (Ω). Logo,

$$1\Omega = 1V/1A.$$

A resistividade ρ terá como unidade de medida o $\Omega \cdot m$.

Nos fluidos extra e intracelular, a *concentração* de cada espécie iônica é muito diferente; isso dá origem a uma *difusão iônica*, que tende a uniformizar a concentração de cada espécie de íon nos dois meios. Enquanto essas concentrações forem diferentes, a *agitação térmica* dos íons também contribuirá para essa tendência uniformizadora. Isso implica em um fluxo de carga elétrica ou uma densidade de corrente J^D devido à *difusão iônica*.

Na região intracelular, a maior parte dos ânions são *grandes proteínas*, cuja presença é importante para as funções celulares.

Se os fluidos extra e intracelular encontram-se a uma temperatura absoluta T , sendo μ_n e q_n a mobilidade e a carga elétrica, respectivamente, de cada espécie iônica nesses fluidos, então, pela *1ª lei de Fick*, para uma dada espécie com concentração C_n , a densidade de corrente, devido à difusão desses íons, será

$$\blacktriangleright J_n^D = -q_n D_n \text{grad} C_n = -q_n \mu_n kT \text{grad} C_n, \quad (7.9)$$

onde $D_n = kT\mu_n$ é o coeficiente de difusão da espécie n e $k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K é a constante de Boltzmann.

Em geral, como a concentração C_n de cada espécie iônica *não é uniforme* e, devido à diferença de permeabilidade seletiva para cada espécie e à atuação da bomba de sódio-potássio, o que cria um campo elétrico E no interior da membrana, a *densidade de corrente total* devido à espécie n será

$$\blacktriangleright J_n = J_n^D + J_n^E. \quad (7.10)$$

Essa equação diz que a densidade de corrente elétrica total da espécie n é o resultado da difusão e da migração devido ao campo elétrico criado pela membrana.

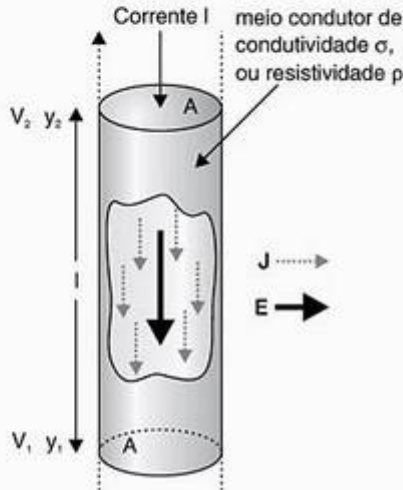


Figura 7.14 O meio de condutividade $\sigma = 1/\rho$ tem uma resistência elétrica $R = \rho l/A$.



Figura 7.15 A agitação térmica dos íons em um fluido celular contribui para uniformizar a concentração desses íons.

Na Figura 7.15 está esquematizada uma concentração não uniforme no fluido celular de uma espécie iônica monovalente (a); a seguir, pela difusão, essa concentração tende a se uniformizar (b).

Para obter a expressão da densidade de corrente J_n ou *fluxo eletrodifusivo* da espécie n em função de sua carga elétrica, mobilidade e concentração, devemos substituir as equações (7.4), (7.9) e a expressão da condutividade iônica na equação (7.10); logo,

$$\blacktriangleright J_n = -q_n \mu_n [kT \text{grad} C_n + q_n C_n \text{grad} V]. \quad (7.11)$$

A equação (7.11) é denominada equação de *Nernst-Planck*. Se as variáveis J , E e C dependem só da variável x , então a equação (7.11) assume a forma simplificada

$$\blacktriangleright J_n = -q_n \mu_n \left(kT \frac{dC_n}{dx} + q_n C_n \frac{dV}{dx} \right). \quad (7.12)$$

Exemplo: Nos dois lados de uma membrana celular encontramos os íons X^+ e Y^- com as respectivas concentrações $C_x(1)$ e $C_y(1)$ no meio extracelular e $C_x(2)$ e $C_y(2)$ no meio intracelular. Analise o transporte de cargas elétricas pela *difusão* desses íons através da membrana celular.

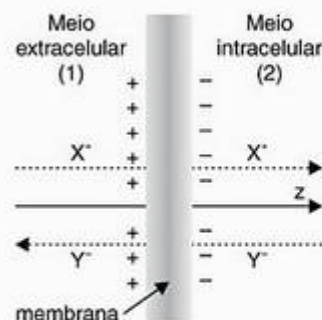
Resolução: O transporte de cargas devido à difusão é dado pela equação (7.9). Se considerarmos que a difusão das cargas ocorre ao longo da direção z , então

$$J_n dz = -q_n \mu_n kT \frac{\partial C_n}{\partial z} dz = -q_n \mu_n kT (dC_n).$$

Se a difusão ocorrer no sentido do meio extra para o intracelular, então

$$\int J_n dz = -q_n \mu_n kT \int_2^1 dC_n = -q_n \mu_n kT [C_n(2) - C_n(1)].$$

- Se $C_x(2) < C_x(1)$ e considerando que q_x é *positivo*, então o fluxo de cargas devido à difusão desses íons ocorrerá no sentido mostrado na figura ao lado.
- Se $C_y(2) < C_y(1)$ e considerando que q_y é *negativo*, então o fluxo de cargas, devido à difusão dos íons Y^- , ocorrerá no sentido mostrado na figura ao lado. Note que, na análise da tendência difusional desses íons, não foram considerados os efeitos do potencial da membrana e dos potenciais eletroquímicos gerados pelos íons X^+ e Y^- .



7.4 POTENCIAIS DE NERNST E DONNAN

Nas células excitáveis, a membrana celular tem permeabilidade seletiva. As membranas biológicas geralmente são:

- ♦ permeáveis a pequenos íons inorgânicos e íons monovalentes;
- ♦ pouco permeáveis a íons multivalentes; e
- ♦ impermeáveis a íons orgânicos complexos (fosfatos orgânicos) e proteínas.

Como as concentrações de um mesmo íon nos meios intra e extracelular são diferentes, ou seja, $C_n(2) \neq C_n(1)$, inicialmente teremos um movimento difusional dos íons permeantes, resultando, assim, em uma transferência de cargas elétricas através da membrana e o conseqüente estabelecimento de um campo elétrico através da membrana. Por exemplo, na Figura 7.16, os fluidos intra e extracelular contêm os íons P^+ e I^- , além dos ânions protéicos A^- . Esses últimos encontram-se no interior da célula com concentração $\Gamma(2)$ e não conseguem atravessar a membrana celular. Se considerarmos que a membrana é permeável aos íons P mas impermeável aos íons I , os íons P^+ podem se difundir no sentido do interior (2) para o exterior (1) da célula se a concentração $C_p(2)$ for maior que a concentração $C_p(1)$.

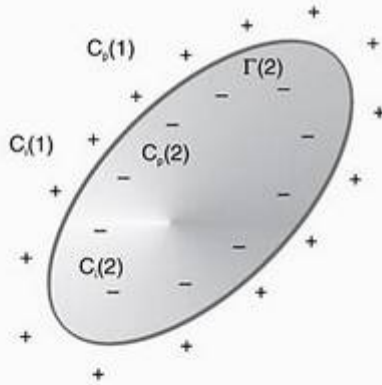


Figura 7.16 A membrana celular é impermeável aos íons I e permeável aos íons P . Os ânions A^- encontram-se no fluido intracelular.

Essa difusão produzirá na membrana um acúmulo de carga elétrica:

- ♦ positiva (+) na superfície externa; e
- ♦ negativa (−) na superfície interna.

Conseqüentemente, teremos um campo elétrico E na membrana dirigido no sentido do meio (1) para o meio (2). A intensidade do campo aumentará enquanto os íons P^+ se difundirem do meio (2) para o meio (1). Simultaneamente, a difusão iônica é retardada pelo campo elétrico E até que a difusão resultante torne-se nula; teremos então um equilíbrio.

No equilíbrio, a força que age sobre os íons P^+ , devido ao campo elétrico, é balanceada pela força devida à difusão, e, então, a densidade de corrente total, devido aos íons P^+ , será nula, ou, pela equação (7.11)

$$\blacktriangleright \quad (1/C_p) \text{grad} C_p + (q_p/kT) \text{grad} V = 0. \quad (7.13)$$

Admitindo que C_p e V variam somente na direção perpendicular à superfície da membrana, e denominando x essa direção, teremos, da equação (7.13),

$$\int_{(2)}^{(1)} \frac{1}{C_p} \frac{\partial C_p}{\partial x} + \frac{q_p}{kT} \int_{(2)}^{(1)} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \text{ ou } \text{Ln} \left[\frac{C_p(1)}{C_p(2)} \right] + \frac{q_p}{kT} [V(1) - V(2)] = 0.$$

Como a diferença de potencial através da membrana devido à difusão dos íons P^+ é $V_p = V(2) - V(1)$, então definimos o potencial de Nernst para o íon P^+ como

$$\blacktriangleright \quad V_p^N = - \frac{kT}{q_p} \text{Ln} \left[\frac{C_p(2)}{C_p(1)} \right]. \quad (7.14)$$

Esse é o potencial em que os íons P^+ estão em equilíbrio eletroquímico, ou seja, o equilíbrio entre as concentrações intracelular e extracelular do íon P^+ é alcançado.

Quando a célula se encontra em um meio a 37 °C (310 K), então em (7.14) $kT/q_p = (1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \times 310 \text{ K}) / 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} = 26,7 \text{ mV}$.

Em qualquer fluido biológico, observamos que, para um volume finito desse fluido, a concentração de ânions é igual à de cátions. Essa condição é denominada *eletroneutralidade*. No caso das células, se a membrana é permeável a pequenos íons inorgânicos, então, devido à grande mobilidade desses íons, os fluidos intracelular e extracelular deverão ser *eletricamente neutros*. Essa eletroneutralidade implica que teremos um maior número de íons positivos no meio intracelular (2) do que no meio extracelular (1). Excetuando-se para uma fina camada (λ_D na Figura 7.10) próxima às superfícies da membrana, o movimento dos íons de um meio para outro não afeta a eletroneutralidade desses meios por ser relativamente pequeno.

Se, na Figura 7.16, a membrana for também permeável aos íons I^- e continuar impermeável aos ânions A^- , a presença de PA influirá sobre o que seria uma condição de equilíbrio, desde que $C_p(2) > C_p(1)$ resulta na difusão dos íons P^+ para fora da célula. O campo elétrico E da membrana faz com que os íons I^- se desloquem para fora da célula, havendo, portanto, um movimento dos íons P^+ e I^- para fora da célula. Essa difusão dos íons P^+ e I^- altera a distribuição e a concentração desses íons nos meios intracelular e extracelular.

O movimento dos íons cessa quando o sistema alcança um equilíbrio estático, ou seja, quando as forças devido à difusão dos íons através da membrana e devido ao campo elétrico na membrana se equilibram. Como o potencial da membrana é o mesmo para os íons P^+ e I^- , os potenciais de Nernst deverão ter o mesmo valor do potencial da membrana. Logo, da equação (7.14),

$$\ln \left[\frac{C_p(1)}{C_p(2)} \right] = \ln \left[\frac{C_i(2)}{C_i(1)} \right] \text{ ou } \frac{C_p(1)}{C_p(2)} = \frac{C_i(2)}{C_i(1)}.$$

Essa relação de *equilíbrio entre as concentrações* dos íons permeantes é conhecida como *equilíbrio Donnan*. Se a membrana for permeável a mais de duas espécies iônicas, o *equilíbrio Donnan* exige que esses íons estejam distribuídos conforme o potencial da membrana. Assim, os íons se redistribuirão até alcançar esta situação de equilíbrio. Por exemplo, quando os meios intra e extracelular contêm íons P^+ , Q^+ , R^- e a membrana celular é permeável a esses íons, alcançaremos o mesmo potencial de Nernst se

$$\blacktriangleright \quad \frac{C_p(2)}{C_p(1)} = \frac{C_q(2)}{C_q(1)} = \frac{C_r(1)}{C_r(2)} = \kappa. \quad (7.15)$$

E o potencial da membrana nesta situação de *equilíbrio de Donnan* será dado por $V_M = (-kT/q) \ln(\kappa)$.

Podemos concluir que, se a membrana celular for permeável a mais de duas espécies de íons assim como para esses íons $C_n(2) \neq C_n(1)$, o *equilíbrio de cargas* elétricas somente será possível com a presença de um potencial V_D através da membrana denominado *potencial de Donnan*. Na situação de equilíbrio, ou seja, quando o fluxo eletrodifusivo através da membrana for nulo,

$$kT \frac{dC_n}{dx} + q_n C_n \frac{dV}{dx} = 0 \text{ ou } \frac{d}{dx} \left[\ln C_n + \frac{q_n}{kT} V \right] = 0.$$

Assim, a quantidade entre colchetes não dependerá de x . Então, para cada espécie iônica permeante,

$$\ln C_n(1) + (q_n/kt)V(1) = \ln C_n(2) + (q_n/kt)V(2).$$

A diferença de potencial $V(2) - V(1) = V_D$ será o *potencial de Donnan* para a membrana (o valor real de V_D dependerá da concentração $\Gamma(2)$ dos ânions A^-)

$$\blacktriangleright \quad V_D = - \frac{kT}{q_n} \ln \left[\frac{C_n(2)}{C_n(1)} \right]. \quad (7.16)$$

Para se chegar à equação (7.16) implicitamente admitimos que a membrana *não* permite a passagem da água através dela. Devemos considerar o *equilíbrio osmótico* entre os dois meios celulares, além da possibilidade de o movimento da água influir sobre as concentrações iônicas nesses meios.

No *equilíbrio de Donnan* com o meio intracelular contendo íons que não podem atravessar a membrana, a razão $C_n(2)/C_n(1)$, para os íons permeantes, deverá ser a mesma para qualquer desses íons. Isto equivale a $V_D = V_n^N$ para os íons permeantes. Sempre que uma membrana celular for *permeável* a:

- ♦ cátions – então V_n^N para cada espécie iônica será negativo;
- ♦ ânions – então V_n^N para cada espécie iônica será positivo.

Exemplo: As concentrações (mM/l) dos íons permeantes, no fluido extracelular dos vertebrados, são

$$C_{Na}(1) = 140; C_K(1) = 10; \text{ e } C_{Cl}(1) = 150$$

e a concentração dos íons impermeantes, no fluido intracelular dos vertebrados, é 125. Determine as concentrações dos íons permeáveis no fluido intracelular.

Resolução: Pelo equilíbrio Donnan teremos

$$\frac{C_K(1)}{C_K(2)} = \frac{C_{Na}(1)}{C_{Na}(2)} = \frac{C_{Cl}(2)}{C_{Cl}(1)}$$

e, pela eletroneutralidade dos íons presentes no fluido intracelular, teremos

$$C_K(2) + C_{Na}(2) = C_{Cl}(2) + C_A(2).$$

Como

$$C_{Na}(2) = \frac{C_{Na}(1)}{C_K(1)} C_K(2) \quad \text{e} \quad C_{Cl}(2) = \frac{C_{Cl}(1)}{C_K(1)} C_K(2),$$

ao substituírmos essas igualdades na relação devido à eletroneutralidade encontramos:

$$C_K^2(2) \left[1 + \frac{C_{Na}(1)}{C_K(1)} \right] - C_A(2) \cdot C_K(2) - C_{Cl}(1) \cdot C_K(1) = 0.$$

Resolvendo essa equação, encontramos

$$C_K(2) = 15 \text{ mM/litro.}$$

Procedendo de forma similar com os íons Na e Cl, achamos

$$C_{Na}(2) = 210 \text{ mM/l e}$$

$$C_{Cl}(2) = 100 \text{ mM/l.}$$

Na figura ao lado, pode-se ver a variação das concentrações dos íons Na, K e Cl. O excesso de cargas positivas e negativas está localizado em uma camada com espessura λ_D ou *comprimento de Debye* (da ordem de $7,5 \text{ \AA}$).

Neste exemplo,

$$\frac{C_{Na}(2)}{C_{Na}(1)} = \frac{C_K(2)}{C_K(1)} = \frac{C_{Cl}(1)}{C_{Cl}(2)} = \frac{3}{2};$$

logo,

$$V_D = V_{Na}^N = V_K^N = V_{Cl}^N = -(kT/e) \ln(3/2) = -10,5 \text{ mV.}$$

Na eventualidade de a célula *não ter ânions protéicos* em seu meio interior ou $C_A(2) = 0$, teríamos, para a concentração do potássio $C_K(2)$ interno,

$$C_K^2(2) \left[1 + \frac{C_{Na}(1)}{C_K(1)} \right] = C_{Cl}(1) \cdot C_K(2).$$

Resolvendo essa equação, achamos $C_K(2) = 0$ ou $C_K(2) = 10 \text{ mM/l}$. Ignorando-se o primeiro valor de $C_K(2)$, encontramos $C_{Na}(2) = 140 \text{ mM/l}$ e $C_{Cl}(2) = 150 \text{ mM/l}$. Estes valores de concentrações implicam em que $V_M = 0$; portanto, a presença dos ânions protéicos A^- no interior celular tem um papel importante no valor final do potencial da membrana celular.

Como $C_A(2) \neq 0$, os cálculos acima mostraram que

$$C_K(2) > C_K(1) \text{ e } C_{Na}(2) > C_{Na}(1) \text{ ou}$$

$$C_K(2) + C_{Na}(2) > C_K(1) + C_{Na}(1);$$

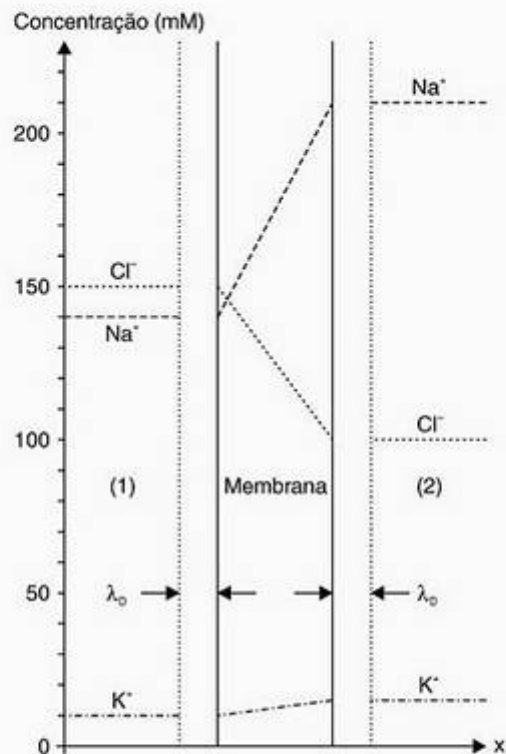
logo,

$$C_{Cl}(2) + C_A(2) = C_K(2) + C_{Na}(2) > C_K(1) + C_{Na}(1) = C_{Cl}(1),$$

o que leva à condição

$$C_K(2) + C_{Na}(2) + C_{Cl}(2) + C_A(2) > C_K(1) + C_{Na}(1) + C_{Cl}(1).$$

Assim, a *concentração osmótica* devida aos íons no meio interno (2) excede àquela do meio externo (1). Se nestes meios a água se move livremente, então haverá um fluxo dessas moléculas do meio externo (2) para o interno (1), mudando as concentrações dos íons até que o equilíbrio Donnan seja atingido. *Essa difusão das moléculas de água tende a diluir a concentração dos ânions protéicos A^- presentes no interior da célula.*



Exemplo: A membrana do axônio de lula tem um potencial de repouso da ordem de -70 mV, apresentando em seus fluidos intra e extracelular as concentrações (em mM/l) a seguir:

Íons	C(1)	C(2)	C(2)/C (1)	V^N (mV)
K^+	20	400	20	-75
Na^+	440	50	0,113	54
Ca^{++}	10	0,4	0,04	40
Mg^{++}	54	10	0,185	21
Cl^-	500	40 a 150	0,08 a 0,3	-30 a -63
A^-	—	360	—	—

Que conclusões podem ser obtidas da situação de equilíbrio de Donnan?

Resolução: A tabela mostra que o valor máximo do potencial de Nernst para o Cl^- é próximo ao do K^+ ; logo, $V_K^N \cong V_{Cl}^N$. Em uma primeira aproximação podemos fazer a seguinte interpretação: se os íons K^+ e Cl^- são as únicas espécies iônicas *permeantes* e todos os outros são *impermeantes*, então o equilíbrio Donnan será atingido,

$$\therefore V_D \approx V_K^N \approx V_{Cl}^N.$$

Assim, a membrana será *impermeável* aos íons de sódio, orgânicos, polivalentes e também aos grandes ânions presentes no meio intracelular.

Como a membrana celular também é *permeável* aos íons de sódio, o equilíbrio de Donnan não é suficiente para explicar a baixa concentração de sódio no interior das células. A existência de outro mecanismo para explicar este comportamento do sódio será vista a seguir.



7.5 TRANSPORTE ATIVO DE ÍONS: BOMBA DE SÓDIO-POTÁSSIO

O *transporte ativo de íons inorgânicos*, através da membrana celular, é realizado por proteínas transmembranais especializadas no transporte de um tipo de íon, molécula ou grupo de íons ou moléculas análogas. Quando a bicamada lipídica está *isenta de proteínas*, a membrana é altamente impermeável a íons, não importando quão pequenos sejam eles.

As proteínas transportadoras encontradas na membrana podem ser denominadas *proteínas transportadoras (carregadoras)* ou *canais*. As primeiras se ligam ao íon a ser transportado, apresentando mudanças conformacionais durante esse transporte. Os canais não precisam se ligar ao íon a ser transportado, porque este se difundirá através dos *poros hidrofílicos* formados por essas proteínas na bicamada lipídica.

O *transporte ativo de íons* através de uma membrana é sempre mediado por proteínas carregadoras. Nesse tipo de transporte a atividade da proteína transportadora está acoplada a uma fonte de *energia metabólica*. O transporte pode ser de:

- ♦ íons Na^+ e K^+ através da proteína sódio-potássio-trifosfatase (Na^+-K^+ ATPase) denominada *bomba de Na^+-K^+* ;
- ♦ íons Ca^{++} através do retículo sarcoplasmático (a *bomba de cálcio ATPase* é responsável pelo transporte desses íons); e
- ♦ nutrientes orgânicos como os aminoácidos e a glicose, para o interior da célula.

Tipicamente em uma célula $C_K(2) > C_K(1)$ e $C_{Na}(2) < C_{Na}(1)$ essas diferenças de concentrações são responsáveis pelos respectivos *gradientes eletroquímicos de K e de Na*. Se a célula está em equilíbrio pelo *transporte passivo* de íons, o deslocamento do íon Na^+ através da membrana será do meio extra para o intracelular ($V_{Na}^N \neq V_0$) e do K^+ no sentido contrário ($V_K^N \neq V_0$). Portanto, as respectivas concentrações iônicas nos meios intra e extracelular tenderiam a ser alteradas. Entretanto, as diferenças entre as concentrações iniciais são mantidas por uma bomba de Na^+-K^+ que é encontrada na membrana plasmática. Como se vê na Figura 7.17, a bomba opera *transportando ativamente* tanto o Na^+ para fora da célula como o K^+ para dentro.

Sem o transporte ativo de íons através da membrana, a $C_K(2)$ *diminuiria* constantemente, aumentando V_0 e, conseqüentemente, $C_{Cl}(2)$. Logo, as $C_{Na}(2)$, $C_K(2)$ e $C_{Cl}(2)$ se aproximarão respectivamente das $C_{Na}(1)$, $C_K(1)$ e $C_{Cl}(1)$, levando a $V_0 \rightarrow 0$. Isso se manifestaria como um *desaparecimento da capacidade funcional das células, o que provocaria lesões irreversíveis a elas*.

No funcionamento da bomba de Na^+-K^+ observa-se que:

- ♦ o transporte dos íons Na e K está acoplado à hidrólise de ATP;
- ♦ o transporte de íons e a hidrólise de ATP podem ocorrer quando há Na^+ e ATP no interior da célula e K^+ no lado de fora; e
- ♦ para cada molécula de ATP hidrolisada três íons de Na são bombeados para fora e dois íons de K para dentro.

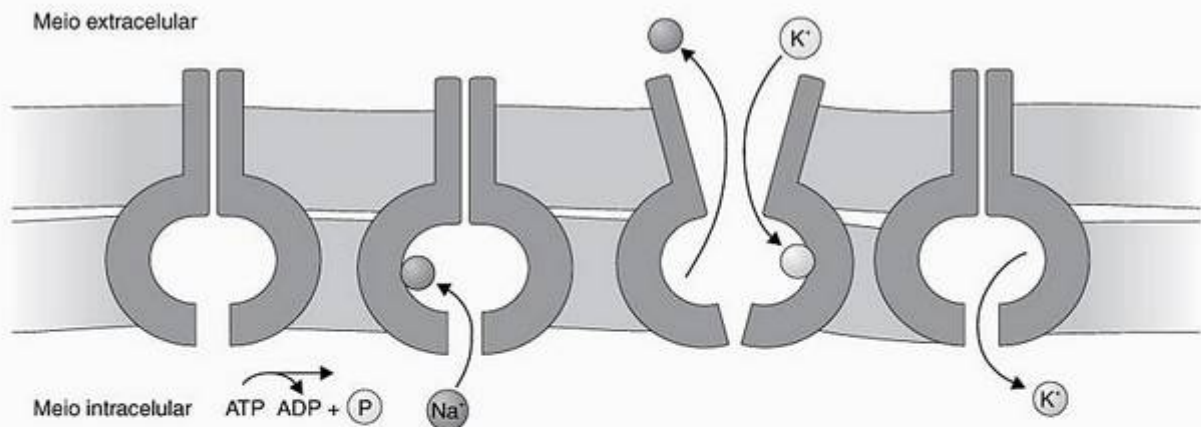


Figura. 7.17 Esquema simplificado de funcionamento de uma bomba de Na^+-K^+ . A proteína inicia o transporte dos íons Na^+ e K^+ através da membrana a partir da hidrólise da ATP. Neste processo a proteína sofre uma modificação conformacional.

Em geral, as células podem investir até $\approx 70\%$ de sua energia metabólica para sustentar o funcionamento das bombas de $\text{Na}^+ - \text{K}^+$. A razão ou estequiometria no transporte dos íons $N(\text{Na})/N(\text{K})$ varia de uma bomba para outra. Neste caso, a razão é 3:2.

Devido ao transporte ativo de íons através de uma membrana, a *equação de eletrodifusão* [equação (7.11)] para as diversas espécies de íons será a soma dos fluxos eletrodifusivos ativo e passivo ou $\mathbf{J}_n = \mathbf{J}_n^a + \mathbf{J}_n^p$. Usando-se a equação (7.11), teremos que a *densidade de corrente total* devido a uma espécie iônica será

$$\mathbf{J}_n = \mathbf{J}_n^a - D_n q_n \left[\text{grad} C_n + \frac{q_n}{kT} C_n \text{grad} V \right]. \quad (7.17)$$

Exemplo: Voltando ao caso do fluido extracelular dos vertebrados, vamos admitir que, além das $C_{\text{Na}}(1) = 140$, $C_{\text{K}}(1) = 10$, $C_{\text{Cl}}(1) = 150$ e $C_{\text{A}}(2) = 125$ (em mM/l), existe na célula uma *bomba de sódio-potássio* que mantém uma $C_{\text{Na}}(2) = 12$ mM/l. Determine, então, os novos valores de $C_{\text{K}}(2)$ e $C_{\text{Cl}}(2)$.

Resolução: Da condição do equilíbrio de Donnan, $C_{\text{K}}(2) \cdot C_{\text{Cl}}(2) = C_{\text{K}}(1) \cdot C_{\text{Cl}}(1)$.

Da condição de eletroneutralidade, $C_{\text{K}}(2) + C_{\text{Na}}(2) = C_{\text{Cl}}(2) + 125$.

Logo, $C_{\text{K}}(2) = 1500/C_{\text{Cl}}(2) \Rightarrow C_{\text{Cl}}^2(2) - 113C_{\text{Cl}}(2) - 1500 = 0$. Resolvendo essa equação, obtemos $C_{\text{Cl}}(2) = 125$ mM/l. Ao substituir este valor na condição de Donnan, obtemos $C_{\text{K}}(2) = 12$ mM/l.

O potencial da membrana V_{OM} será igual a V_{K}^N ou V_{Cl}^N , porque os íons K^+ e Cl^- estão em puro *equilíbrio* eletrodifusivo e

$$V_{\text{OM}} = -\frac{kT}{e} \ln \left[\frac{C_{\text{K}}(2)}{C_{\text{K}}(1)} \right] = \frac{kT}{e} \ln \left[\frac{C_{\text{Cl}}(2)}{C_{\text{Cl}}(1)} \right] = -63 \text{ mV}.$$

Esse potencial de membrana V_{OM} é muito maior do que o potencial de Donnan V_D (para as mesmas concentrações iônicas extracelulares), mesmo excluindo-se a contribuição eletrogênica da bomba de sódio.

Para os íons sódio,

$$V_{\text{Na}}^N = -\frac{kT}{e} \ln \left[\frac{C_{\text{Na}}(2)}{C_{\text{Na}}(1)} \right] = -\frac{kT}{e} \ln \left(\frac{12}{140} \right) = 61 \text{ mV}.$$

Nesse exemplo ilustrativo, foram totalmente ignorados os efeitos dos íons bivalentes Ca^{++} e Mg^{++} . No entanto, a análise do efeito da bomba de sódio-potássio representa sua característica qualitativa.

A seguir, esquematizamos os *transportes ativos e/ou passivos* através da membrana dos íons encontrados com mais abundância nos meios intra e extracelular. Aqui, o potencial da membrana $V_M = -70$ mV é necessário para manter os gradientes de concentração dos diversos íons. Veja a seguir as concentrações em mM/l desses íons.

Íon	C(1)	C(2)	C(2)/C(1)	V^N (mV)
K ⁺	5	150	30	-90
Na ⁺	145	15	0,103	60
Cl ⁻	125	9	0,072	-70

Como o potencial Nernst para o sódio é muito maior que o da membrana, os íons Na⁺ tendem a se difundir da região de maior para a de menor concentração. Já o potencial Nernst para o potássio é muito próximo ao da membrana; assim, embora o gradiente de campo elétrico induza uma difusão no sentido intracelular, os íons K⁺ se difundem majoritariamente para o exterior da célula em resposta à diferença de concentração.

Como os potenciais da membrana e de Nernst para o cloreto têm o mesmo valor de -70 mV, os íons Cl⁻ estarão em equilíbrio, ou seja, não haverá fluxo resultante, embora a membrana seja permeável a eles e suas concentrações extra e intracelulares sejam diferentes.

Isto é, os íons Cl⁻ se difundem para dentro e para fora da célula com igual razão. A razão das concentrações é mantida pelo potencial de membrana V_M .

Simultaneamente ao transporte passivo, por difusão, ocorre o transporte ativo dos íons Na⁺ e K⁺ através da membrana devido à ação da bomba sódio-potássio, dando, assim, origem a uma corrente *ativa*, como se vê na Figura 7.18.

O valor do potencial de Nernst para estes íons, ao ser comparado com o potencial da membrana, implica existência de uma densidade de corrente passiva:

♦ J_K^p terá o sentido do interior para o exterior da célula, pois $V_M - V_K^N = 20$ mV; e

♦ J_{Na}^p terá o sentido do exterior para o interior da célula, pois $V_M - V_{Na}^N = -130$ mV.

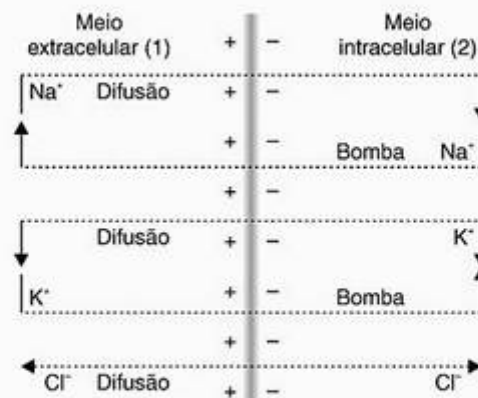


Figura 7.18 Participação dos íons permeantes no transporte ativo e na difusão devido à diferença de potencial através da membrana.

Exemplo: As concentrações iônicas conhecidas (em mM/l), nos fluidos extra e intracelular a 37 °C, são: $C_{Na}(1) = 145$, $C_K(1) = 5$, $\Gamma(1) = 30$, $C_{Na}(2) = 15$ e $\Gamma(2) = 156$. Se Γ for a concentração dos ânions protéicos impermeantes e se a membrana for impermeável aos íons Na⁺ e se ainda a célula estiver no equilíbrio de Donnan, então determine:

- $C_{Cl}(1)$, $C_K(2)$ e $C_{Cl}(2)$; e
- o potencial de Donnan para a membrana desta célula.

Resolução:

- Aplicando-se a condição de eletroneutralidade ao meio extracelular, temos:

$$C_K(1) + C_{Na}(1) = C_{Cl}(1) + C_A(1) \text{ ou}$$

$$C_{Cl}(1) = 5 + 145 - 30 = 120 \text{ mM/l.}$$

Pela condição de equilíbrio de Donnan,

$$C_K(2) \cdot C_{Cl}(2) = C_K(1) \cdot C_{Cl}(1) = 600 \text{ (mM/l)}^2.$$

A condição de eletroneutralidade no meio intracelular implica em que

$$C_K(2) + C_{Na}(2) = C_{Cl}(2) + C_A(2), \text{ ou } C_K(2) - C_{Cl}(2) = 141 \text{ mM/l.}$$

Logo, teremos $C_K^2(2) - 141C_K(2) - 600 = 0$.

Da solução desta equação, encontramos $C_K(2) = 145,1 \text{ mM/l}$. Portanto,

$$C_{Cl}(2) = C_K(2) - 141 = 4,1 \text{ mM/l.}$$

- b) Como $T = 310 \text{ K}$, para o íon K^+ temos $kT/e = 26,7 \text{ mV}$. O potencial de Nernst para este íon será o potencial de Donnan da célula, portanto

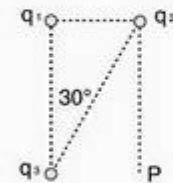
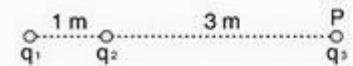
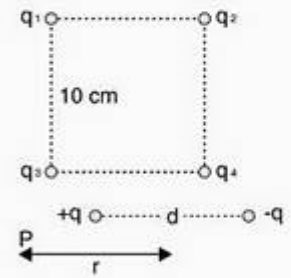
$$V_D = - \frac{kT}{e} \ln \left[\frac{C_K(2)}{C_K(1)} \right] = - 26,7 \ln \left(\frac{145,1}{15} \right) \text{ mV} = -90 \text{ mV.}$$



PROBLEMAS

- Duas esferas de carbono têm ambas um pequeno excesso de elétrons. Qual deve ser a razão entre elétrons e prótons, de modo a cancelar exatamente a força atrativa gravitacional?
- Determine:
 - a massa de um grupo de prótons com uma carga total de 1 C ; e
 - a carga total em 1 Kg de prótons.
- Qual é a razão entre as forças elétrica e gravitacional para:
 - dois elétrons?
 - dois prótons?
- Determine o valor do campo elétrico a uma distância de $0,2 \text{ m}$, $0,5 \text{ m}$ e $0,8 \text{ m}$ de uma carga com $2 \times 10^{-10} \text{ C}$. Faça um desenho em escala para os vetores campo elétrico nestes pontos.
- Uma carga q_1 exerce uma força de 100 N sobre uma carga teste $q_2 = 2 \times 10^{-5} \text{ C}$ localizada a $0,2 \text{ m}$ de q_1 . Determine:
 - o campo elétrico devido a q_1 no ponto em que se encontra q_2 ; e
 - o valor de q_1 .
- Suponha que a Terra tivesse um excesso de carga superficial correspondente a um elétron por cm^2 . Qual seria o campo elétrico logo:
 - abaixo da superfície?
 - acima da superfície?
- Tipicamente a Terra tem um pequeno campo elétrico que, quando medido logo acima da superfície, é $\approx 100 \text{ N/C}$.
 - Qual será o campo elétrico logo abaixo da superfície?

- b) Que densidade de carga superficial determina um campo dessa intensidade?
c) Quantos elétrons excedentes por cm^2 seriam necessários?
8. A figura ao lado mostra um quadrado com 10 cm de lado e cargas de 10^{-8} C em seus quatro vértices. Calcule a intensidade e o sentido do campo elétrico no centro do quadrado, se os sinais de q_1 , q_2 , q_3 e q_4 forem respectivamente:
- a) $+, +, +, +$; b) $+, -, +, -$; e c) $+, +, -, -$.
9. Qual será o valor do campo elétrico no ponto P, em termos de q , r e d , da figura ao lado?
10. Suponha que o átomo de hidrogênio consista em um elétron com carga $-e$, em órbita circular em torno de um próton com carga $+e$. O raio da órbita é $0,53 \times 10^{-10} \text{ m}$.
- a) Qual é a razão entre a velocidade da luz e a velocidade do elétron?
b) Quantas revoluções por segundo realiza o elétron?
11. A figura ao lado mostra três cargas positivas $q_1 = 20 \text{ C}$, $q_2 = 10 \text{ C}$ e $q_3 = 5 \text{ C}$. Determine:
- a) o valor e a direção da força total sobre a carga q_3 exercida pelas cargas q_1 e q_2 ; e
b) o campo elétrico no ponto P devido a q_1 e q_2 .
12. Na figura ao lado temos $q_1 = 5 \text{ C}$, $q_2 = -8 \text{ C}$ e $q_3 = 3 \text{ C}$. Determine:
- a) a magnitude e a direção da força total sobre a carga q_3 exercidas pelas cargas q_1 e q_2 ; e
b) a intensidade do campo elétrico no ponto P devido a q_1 e q_2 .
13. Temos duas cargas $q_1 = 15 \times 10^{-6} \text{ C}$ e $q_0 = 3 \text{ C}$ separadas por 3 m. Calcule:
- a) o potencial elétrico a uma distância de 3m da carga q_1 ; e
b) o trabalho realizado em q_0 pelo campo elétrico, quando q_0 é deslocado para um ponto a 5 m de q_1 .
14. a) Qual é a energia potencial de um elétron que está a 20 cm de uma carga com $6 \times 10^{-8} \text{ C}$?
b) Quanto trabalho é necessário para se levar o elétron para bem longe da carga?
15. Quais são os valores de carga e voltagem máximas que uma esfera com 30 cm de diâmetro pode manter no ar? Desenhe as linhas de força do campo elétrico criado por uma esfera carregada uniformemente.
16. A energia potencial U de um próton é $3 \times 10^{-18} \text{ J}$ em um ponto particular. Qual é o potencial elétrico V neste ponto?
17. No modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, o elétron está em órbita circular com $0,53 \times 10^{-10} \text{ m}$ de raio, tendo o próton no centro. Determine:
- a) a velocidade do elétron;
b) sua energia potencial elétrica; e
c) sua energia mecânica total.



18. Devido a sua pequena espessura, uma membrana celular pode ser aproximadamente descrita como sendo duas placas paralelas e infinitas, carregadas com cargas elétricas de sinais contrários e separadas por uma camada isolante com espessura d . Nesta aproximação, o campo elétrico E no interior da membrana celular é uniforme. Usando $W = eEx$, $\Delta U = U(x) - U(o) = -eEx$,
 - a) calcule em função de E e d o trabalho realizado pela força elétrica sobre um íon Cl^- , quando este atravessa a membrana e entra na célula;
 - b) idem, quando este íon sai da célula atravessando a membrana; e
 - c) calcule a energia potencial do íon nas superfícies interna e externa da membrana. Especifique a referência escolhida para a energia potencial.
19. Na figura do Exercício 11, quais são:
 - a) a energia potencial da carga q_3 ?
 - b) o potencial no ponto P devido a q_1 e q_2 ?
20. O campo elétrico em uma membrana celular com $80 \text{ \AA}$ de espessura é $7,5 \times 10^6 \text{ N/C}$. O sentido de E é para o interior da célula. Estime a ordem de grandeza da relação existente entre a força elétrica sobre um íon K^+ no interior da membrana celular e o peso deste íon.
21. O campo elétrico E em uma membrana celular com $80 \text{ \AA}$ de espessura é $7,5 \times 10^6 \text{ N/C}$. O sentido de E é para o interior da célula. Calcule:
 - a) o potencial de repouso desta célula;
 - b) as variações da energia potencial (em eV) de um íon K^+ , quando entra na célula e quando sai dela;
 - c) as mesmas variações para um íon Cl^- ; e
 - d) os sentidos das forças elétricas sobre estes íons.
22. Qual é a magnitude da carga elétrica máxima na placa de um capacitor com $0,25 \mu\text{F}$ que está ligado a uma bateria com 3 V ?
23. Um capacitor com placas paralelas tem uma separação de $0,1 \text{ mm}$ entre as placas. Qual deve ser a área das placas para que alcance uma capacitância de 1 F ?
24. Um capacitor com 150 pF consiste em placas de 7 cm^2 de área c/u , separadas por uma lâmina plástica de $0,2 \text{ mm}$ de espessura. Qual é a permissividade elétrica do plástico?
25. Um elétron está a $5,3 \times 10^{-11} \text{ m}$ de um próton. Qual é a velocidade mínima que ele deve ter para escapar para o infinito?
26. Considere o caso de dois planos paralelos infinitos, separados por 8 cm . Ambos têm 10^{-6} C de carga positiva por m^2 . Qual é o campo elétrico existente entre os planos?
27. Duas placas paralelas estão separadas por 2 cm . O campo entre as placas é de 20000 N/C . Qual é a diferença de potencial existente entre as placas?
28. O intervalo de 1 mm existente entre as placas paralelas de um capacitor é preenchido com polietileno ($\epsilon = 2,3 \epsilon_0$). Se a voltagem do capacitor for 1000 V , qual será a carga acumulada por m^2 na superfície do polietileno?

29. Duas placas metálicas com 100 cm^2 de área estão separadas por 2 cm. A carga na placa esquerda é $-2 \times 10^{-9} \text{ C}$ e, na placa direita, $-4 \times 10^{-9} \text{ C}$. Determine:
 - a) o campo elétrico imediatamente à esquerda da placa esquerda;
 - b) o campo elétrico entre as placas;
 - c) o campo elétrico imediatamente à direita da placa direita; e
 - d) a diferença de potencial entre as placas.
30. Os fluidos intra e extracelular são condutores ou isolantes? E a membrana celular? Justifique suas respostas.
31. O potencial de repouso da membrana de um axônio é -80 mV . Sua capacitância C por unidade de área A é $2 \times 10^{-2} \text{ F/m}^2$.
 - a) Calcule a densidade de carga superficial sobre a membrana desse axônio.
 - b) Explique como, a partir dos valores citados no enunciado, podemos concluir que a densidade de cargas na superfície interna dessa membrana é negativa.
32. A capacitância de muitas membranas biológicas é da ordem de $1 \mu\text{F/cm}^2$. A membrana é essencialmente lipídica com permissividade relativa 3,0. Qual é a espessura efetiva da membrana?
33. Medidas realizadas em um axônio detectaram um potencial de repouso $V_0 = -70 \text{ mV}$. A espessura da membrana desse axônio é $6 \times 10^{-9} \text{ m}$ e sua permissividade elétrica $\epsilon = 7\epsilon_0$.
 - a) Calcule a intensidade do campo elétrico E na membrana.
 - b) Determine a densidade de cargas σ nas superfícies da membrana.
 - c) Considere x como uma coordenada na direção perpendicular à membrana; faça os gráficos de E , σ e V (potencial elétrico) em função de x , mostrando como essas grandezas variam dentro, na membrana, e dentro e fora do axônio.
34. Escreva:
 - a) a equação de Nernst-Planck;
 - b) as unidades de cada variável ou constante utilizadas; e
 - c) o balanceamento de unidades na equação de Nernst-Planck.
35. Suponha que a concentração intracelular de Cl^- em uma célula do corpo humano seja $4,3 \times 10^{-3} \text{ M/l}$. Qual deve ser a concentração extracelular correspondente de Cl^- se o potencial de Nernst para o Cl^- for -85 mV ?
36. Admita que uma membrana seja permeável só aos íons K^+ .
 - a) Derive uma expressão para o potencial de equilíbrio eletroquímico do K^+ .
 - b) Para cada variável ou constante utilizada (exceto as do Exercício 34), dê as unidades correspondentes.
 - c) Mostre que as unidades estão balanceadas na expressão para o equilíbrio eletroquímico do K^+ .
37. O potencial de repouso de uma membrana celular é V_0 .
 - a) Mostre que, para os íons K^+ e Cl^- , a razão entre as concentrações extra e intracelular é $C(1)/C(2) = \exp(qV_0/kT)$.

- b) Por que essa razão não é verificada exatamente?
38. Compute o valor real do potencial de equilíbrio eletroquímico do K^+ para as concentrações presentes no axônio da lula e substitua no resultado do Exercício 34.
39. Medidas realizadas em um axônio, mantido em um meio a $17^\circ C$, mostraram a existência de um potencial de repouso de -75 mV. A capacitância desta membrana por unidade de área é 2×10^{-2} F/m².
- a) Calcule a razão entre as concentrações de K^+ no interior da célula e nesse meio.
- b) O resultado obtido no item anterior é exato? Justifique.
- c) É possível obtermos, com os dados do enunciado, a razão entre as concentrações de Na^+ ? Justifique.
- d) Calcule a densidade de cargas sobre as superfícies da membrana deste axônio.
40. As concentrações (em mM/l) dos íons de K^+ , Na^+ e Cl^- nas partes externas e internas da célula nervosa da lula gigante são, aproximadamente, $C_{Na}(1) = 485$, $C_{Cl}(1) = 485$, $C_K(1) = 10$, $C_{Na}(2) = 61$, $C_{Cl}(2) = 51$ e $C_K(2) = 280$.
- a) Determine os potenciais de Nernst (equilíbrio eletroquímico) para o K^+ , Cl^- e Na^+ (expresse como diferenças entre os potenciais intra e extracelular).
- b) Há algum potencial de membrana para o qual todos os íons estejam em equilíbrio eletroquímico?
- c) O potencial de repouso da célula é -49 mV ($V_i - V_e$). Quais íons estão em equilíbrio eletroquímico e quais não? Para este último caso, em que sentido os íons se deslocam espontaneamente?
41. Admita que, em uma célula, a concentração intracelular do íon Cl^- seja 0,025 M/l. Qual será a concentração extracelular, se o potencial de Nernst para o Cl^- for -72 mV?

Referências Bibliográficas

- HOPPE, W.; LOHMANN, W.; MARK, H.; ZIEGLER, H. (editors). *Biophysics*. New York, Tokyo, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1983.
- PLONSEY, R.; BARR, R.C. *Bioelectricity: A quantitative approach*. New York and London, Plenum Press, 1990.

Capítulo 8

Membranas Excitáveis, Potenciais de Ação, Eletorreceptores e Peixes-Elétricos



8.1 INTRODUÇÃO

Para entendermos o significado físico da condutância, utilizaremos uma célula nervosa como elemento auxiliar. Os *neurônios* são células especializadas em receber informações elétricas do próprio organismo ou do ambiente externo. Eles também integram as informações e as retransmitem para outras células. Entre o interior e o exterior do neurônio existe uma diferença de potencial V_M denominada *potencial de membrana*. Para esta célula desempenhar suas funções, o corpo celular, os dendritos, o axônio e as sinapses, apresentados na Figura 8.1, devem possuir determinadas características quanto ao modo de gerar, conservar e transmitir impulsos elétricos também conhecidos como *potencial de ação*. Os dendritos têm como função receber impulsos nervosos de outros neurônios e conduzi-los ao corpo celular. Ali são gerados novos impulsos que o axônio repassa a outro neurônio com o qual mantém contato por meio de um de seus dendritos. Esse ponto de contato entre a terminação axonal de um neurônio e o dendrito de outro é chamado de *sinapse*.

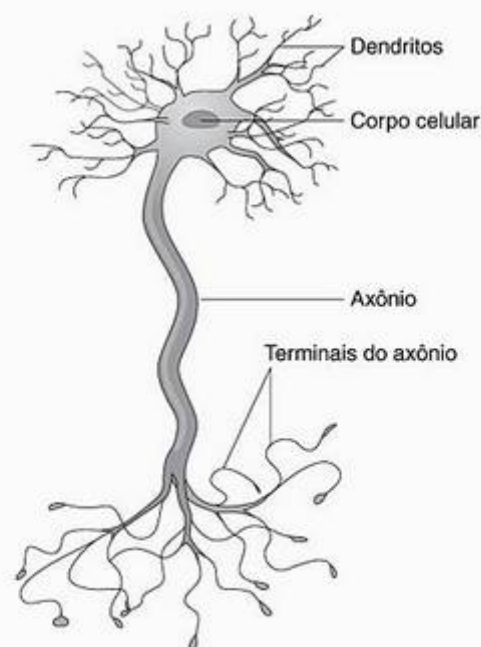


Figura 8.1 Estrutura de um neurônio.



8.2 CONDUTÂNCIA ELÉTRICA E MEMBRANAS EXCITÁVEIS

A *condutância elétrica* é um parâmetro que caracteriza a passagem de uma corrente elétrica I_M através da membrana celular. As propriedades elétricas das membranas podem ser alteradas por meios químicos ou elétricos. Algumas membranas celulares têm uma propriedade denominada *excitabilidade*, que consiste em apresentar transitoriamente o aumento de sua *condutância elétrica* quando a célula é *despolarizada*. É o caso das células nervosas (neurônios) e suas extensões e também das células musculares. Essas células estão envolvidas por uma membrana, cuja função principal é controlar a passagem de substâncias para dentro e para fora da célula.

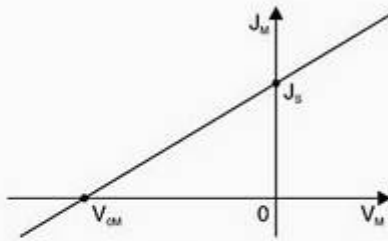


Figura 8.2 Relação linear entre J_M e V_M .

No *estado estacionário* (estado independente do tempo), ou regime constante, a densidade de corrente J_M e a diferença de potencial V_M através da membrana apresentam uma *relação linear* (como se vê na Figura 8.2).

Nesse gráfico, $J_M = J_s$ é o valor da corrente de curto-circuito e V_{CM} é o *potencial de repouso* da membrana.

Durante o repouso, $V_{CM} < 0$. Para potenciais de membrana V_M maiores que o de repouso V_{CM} , teremos uma *corrente de membrana positiva*. Note que a densidade de corrente total é $J_M = \sum J_n$, onde J_n , conforme a equação (7.17), leva em conta os fluxos eletrodifusivos ativos e passivos. Logo,

$$\blacktriangleright J_n - J_n^a = -\frac{D_n q_n^2 C_n}{kT} \left[\text{grad} V + \frac{kT}{q_n C_n} \text{grad} C_n \right]. \quad (8.1)$$

Admitindo-se que as concentrações iônicas C_n e o potencial V variam somente na direção perpendicular à membrana e denominando x essa direção, da equação (8.1) teremos

$$J_n - J_n^a = -\frac{D_n q_n^2 C_n}{kT} \left[\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{kT}{q_n} \frac{1}{C_n} \frac{\partial C_n}{\partial x} \right].$$

No intervalo dx , ao longo da direção perpendicular à membrana celular, teremos

$$(J_n - J_n^a) dx = -\frac{D_n q_n^2 C_n}{kT} d \left[V(x) + \frac{kT}{q_n} \text{Ln} C_n(x) \right].$$

Logo, no intervalo que vai de x_2 no meio intracelular a x_1 no extracelular, teremos

$$\int_{x_2}^{x_1} (J_n - J_n^a) dx = -\frac{D_n q_n^2 C_n}{kT} \left[V(x_1) - V(x_2) - \frac{kT}{q_n} \text{Ln} \left(\frac{C_n(2)}{C_n(1)} \right) \right].$$

Utilizando a equação (7.14), do capítulo anterior, que dá a expressão do potencial de Nernst para o íon tipo n , e considerando $V_M = V(x_2) - V(x_1)$ como potencial da membrana, teremos

$$\int_{x_2}^{x_1} (J_n - J_n^a) dx = -\frac{D_n q_n^2 C_n}{kT} (-V_M + V_n^N) = \sigma_n (V_M - V_n^N),$$

onde σ_n é a condutividade elétrica dos íons tipo n . Considerando-se que, para o deslocamento iônico de x_2 até x_1 , o *fluxo eletrodifusivo passivo* através da membrana dos íons tipo n origina uma densidade de corrente aproximadamente constante, então a densidade de corrente devido aos fluxos ativos e passivos dos íons tipo n será

$$\blacktriangleright J_n = J_n^a + \frac{\sigma_n}{(x_1 - x_2)} (V_M - V_n^N) = J_n^a + g_n (V_M - V_n^N), \quad (8.2)$$

sendo g_n um parâmetro denominado *condutância elétrica iônica* da membrana para o íon tipo n , que expressa a *permeabilidade da membrana* para o íon tipo n . Seu valor depende da concentração iônica C_n dentro e fora da célula e do próprio potencial de membrana V_M .

Como g_n é igual à *condutividade iônica por unidade de comprimento*, sua unidade de medida no SI será $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$.

Se $J_M^a = \Sigma J_n^a$ for a densidade de corrente total devido ao fluxo eletrodifusivo ativo dos íons, a densidade de corrente total da membrana será

$$\blacktriangleright J_M = J_M^a + \Sigma g_n(V_M - V_n^N). \quad (8.3)$$

Em geral, $C_{Na}(2) < C_{Na}(1)$, o que implica um valor positivo para o potencial de Nernst para o sódio, e, assim, o termo $g_n(V_M - V_n^N)$ será negativo. Para compensar essa densidade de corrente negativa, devemos ter $J_{Na}^a > 0$.

No caso dos íons potássio, o termo $g_n(V_M - V_n^N)$ será positivo. Para compensar essa densidade de corrente positiva, deveremos ter $J_K^a < 0$.

Como os fluxos eletrodifusivos *ativos* devem-se às bombas, quando

♦ $J_M^a > 0$, a bomba é denominada *eletrogênica*. Esse é o caso da membrana das células vermelhas do sangue, onde, para cada par de íons K^+ bombeado para o interior da célula, há três íons de Na^+ bombeados para fora da célula.

♦ $J_M^a = 0$, a bomba é denominada *não-eletrogênica*. Neste caso, o potencial de repouso V_{OM} da membrana ($J_M = 0$) satisfaz a relação

$$\Sigma g_n(V_{OM} - V_n^N) = 0 \text{ ou } V_{OM} \Sigma g_n = \Sigma g_n V_n^N \Rightarrow V_{OM} = \sum_n \frac{g_n}{g} V_n^N,$$

sendo (g_n/g) uma medida da fração da condutância dos íons tipo n , e $g = \Sigma g_n$.

Considere uma *célula nervosa* de lula com um *axônio* que não possui mielina (camada lipídica isolante que cobre o axônio), o que é comum em alguns invertebrados. Agora, vamos analisar o transporte dos íons K^+ , Na^+ e Cl^- através da membrana. No quadro a seguir estão as concentrações iônicas (em mM/l) nos meios interno e externo à célula.

Íon	C(1)	C(2)	C(2)/C(1)	V^N (mV)
K^+	20	400	20	-75
Na^+	440	50	0,113	54
Cl^-	500	40	0,08	-30

Para tal, usaremos uma *representação elétrica* de uma secção transversal da membrana (como se vê na Figura 8.3).

Essa representação é conhecida como modelo da *condutância paralela**. Cada parte do circuito representa a contribuição de uma espécie de íon para a corrente total da membrana. Por exemplo, se o potencial da membrana é V_M , então a espécie iônica n experimenta uma força resultante para seu movimento (cujas origens são $V_M - V_n^N$), que é o *desvio da condição de equilíbrio*. Como a densidade da corrente devida a cada espécie de íon é $J_n = g_n(V_M - V_n^N)$, onde o valor de g_n depende de V_M e t , então, teremos

♦ densidade de corrente iônica para o íon potássio $J_K = g_K(V_M - V_K^N)$; se $V_M > V_K^N$, então a força devida à difusão no sentido (2) $\rightarrow$ (1) não será equilibrada pelo campo elétrico. Haverá um fluxo resultante de K^+ de (2) $\rightarrow$ (1) ou uma corrente resultante. Nesse caso, teremos J_K *positivo*;

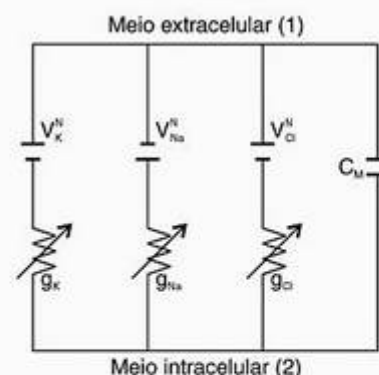


Figura 8.3 Modelo elétrico para a membrana de uma célula nervosa.

* Também conhecido, genericamente, como módulo elétrico da membrana.

♦ densidade de corrente iônica para o íon cloreto: $J_{Cl} = g_{Cl}(V_M - V_{Cl}^N)$; se $V_M > V_{Cl}^N$, então a força devida à difusão no sentido (1) $\rightarrow$ (2) não será equilibrada. Como este fluxo é de cargas negativas, então a corrente elétrica resultante terá o sentido (2) $\rightarrow$ (1); portanto, J_{Cl} será positivo; e

♦ densidade de corrente iônica para o íon sódio: $J_{Na} = g_{Na}(V_M - V_{Na}^N)$; se $V_M > V_{Na}^N$ e sendo V_{Na}^N positivo, então V_M deverá ser positivo. Isso resultará em um fluxo resultante de Na^+ no sentido (2) $\rightarrow$ (1), estando a força, devida à difusão, no sentido (1) $\rightarrow$ (2), e, portanto, J_{Na} será positivo.

Outro tipo de corrente através da membrana, que devemos levar em conta, é a *corrente capacitiva (ou de deslocamento)*, definida em função da capacitância C_M da membrana como

$$\blacktriangleright I_C = C_M \frac{dV_M}{dt}. \quad (8.4)$$

Na condição de *estado estacionário* (equilíbrio dinâmico, independentemente do tempo), como $dV_M/dt = 0$, então $I_C = 0$. Nesta condição de regime constante, quando a *corrente total (ativa e passiva)* é nula, teremos $J_M = J_K + J_{Cl} + J_{Na} = 0$; portanto, o potencial de repouso V_{OM} da membrana será

$$\blacktriangleright V_{OM} = \frac{g_K V_K^N + g_{Cl} V_{Cl}^N + g_{Na} V_{Na}^N}{g_K + g_{Cl} + g_{Na}}. \quad (8.5)$$

A equação (8.5) é conhecida como *equação da condutância paralela*. Note que $J_K + J_{Cl} + J_{Na} = 0$ também leva à relação

$$\blacktriangleright g_K(V_{OM} - V_K^N) + g_{Cl}(V_{OM} - V_{Cl}^N) + g_{Na}(V_{OM} - V_{Na}^N) = 0. \quad (8.6)$$

Para valores típicos do potencial V_{OM} das células nervosas, o segundo termo da equação (8.6) geralmente é muito menor do que o primeiro e o terceiro termos; logo,

$$g_K(V_{OM} - V_K^N) + g_{Na}(V_{OM} - V_{Na}^N) \approx 0 \Rightarrow \frac{g_K}{g_{Na}} = \frac{-(V_{OM} - V_{Na}^N)}{V_{OM} - V_K^N}.$$

Para as células nervosas, com os valores típicos dos potenciais V_K^N e V_{Na}^N , normalmente $(V_{OM} - V_K^N) \ll -(V_{OM} - V_{Na}^N)$. Portanto, teremos $(g_K/g_{Na}) \gg 1$. Esta relação entre as condutâncias do potássio e do sódio é consequência do funcionamento da bomba de sódio-potássio.

Podemos assim dizer que *o equilíbrio existente entre o interior da célula e o seu meio externo é dinâmico*.

Exemplo: O potencial de repouso de uma certa célula é -80 mV, e os potenciais de Nernst para os íons Cl^- , Na^+ e K^+ são, respectivamente, -79 , $+65$ e -90 mV. Se no instante t_0 a razão entre as condutâncias da membrana para os íons K^+ e Na^+ é $17,5$, qual será nesse instante a razão entre as condutâncias da membrana para os íons:

a) Cl^- e Na^+ ?

b) Cl^- e K^+ ?

Resolução: No instante t_0 a célula encontra-se em estado de regime constante; logo,

$$J_{Cl} + J_{Na} + J_K \equiv 0 \text{ ou } g_{Cl}(V_{0M} - V_{Cl}^N) + g_{Na}(V_{0M} - V_{Na}^N) + g_K(V_{0M} - V_K^N) \equiv 0.$$

Para os diversos valores dos potenciais nesse instante, teremos a relação

$$g_{Cl} + 145 g_{Na} - 10 g_K \equiv 0 \quad \text{ou} \quad \frac{g_K}{g_{Na}} = 14,5 + 0,1 \frac{g_{Cl}}{g_{Na}}.$$

- a) A razão (g_{Cl}/g_{Na}) será igual a $(17,5 - 14,5)/0,1 = 30$; e
b) a razão (g_{Cl}/g_K) será igual a $(g_{Cl}/g_{Na})(g_{Na}/g_K) = 30/17,5 = 1,7$.

Se admitirmos que a membrana *obedece* à lei de Ohm, podemos fixar um certo valor g_{0M} para a condutância da membrana, $g_{0M} = \Sigma g_n$. Esta aproximação é válida quando o potencial da membrana V_M se altera muito pouco, de forma que a condutância praticamente não muda. No estado estacionário, o potencial ao longo do interior do axônio terá o valor constante V_{0M} , que é o valor de repouso. Se o potencial da membrana sofrer uma pequena variação igual a $(V_M - V_{0M})$, podemos admitir que $J_M = g_{0M}(V_M - V_{0M})$. Se o potencial da membrana variar pouco, g_{0M} será independente de V_M e da história anterior da membrana.

Esse modelo simples para a membrana prediz que $J_M = 0$ se $V_M = V_{0M}$. Mostra também que J_M será positivo quando $V_M > V_{0M}$ e, negativo, quando $V_M < V_{0M}$. Porém, não explica a propagação dos impulsos nervosos ao longo da membrana.

Os axônios têm formato cilíndrico e suas paredes constituem a membrana celular com uma capacitância, por unidade de área, da ordem de 10^{-2} F/m^2 . Além disso, o axoplasma tem uma resistividade da ordem de $0,6 \Omega \cdot \text{m}$. Esses valores são típicos de um axônio *amielínico*. Nos axônios uma corrente elétrica pode fluir tanto por seu interior quanto no exterior, sendo que a *corrente no interior é longitudinal*, isto é, paralela à direção do axônio. O fluido interior pode ser considerado uma simples resistência elétrica R_i de comprimento L (comprimento do axônio) e raio a (raio do axônio). Assim podemos dizer que este fluido tem uma resistência por unidade de comprimento $r_i = R_i/L$.

Se a corrente elétrica no trecho longitudinal Δz do axoplasma, apresentada na Figura 8.4, for $I_i(z)$ (o subíndice i indica uma corrente longitudinal no interior do axônio), então $I_i(z) = \frac{V(z) - V(z + \Delta z)}{r_i \Delta z}$.

Usando-se a definição de derivada, teremos

$$\blacktriangleright \quad I_i(z) = - \frac{dV}{dz} \cdot \frac{1}{r_i}. \quad (8.7)$$

Essa equação diz que o potencial da membrana deve variar ao longo do axônio para termos uma corrente fluindo pelo seu interior. O sinal negativo na equação (8.7) indica que, para $I_i(z)$ estar fluindo da esquerda para a direita (direção $+z$), é preciso que o potencial decresça neste sentido e vice-versa.

Na Figura 8.5 destacamos um pequeno intervalo Δz da membrana de um axônio.

A corrente longitudinal $I_i(z)$ flui da esquerda para a direita e, sendo I_M a corrente transversal através da membrana, logo teremos

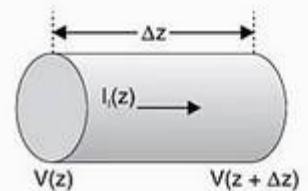


Figura 8.4 Corrente longitudinal $I_i(z)$ no axoplasma.

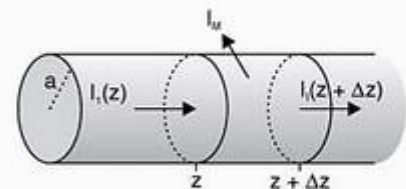


Figura 8.5 Correntes longitudinal e transversal em um trecho do axônio.

$$\blacktriangleright I_l(z) - I_l(z + \Delta z) - I_M = C \frac{\partial V}{\partial t} \quad (8.8)$$

Nesta equação, o termo $C(\partial V/\partial t)$ é a razão correspondente à mudança da carga elétrica dessa porção da membrana que apresenta capacitância C e área $2\pi a\Delta z$. Como a densidade de corrente é J_M e a capacitância por unidade de área é C_M , a equação

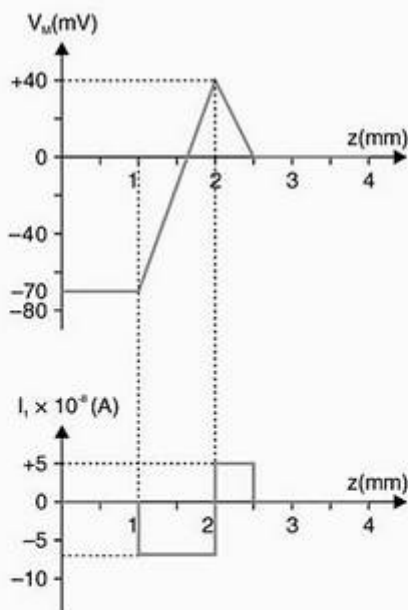
(8.8) assume a forma $\frac{I_l}{2\pi a} \left[\frac{I_l(z) - I_l(z+\Delta z)}{\Delta z} \right] - J_M = C_M \frac{\partial V}{\partial t}$ (é preciso usar derivadas parciais, pois tanto I_l , I_M quanto V dependem de z e de t). Quando $\Delta z \rightarrow 0$, temos

$$\blacktriangleright J_M = -C_M \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial I_l}{\partial z} = \frac{1}{2\pi a r_i} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - C_M \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (8.9)$$

onde foi utilizada a equação (8.7) para a corrente longitudinal. Na equação (8.9), o termo à esquerda da igualdade é a densidade de corrente através da membrana no sentido em que descarrega a capacitância. O primeiro termo à direita da igualdade representa o acúmulo de carga na membrana devido às diferenças nas correntes ao longo do axônio. Já o segundo termo à direita representa a razão com que a membrana ganha carga elétrica por unidade de área.

Quando $V(z)$ é constante, não há corrente ao longo do axônio; agora, se $V(z)$ é uma função de inclinação constante, então $\partial^2 V/\partial z^2$ será nulo e a corrente ao longo do axônio será sempre a mesma, não produzindo nenhum acúmulo de cargas sobre a membrana. Somente quando a função $V(z)$ muda sua inclinação é que $I_l(z)$ é diferente em dois pontos vizinhos do axônio e a carga elétrica pode ser acumulada na membrana.

Exemplo: O potencial de membrana V_M ao longo de um axônio no instante $t = t_0$ tem a forma apresentada na figura ao lado. Considere que o axônio tem um raio com 10^{-5} m e uma resistividade $0,5 \, \Omega \cdot \text{m}$. Faça um gráfico da corrente ao longo do axônio (corrente longitudinal) em função da posição.



Resolução: A resistência por unidade de comprimento desse axônio será $r(2) = \rho/\pi a^2 = 0,5/\pi(10^{-5})^2 = 1,6 \times 10^9 \, \Omega/\text{m}$. A corrente elétrica ao longo do axônio é dada por $I_l(z) = (-1/r)\partial V/\partial z$ que, no caso da variação do potencial apresentado na figura ao lado, reduz-se a $I_l = (-1/r)\Delta V/\Delta z$. Logo, quando

$$\text{a) } \Delta V = +40 \times 10^{-3} \text{ V} - (-70 \times 10^{-3} \text{ V}) = 110 \times 10^{-3} \text{ V e}$$

$$\Delta z = 1 \times 10^{-3} \text{ m, a corrente longitudinal será}$$

$$I_l = -(110 \text{ V/m})/1,6 \times 10^9 \, \Omega/\text{m} = -6,87 \times 10^{-8} \text{ A;}$$

$$\text{b) } \Delta V = 0 \text{ V} - (+40 \times 10^{-3} \text{ V}) = -40 \times 10^{-3} \text{ V e}$$

$$\Delta z = 0,5 \times 10^{-3} \text{ m, a corrente longitudinal será}$$

$$I_l = -(-40 \text{ V/m})/0,5 \times 1,6 \times 10^9 \, \Omega/\text{m} = 5 \times 10^{-8} \text{ A.}$$

Logo, o gráfico da corrente longitudinal em função da posição terá a forma apresentada ao lado.



8.3 POTENCIAL DE AÇÃO DE MEMBRANAS EXCITÁVEIS⁽¹⁾

Novamente consideraremos um neurônio. Podemos esquematizar sua função de receber e transmitir sinais da seguinte maneira:



Os sinais elétricos enviados a outros neurônios são feitos através das *sinapses*. Esses funcionam como válvulas, sendo capazes de controlar a transmissão de impulsos, ou seja, o fluxo de informações entre os neurônios. Denominamos essa capacidade de regulação da *eficiência sináptica*. A Figura 8.6 representa este mecanismo de transmissão.

Quando um neurônio está em *repouso*, o potencial de membrana V_M permanece constante. Nessas condições, o potencial da membrana é denominado *potencial de repouso* V_{OM} . Em geral, o potencial de repouso dessas células apresenta valores entre

$$-50 \text{ mV} \geq V_{OM} \geq -100 \text{ mV}.$$

Quando o potencial intracelular se torna positivo, então dizemos que a célula está *despolarizada*. Quando a mudança ocorre no sentido de aumentar o valor potencial de repouso (que já é negativo), então fala-se de *hiperpolarização*. Este grau de despolarização da membrana é medido por um *potencial v* ; assim, o potencial da membrana será $V_M = V_{OM} + v$. Quando v é

- ♦ *positivo*, teremos uma despolarização da célula;
- ♦ *negativo*, teremos uma hiperpolarização da célula.

Em células excitáveis, uma despolarização local produz um curto-circuito transitório da membrana, que se propaga para toda a membrana como um pulso de despolarização (como se vê na Figura 8.7). Assim, a despolarização local é uma forma de gerar *potenciais de ação*, como é o caso do potencial emitido pelos órgãos sensoriais depois de receber um estímulo específico.

Na Figura 8.8 apresentamos a forma típica de um impulso nervoso em um *axônio amielínico* com um potencial de repouso de -70 mV . Na passagem do impulso,

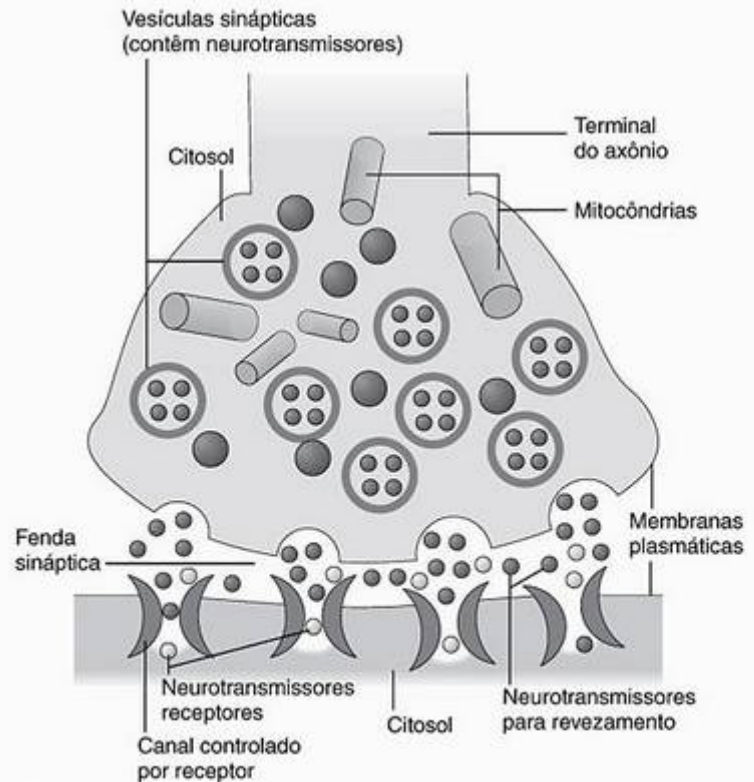


Figura 8.6 Em uma sinapse química, quando o potencial de ação chega ao terminal do axônio, este libera os neurotransmissores contidos nas vesículas sinápticas. O neurotransmissor para revezamento liga-se aos receptores que controlam os canais iônicos.

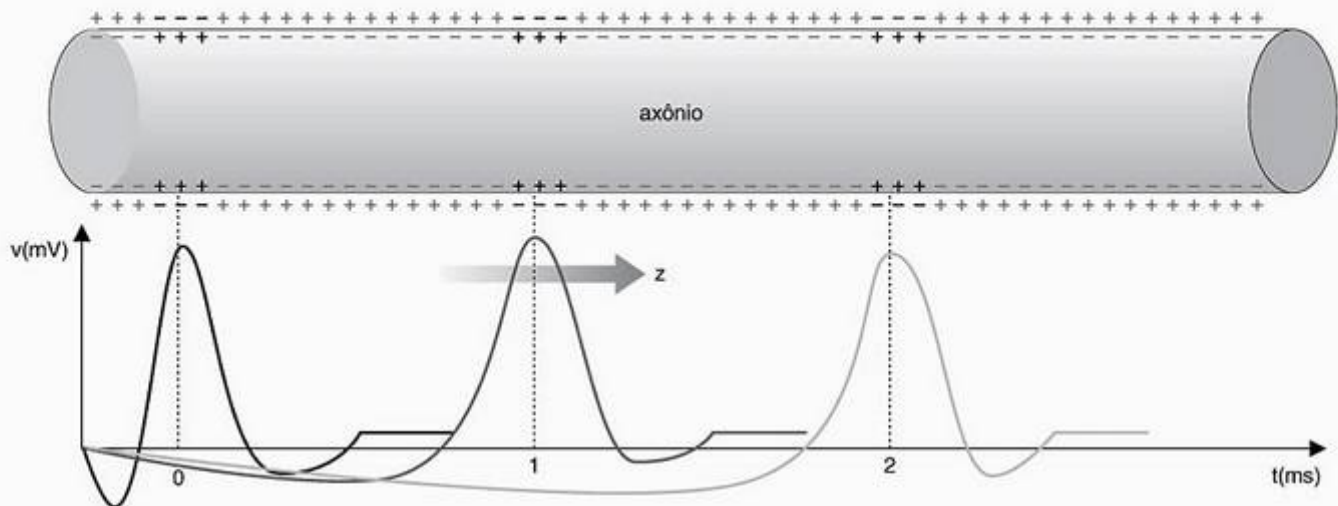


Figura 8.7 Propagação de um potencial de ação: a despolarização de uma seção da membrana eletricamente excitada origina mudanças nos canais de Na^+ . O afluxo de Na^+ origina despolarização de seções adjacentes da membrana, o que induz à abertura de outros canais de Na^+ . Note que um potencial de ação somente pode propagar-se para diante do sítio de despolarização, porque a inativação dos canais de Na^+ o impede de propagar-se para trás.

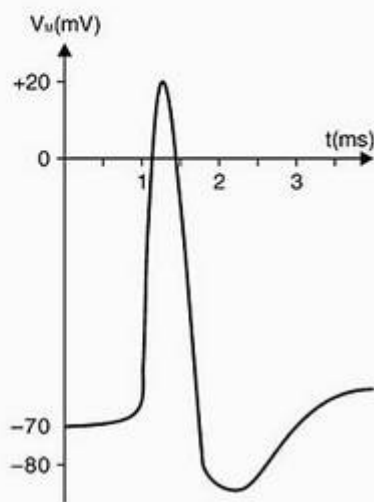


Figura 8.8 Forma típica do potencial de membrana de uma célula nervosa.

por um ponto fixo do axônio, o potencial da membrana em 1 ms ou menos alcança valores positivos. Decai imediatamente a valores próximos dos -90 mV e finalmente recupera de maneira lenta o valor de repouso de -70 mV. Dizemos, então, que a membrana foi despolarizada e, a seguir, repolarizada. Essas mudanças no potencial da membrana ocorrem devido à variação da permeabilidade da membrana à passagem de íons de Na^+ e K^+ .

O concomitante elétrico de um impulso nervoso é o *potencial de ação*. Para que esse potencial aconteça, a despolarização inicial v deve ter um certo valor mínimo V_L denominado *potencial limiar*. O potencial de ação v , como mostra a Figura 8.9, poderá ser um evento totalmente nulo ou inteiro.

Se o potencial em um ponto do axônio muda somente alguns mV ($v < V_L$) de seu valor de repouso (V_{OM}), o potencial em outros pontos do axônio decairá exponencialmente até seu valor V_{OM} . Mas, se o potencial se eleva algumas dezenas de mV acima de V_{OM} ($v > V_L$), o potencial da membrana se elevará a um valor positivo, decaindo até um valor abaixo de V_{OM} e finalmente retornando ao valor V_{OM} .

Podemos descrever o potencial de ação como causador de um *desequilíbrio* de grandes proporções na carga da membrana e de duração próxima a um milissegundo, o que torna o potencial de membrana V_M temporariamente positivo.

O potencial de ação é o principal agente de comunicação a longa distância entre os componentes funcionais de um organismo vivo. Os neurônios, sejam os *sensores ou motor*, transmitem potências de ação em um só sentido; assim, por exemplo, na Figura 8.10 mostramos a propagação de um *impulso nervoso* (potencial de ação) que se originou no receptor de um neurônio sensorial. Quando este potencial de ação se propaga ao longo do axônio de um neurônio que se encontra na região que acontece a *junção entre neurônios*, origina-se na sinapse a liberação de neurotransmissores, que se difundem para dentro da membrana de outro axônio através de uma *fenda*

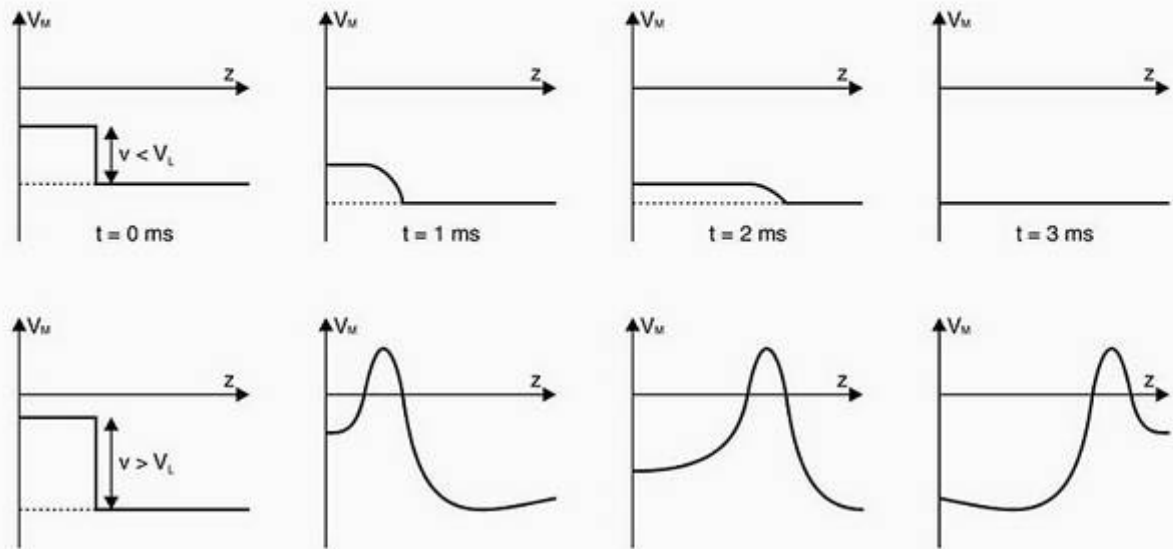


Figura 8.9 Efeito de uma despolarização v quando $v < V_L$ e $v > V_L$. V_L é o potencial limiar da membrana.

sináptica de aproximadamente 200 Å. A informação do impulso nervoso é processada, e o novo potencial de ação inicia sua propagação através dos neurônios motores, até chegar à parte do corpo (um músculo na figura) que será estimulada.

Em um certo local de uma célula nervosa, a variação de V_M com o tempo, durante a propagação de um potencial de ação, alterará sua densidade superficial de carga elétrica $\sigma_M = (C/A)V_M = C_M V_M$, de maneira que a membrana terá σ_M

- ♦ (+) em sua superfície externa e (-) em sua superfície interna se $V_M < 0$;
- ♦ (-) em sua superfície externa e (+) em sua superfície interna se $V_M > 0$;
- ♦ = 0 em ambas as superfícies se $V_M = 0$.

Quando o potencial da membrana é alterado abruptamente de seu valor V_{0M} a um valor $V_M > V_{0M}$ e mantido assim, a corrente resultante tem três componentes:

- ♦ o componente que muda a carga superficial σ_M sobre a membrana, que dura alguns microssegundos (veja o termo $C_M \partial V / \partial t$ da equação (8.9));
- ♦ o componente que flui para o interior da membrana (por causa do fluxo de íons de Na^+ nesse mesmo sentido) e que dura de 1 ms a 2 ms;
- ♦ o componente que flui para fora da membrana (por causa do fluxo de íons de K^+) e cujo valor sobe para 4 ms, podendo ficar estacionário por um tempo longo, dependendo do potencial da membrana. Essas duas últimas contribuições constituem o termo J_M da equação (8.9).

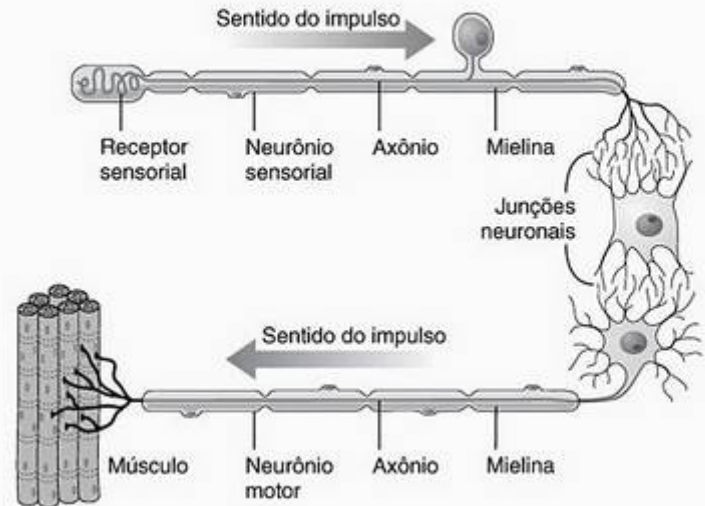


Figura 8.10 Transmissão do potencial de ação através de neurônios sensoriais e motores até uma junção neuromuscular.

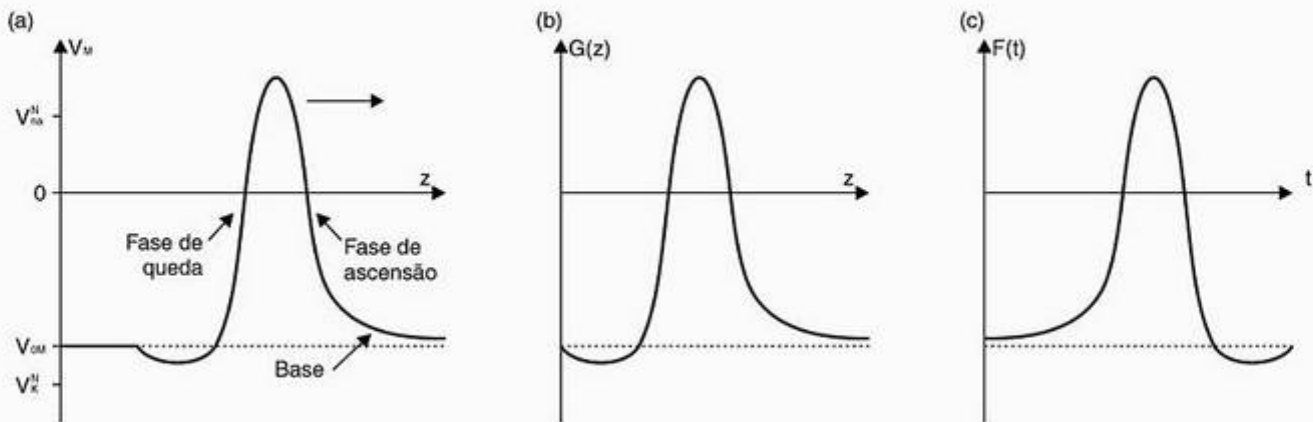


Figura 8.11 a) Forma instantânea de $V_M(z,t)$ quando se propaga no sentido $+z$.
 b) Modelo espacial de $V_M(z,t)$ em $t = t_0$.
 c) Modelo temporal de $V_M(z,t)$ em $z = z_0$.

Inicialmente, vamos relacionar qualitativamente a densidade de corrente J_M através da membrana com o potencial da membrana V_M , para o caso em que $V_M = V_M(z,t)$; onde z é medido ao longo da direção longitudinal do axônio e t é o tempo. Qualitativamente acontece o seguinte: se um *impulso nervoso* produz uma *despolarização* em um ponto z da membrana do axônio e o *potencial de ação* resultante se propaga na direção $+z$, então em um certo instante o potencial da membrana V_M terá a forma mostrada na Figura 8.11a. Em geral $V_M = V_M(z-\theta t)$, onde θ é a velocidade do impulso; essa função terá a forma $G(z) = V_M(z-\theta t_0)$ mostrada na Figura 8.11b no instante $t = t_0$ e terá a forma $F(t) = V_M(z_0-\theta t)$ mostrada na Figura 8.11c em uma posição fixa $z = z_0$ sobre a membrana.

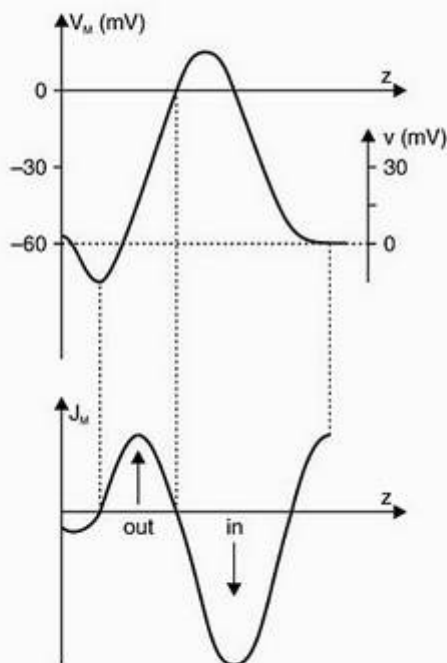


Figura 8.12 a) Potencial de membrana e de ação no instante $t = t_0$.
 b) Densidade de corrente resultante desse potencial de ação.

Conhecendo o potencial $V_M(z)$ ao longo da membrana enquanto o potencial de ação age, podemos também conhecer a densidade de corrente $J_M(z)$ no mesmo instante t_0 . As figuras 8.12a e 8.12b mostram que, durante a *fase de ascensão* do potencial e quando $V_M > 0$, uma *corrente negativa* muito intensa está entrando através da membrana; ao mesmo tempo que, durante a *fase de queda* do potencial, uma *corrente positiva* intensa está saindo através da membrana. Isso significa que, em um ponto fixo $z = z_0$ sobre a membrana, está acontecendo o seguinte: inicialmente, temos um fluxo grande de íons de Na^+ , ou seja, uma J_M negativa no sentido ao interior do axônio. A seguir, temos um fluxo de íons de K^+ , ou seja, uma J_M positiva no sentido ao fluido extracelular.

Para a *propagação do potencial de ação* é necessário que a concentração extracelular $C_{\text{Na}}(1)$ de íons de Na^+ seja grande, e para a *manutenção do potencial de repouso* V_{0M} , é necessário que a concentração intracelular $C_{\text{K}}(2)$ de íons de K^+ seja grande.

Os *principais íons* que atravessam uma membrana celular são K^+ , Na^+ e Cl^- , além de outros íons. Esses íons são os constituintes da corrente através da membrana, ou seja, $J_M = J_{\text{Na}} + J_{\text{K}} + J_{\text{Cl}} + J_O$; onde, J_O é a contribuição de outros íons que também podem atravessar a membrana. Durante um impulso nervoso, o número de íons que passam através da

membrana é *relativamente pequeno*, o que permite considerar que as concentrações iniciais $C_n(2)$ e $C_n(1)$ de cada tipo de íon praticamente não se alteram. Portanto, o número total de íons em cada lado da membrana pode ser considerado fixo. De acordo com a equação (7.14), temos $\frac{C_n(2)}{C_n(1)} = \exp\left(-\frac{q_n V_n^N}{kT}\right)$. Assim, quando V_M é o potencial instantâneo da membrana, a densidade de corrente será (desconsiderando o componente J_O)

$$J_M = \sum g_n(V_M - V_n^N) = g_K(V_M - V_K^N) + g_{Na}(V_M - V_{Na}^N) + g_{Cl}(V_M - V_{Cl}^N).$$

Como $V_M = V_{0M} + v$ e considerando $V_{0M} - V_{Cl}^N \approx 0$, a densidade de corrente será

$$\blacktriangleright J_M \approx g_K(v + \alpha) + g_{Na}(v - \beta) + g_{Cl}(v), \quad (8.10)$$

onde os potenciais α e β são, respectivamente, $\alpha = V_{0M} - V_K^N$ e $-\beta = V_{0M} - V_{Na}^N$. Logo, enquanto J_M muda durante a passagem do potencial de ação, as condutâncias dos diferentes íons também mudarão, e seus valores dependerão de V_M e da história passada da membrana.

Em geral, o potencial de ação v tem uma intensidade entre $10 \text{ mV} \leq v \leq 80 \text{ mV}$. Então, quando J_M é *negativo*, espera-se que a condutância g_{Na} incremente seu valor. Se J_M é *positivo*, as condutâncias g_K e g_{Cl} são importantes.

Experimentalmente observamos que, ao ser aplicado à membrana um potencial v , com a passagem do tempo, o valor de g_K *incrementa drasticamente*, assim como a dependência de g_{Na} e g_K do valor de v . Logo, por ser $V_M = V_{0M} + v$, então, g_K e g_{Na} dependerão de V_M . Na Figura 8.13 mostramos o comportamento de g_K e g_{Na} quando aplicamos à membrana durante alguns ms um potencial fixo v . A condutância, devido ao potássio, eleva-se até um valor fixo que se mantém enquanto v estiver sendo aplicado; e a condutância, devido ao sódio, eleva-se até um valor máximo e, a seguir, decai com o tempo. Para outros valores de v , as mudanças na condutância serão diferentes.

Na *ausência* de um potencial de ação ($v = 0$), teremos $V_M = V_{0M}$, e as condutâncias terão os valores $g_K = g_{0K}$ e $g_{Na} = g_{0Na}$. Como em situações normais os valores dos potenciais β e α (equação (8.10)) satisfazem a relação $\beta \gg \alpha$, então $g_{0K} \gg g_{0Na}$.

Se o potencial V_M é *fixo*, após alguns milissegundos, g_K e g_{Na} tomarão os valores $g_{\infty K}$ e $g_{\infty Na}$, que dependerão de V_M . Esses valores da condutância correspondem a um *estado estacionário*. Quando V_M muda devido ao potencial de ação v , as condutâncias g_K e g_{Na} experimentarão *efeitos transitórios* até alcançar seus valores estáveis $g_{\infty K}$ e $g_{\infty Na}$.

Quando o potencial da membrana V_M é um *pulso* da forma $V(t) = V_M(z_0 - \theta t)$, sendo z_0 o ponto sobre o axônio onde se aplica o estímulo, então $\partial V_M / \partial z = 0$. Logo, da equação (8.9), achamos a seguinte relação para a corrente através da membrana (desconsiderando-se o componente J_{Cl} pela mesma justificativa dada na equação (8.6))

$$\blacktriangleright C_M \frac{\partial V}{\partial t} = -J_M = -g_{Na}(V - V_{Na}^N) - g_K(V - V_K^N). \quad (8.11)$$

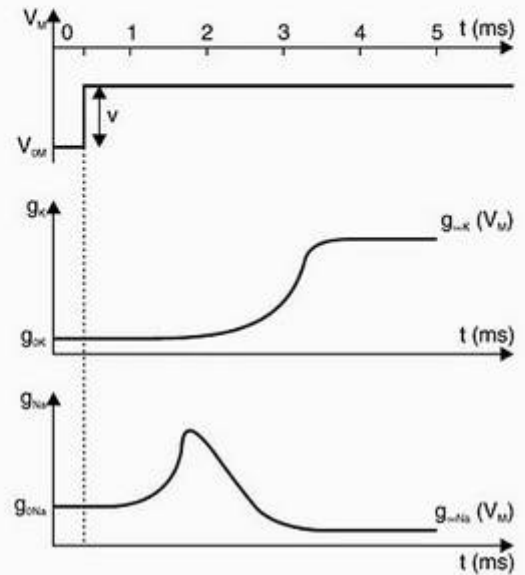


Figura 8.13 Comportamento de g_K e g_{Na} com o tempo, quando aplicamos um potencial v durante alguns ms.

Se $V = V_{OM}$, teremos $J_M = 0$; assim, o pulso não mudaria. Enquanto o pulso $V(t)$ está atuando no ponto z_0 do axônio, como mostra a Figura 8.14a, a densidade de carga na membrana muda (veja a Figura 8.14b) e, portanto, g_K e g_{Na} terão variações transitórias do tipo mostrado na Figura 8.14c.

As Figuras 8.14a e 8.14d mostram que a densidade de corrente $J_M \propto \partial V / \partial t$. A variação da condutância g_{Na} , enquanto dura o pulso de uma *curva suave*, tem o valor máximo da ordem de $10^3 g_{0Na}$ a $10^4 g_{0Na}$, enquanto o componente $J_{Na} = g_{Na}(V - V_{Na}^N)$ tem uma *variação ondulatória* no instante em que o pulso passa por seu valor máximo. Isto se deve à rápida mudança do potencial V . Já a variação da condutância g_K é relativamente *mais lenta* que g_{Na} , e seu valor máximo é da ordem de $20g_{0K}$ a $40g_{0K}$. O componente $J_K = g_K(V - V_K^N)$ aparece um pouco mais tarde do que J_{Na} devido ao potencial não ser constante. As densidades de correntes J_{Na} e J_K são, aproximadamente, muito balanceadas enquanto dura o pulso.

Se elevarmos a temperatura da célula, o pulso terá uma duração mais curta; porém, as variações de g_K e g_{Na} terão a forma mostrada na Figura 8.14c, assim como as densidades de corrente J_K e J_{Na} . A densidade de corrente total $J_M = J_K + J_{Na}$ terá os valores positivos maiores com relação às de temperaturas mais baixas, e seu máximo valor negativo será menor do que o correspondente a uma temperatura mais baixa.

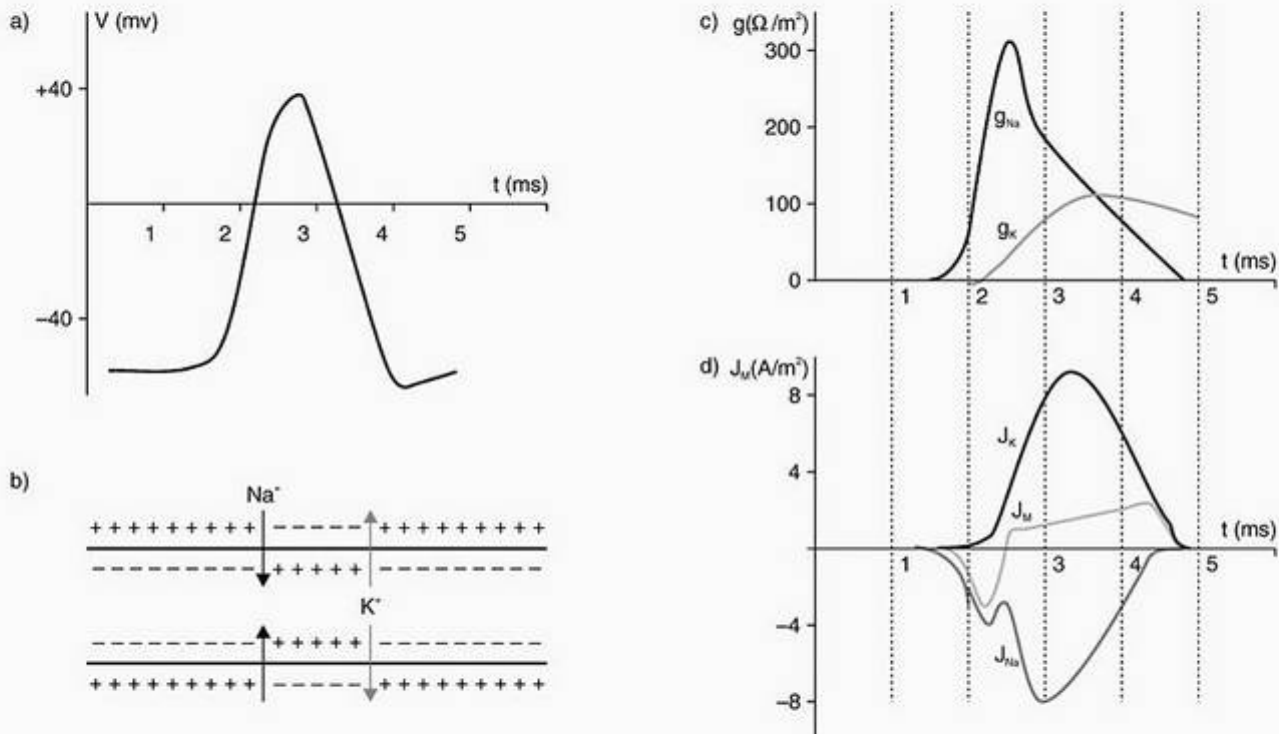


Figura 8.14 a) Pulso que estimula o axônio de aproximadamente 2 ms de duração.

b) Variação da polarização da membrana.

c) Variação das condutâncias do Na e K devido ao pulso.

d) Densidade de corrente devido aos íons de Na e K e densidade de corrente total através da membrana.

Exemplo: Um axônio em repouso tem as seguintes concentrações iônicas em mM por litro: $C_K(1) = 2,5$; $C_{Cl}(1) = 134$; $C_K(2) = 140$; $C_{Cl}(2) = 2,4$. O potencial de repouso da membrana é $V_{0M} = -105\text{mV}$. A concentração extracelular do Cl é instantaneamente mudada para $C_{Cl}(1) = 35$ devido à aplicação de um potencial $v = +25\text{mV}$. Determine a relação entre as condutâncias do K e Cl.

Resolução: Se a temperatura da célula for 310 K, então, o coeficiente $kT/e = (1,38 \times 10^{-23} \times 310)/1,602 \times 10^{-19} = 26,7 \text{ mV}$. Antes de aplicarmos o potencial v , o potencial Nernst do potássio é $V_K^N = -26,7 \ln(140/2,5) = -107,48 \text{ mV}$ e do cloro é $V_{Cl}^N = -26,7 \ln(2,4/134) = -107,4 \text{ mV}$.

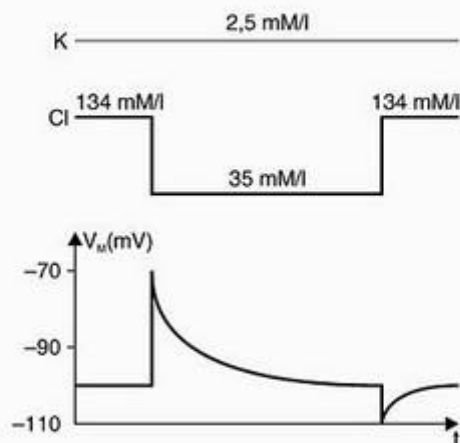
Ao aplicarmos o potencial v , o potencial Nernst do cloro muda para $V_{Cl}^N = -26,7 \ln(2,4/35) = -71,55 \text{ mV}$.

Sendo o potencial da membrana $V_M = -105 \text{ mV} + 35 \text{ mV} = -80 \text{ mV}$, teremos que

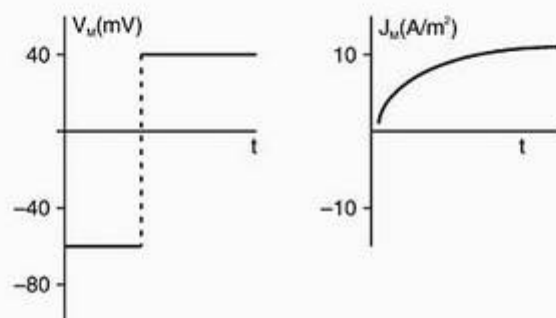
$$\Delta V_K = V_M - V_K^N = -80 \text{ mV} + 107,48 \text{ mV} = 27,5 \text{ mV}$$

$$\Delta V_{Cl} = V_M - V_{Cl}^N = -80 \text{ mV} + 71,55 \text{ mV} = -8,5 \text{ mV}.$$

Logo, da condição $g_K \Delta V_K + g_{Cl} \Delta V_{Cl} = 0$, achamos a seguinte relação entre as condutâncias do cloro e do potássio $\frac{g_K}{g_{Cl}} = -\frac{\Delta V_{Cl}}{\Delta V_K} = 0,31$.



Exemplo: O potencial de membrana é alterado do valor inicial $V_{0M} = -60 \text{ mV}$ para o valor $V_M = 40 \text{ mV}$, como mostra a figura ao lado. Também podemos ver a variação da densidade de corrente J_M através da membrana do axônio. O potencial Nernst para o sódio é 40 mV . O que você pode concluir sobre o transporte de íons através da membrana?



Resolução: Se a densidade de corrente através da membrana se deve ao fluxo passivo de íons de Na^+ , K^+ e Cl^- , então

$$J_M = g_{Na}(V_M - V_{Na}^N) + g_K(V_M - V_K^N) + g_{Cl}(V_M - V_{Cl}^N).$$

Para a situação mostrada na figura acima, temos

$$J_M = g_K(V_M - V_K^N) + g_{Cl}(V_M - V_{Cl}^N), \text{ por ser } (V_M - V_{Na}^N) = 0.$$

As diferenças de potencial $(V_M - V_K^N)$ e $(V_M - V_{Cl}^N)$ são positivas, logo o fluxo neto passivo dos íons K^+ será no sentido do interior para o exterior da célula, e o fluxo dos íons de Cl^- será no sentido do exterior para o interior da célula por eles serem de carga negativa.

8.4 POTENCIAL DE AÇÃO NAS FIBRAS CARDÍACAS⁽²⁾

Toda vez que uma *célula muscular se contrai*, um pulso de despolarização elétrica move-se ao longo da célula, o que produz uma diferença de potencial na célula. O músculo do coração (*miocárdio*) tem essa característica. Para entender tal característica, inicialmente descreveremos algumas propriedades elétricas das *células miocárdiais* e a forma como o coração é despolarizado durante um ciclo cardíaco.

As células miocárdiais e nervosas são bastante *similares* com relação às fontes (íons) que dão origem à polarização de suas membranas. Uma diferença importante entre elas é que, entre as células miocárdiais, há regiões de contato, através das quais os sinais elétricos podem ser transmitidos de uma célula a outra. No estado de repouso, o potencial do citoplasma das *células auriculares* é aproximadamente -70 mV e o das *células ventriculares* gira em torno de -90 mV.

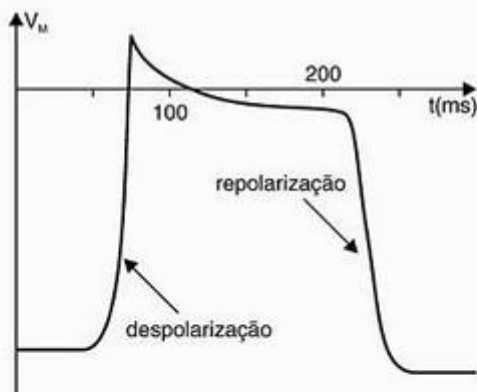


Figura 8.15 Potencial de membrana de uma célula miocárdial. As fases de despolarização e repolarização também estão mostradas.

Como consequência da *despolarização* da célula, o potencial de ação gerado tem uma duração de 200 ms a 300 ms. Os íons Na^+ e K^+ são os causadores da variação do potencial da membrana. A forma do pulso de potencial é mostrada na Figura 8.15; há distinções nessa forma em diferentes partes do coração. Temos evidências de que a condução dos íons de Na^+ são os mais envolvidos para que V_m alcance valores positivos e de que, durante a queda do potencial até valores um pouco abaixo de zero, a *condutância da membrana é baixa* para o Na^+ e K^+ . O fluxo de íons de K^+ do citoplasma para a região extracelular é a causa da *forte queda do potencial* até valores próximos aos de repouso.

A onda inicia-se por *despolarização espontânea*, em uma fibra muscular denominada *nó AS (sinoartrial)*, que está localizada na aurícula direita (veja a Figura 8.16). Uma vez que o nó AS é excitado, a despolarização se propaga através da aurícula. Os músculos da aurícula estão separados dos do ventrículo por fibras de tecidos conectivos que não transmitem o impulso. A única conexão entre a aurícula e o ventrículo é um tecido nervoso denominado *nó AV (atrioventricular)*. A seguir, a despolarização se propaga pelos ventrículos através de um conjunto de células musculares especializadas, localizadas em sua parede interior. O *nó AV* despolariza a uma razão de 50 batidas por minuto.

A contração rítmica dos músculos das paredes do coração deve-se à *propagação de potenciais de ação através das fibras cardíacas*. Muitas dessas fibras têm uma capacidade de auto-excitação, resultando, assim, em uma ação automática do coração.

Há muitas evidências de que os espaços intracelulares cardíacos estão eletricamente interligados. Logo após termos uma excitação em um ponto do tecido, este continuará ao longo de

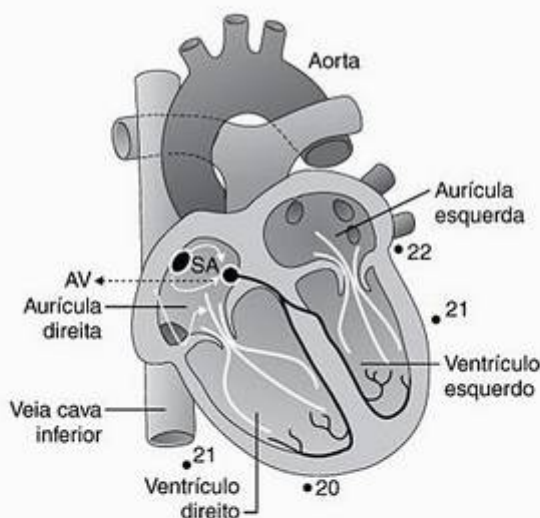


Figura 8.16 O potencial de ação inicia sua propagação a outras partes do coração no nó SA (sinoartrial). AV é o nó atrioventricular. Os números representam o tempo (s) necessário para a propagação do potencial de ação.

todos os tecidos vizinhos. Dessa maneira, o *cálculo do potencial em um ponto externo* a esse conjunto de células é bastante trabalhoso, justamente por tratar-se de um condutor de resistência variável.

O cálculo do potencial elétrico, devido a uma célula, é feito considerando-se sua membrana como duas pequenas folhas separadas a uma distância d , formando uma superfície fechada e uniformemente carregada com densidade superficial de carga $\pm\sigma$. Nessa situação, o *potencial exterior à célula é zero*; enquanto o *potencial em seu interior é $\sigma d/\epsilon_0$* . Esse resultado é o mesmo que o encontrado ao considerarmos a célula como dois planos infinitos com uma dupla capa de cargas. No *estado imóvel*, podemos considerar a célula muscular como um cilindro cumprido de dupla capa de cargas; como σ é o mesmo em ambas as superfícies da membrana, o *potencial exterior à célula* será aproximadamente zero.

Quando uma despolarização se propaga ao longo das células, cargas positivas se movimentam para o interior da célula, que cancela as cargas negativas sobre o interior da membrana. Dessa forma, quando a célula está parcialmente despolarizada, podemos mostrar que o potencial em um ponto exterior à célula é o *potencial devido a um dipolo* que está orientado ao longo da célula e se movimenta junto com a onda de despolarização.

Em geral, tendo-se em conta que no coração o tecido está constituído por fibras múltiplas, o *potencial em um ponto externo* ao tecido é dado por

$$\Phi_P = (-\delta/4\pi\zeta) \int d\Omega = (-\delta/4\pi\zeta) \Omega_0, \quad (8.12)$$

δ é o momento dipolo por unidade de área; ζ é a condutividade do fluido intracelular; e Ω_0 é o ângulo sólido subtendido no ponto P pela superfície do tecido.

Efeitos da corrente elétrica no corpo humano

Todas as funções normais do corpo humano envolvem *correntes elétricas*. Estas são essenciais para o correto funcionamento do organismo. Já as correntes provenientes de *fontes externas*, quando fluem através dos diversos órgãos vitais do corpo humano, podem causar *danos biológicos ou, ainda, a morte*.

Quando uma voltagem externa é aplicada ao corpo pela lei de Ohm, podemos estimar a corrente através desse corpo. Para isso, é necessário conhecermos sua resistência elétrica. O valor dessa resistência depende

- ♦ entre que partes do corpo ela é medida;
- ♦ se a pele está seca (alta resistência) ou molhada (baixa resistência).

Logo, a corrente que flui dentro de um corpo terá uma dependência crítica com a condição da pele nos pontos de contato com a fonte externa. Por exemplo, se a *pele estiver seca*, a resistência elétrica entre o pé e uma mão ou entre as mãos será da ordem de $10^5 \Omega$; porém, se a *pele estiver úmida* (os íons da umidade facilitam a passagem da corrente ao interior do corpo), o valor da resistência poderá chegar até 1% do valor correspondente à pele seca. A resistência total do corpo em situação normal, ou seja, levemente transpirando, é da ordem de $1\,500 \Omega$. Nessas condições, se as mãos ficarem em contato com uma fonte externa de 120 V AC, a corrente que

fluirá pelo interior do corpo será $I_0 = 120 \text{ V} / 1500 \Omega = 80 \text{ mA}$. Se a pele estivesse totalmente seca, o valor da corrente seria $I_0 = 120 \text{ V} / 10^5 \Omega = 1,2 \text{ mA}$.

Correntes da ordem de 1mA, fluindo pelo interior do corpo, não são facilmente percebidas, porém de 80 mA usualmente são fatais.

As partes do corpo humano cujo funcionamento são mais sensíveis às *correntes elétricas externas* são: o cérebro, os músculos do tórax, os centros nervosos que controlam a respiração e os músculos do coração.

Os efeitos biológicos no corpo humano dependem da intensidade da corrente externa I_0 (60 Hz, 1s) aplicada. Para correntes

- ♦ até 0,5 mA: nenhum efeito importante;
- ♦ de 0,5 mA a 2 mA: limiar de sensibilidade;
- ♦ de 2 mA a 10 mA: dor, contrações musculares;
- ♦ de 10 mA a 20 mA: aumento dos efeitos musculares, alguns danos em volta dos 16 mA; acima desse valor, não podem ser aplicados eletrodos;
- ♦ de 20 mA a 100 mA: parada respiratória;
- ♦ de 100 mA a 3 A: fibrilação ventricular que pode ser fatal, a menos que a ressuscitação aconteça imediatamente;
- ♦ acima de 3 A: parada cardíaca, o coração pode voltar a funcionar se o choque elétrico for muito breve; queimaduras muito sérias.



8.5 PEIXES-ELÉTRICOS: OS ELETORRECEPTORES

Nos peixes-elétricos, os *órgãos elétricos* são derivados de tecidos musculares especializados em produzir *descargas elétricas* de diversas maneiras. Nos peixes com eletricidade grande, essa adaptação serve para deter predadores e paralisar presas. Correntes elétricas são geradas por órgãos que têm estrutura similar aos tecidos muscular ou nervoso⁽³⁾. Os mais comuns são órgãos elétricos derivados de tecidos musculares. As *células musculares* multinucleares que carecem de elemento contrátil, utilizado para produzir um potencial de ação, são placas curtas e lisas denominadas *eletroplacas*⁽⁴⁾.

Essas placas são numerosas (centenas ou milhares) e estão arranjadas em grandes colunas de maneira compacta, como mostra a Figura 8.17. Os potenciais são gerados de acordo com o mesmo princípio de geração nas células nervosas. Um estímulo nervoso origina em uma célula um potencial de ação da ordem dos milivolts, que se propagará através do bloco de células, o que produzirá pulsos de potência transitórios de alguns ou muitos volts.

Os órgãos elétricos dos peixes estão localizados em regiões diferentes de seu corpo⁽⁵⁾. Os sinais elétricos produzidos são utilizados de acordo com a sua intensidade. Se esses sinais elétricos forem

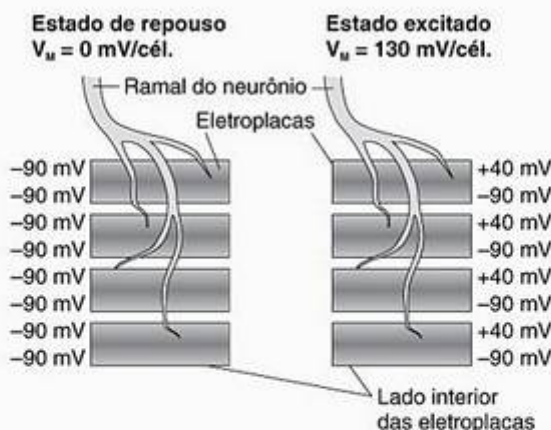


Figura 8.17 Células eletroplacas em seus estados de repouso e excitado.

♦ *fracos*, eles serão utilizados para identificação, orientação, comunicação, dispersão etc.;

♦ *fortes*, eles serão utilizados para captura de presas; intimidação de inimigos e comunicação.

Dois grupos de espécies de peixes têm um desenvolvido sistema de comunicação usando sinais elétricos: os peixes *gymnotid*, da América do Sul⁽⁶⁾, e os *mormyrid*, da África⁽⁷⁾. Outros peixes, como a arraia (*torpedinidae*)⁽⁸⁾, o peixe-gato (*malapturidae*) etc., também podem usar estímulos elétricos para comunicação. A enguia-elétrica possui dois órgãos fortes e um fraco; esses peixes produzem potenciais instantâneos da ordem de 300 volts.

A configuração exata das *linhas do campo elétrico* produzido por um peixe-elétrico depende da localização dos órgãos elétricos, da condutividade da água e das distorções introduzidas no campo por objetos com condutividade elétrica diferente da condutividade da água. Em primeira aproximação, podemos assumir que as linhas do campo elétrico em torno de um peixe são muito semelhantes às linhas do campo elétrico correspondente a um *dipolo elétrico*, o que mostra a Figura 8.18a.

Muitos peixes produzem potenciais elétricos fracos (ordem dos milivolts) por causa da diferença de potencial entre sua cabeça e o rabo ser muito pequena. *Essa diferença de potencial é gerada em forma de pulsos.*

Quando objetos estão presentes na região do campo elétrico, as *linhas de corrente convergem* sobre os corpos condutores com resistência elétrica maior do que a da água (água salgada tem uma resistividade da ordem de $10^2 \Omega \cdot m$ a $10^3 \Omega \cdot m$), e elas *divergem* dos objetos dielétricos (veja essa situação simulada na Figura 8.18b). A corrente elétrica nesses pontos serão, respectivamente, maior ou menor do que o normal.

As linhas equipotenciais e as de corrente, devido ao campo elétrico gerado pelo peixe *eigenmannia virescens*⁽⁹⁾, são mostradas na Figura 8.19. Notamos que o campo

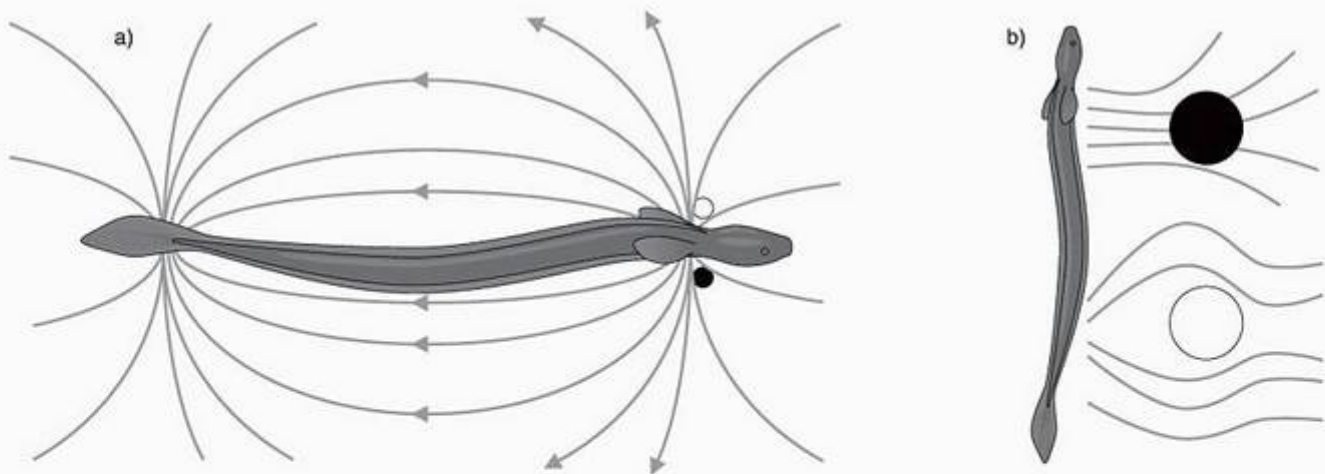


Figura 8.18 a) Forma aproximada das linhas de campo elétrico de um peixe-elétrico (espécie *gymnarchus*).
b) Distorção das linhas de corrente devido a um objeto condutor (●) e a um pobre condutor (○).

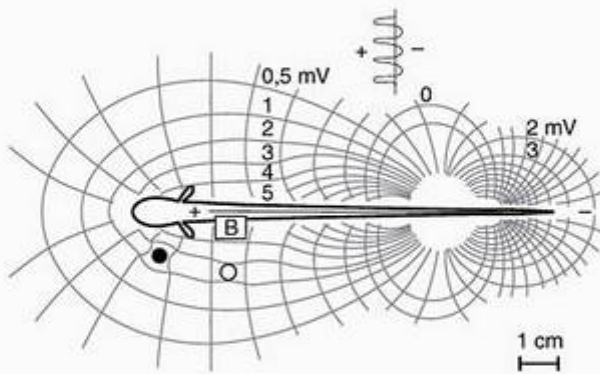
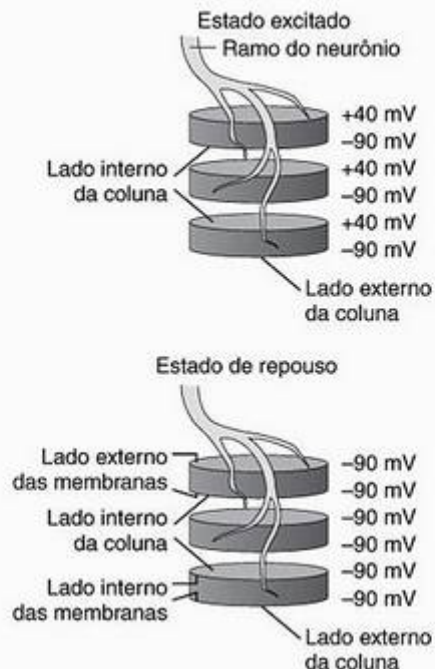


Figura 8.19 Linhas equipotenciais e de corrente do peixe *Eigenmannia virescens*⁽¹⁰⁾.

elétrico nas proximidades da pele está muito *distorcido* em torno do extremo posterior do peixe. Essa distorção se deve à posição dos órgãos elétricos no pequeno volume do rabo; os órgãos estão ligados em série com o interior do peixe. Esse volume interior é grande e tem *baixa resistividade*, da ordem de $0,5 \Omega \cdot m$ a $2,0 \Omega \cdot m$.



Exemplo: A figura ao lado mostra as eletroplacas de um peixe-elétrico quando elas se encontram em um *estado excitado*. A diferença de potencial nessas eletroplacas, ao se propagar um potencial de ação, é 130 mV. Determine a diferença de potencial quando essas células se encontram em estado de repouso. Explique sua resposta e faça um esquema das eletroplacas nesse novo estado das células.

Resolução: No *estado excitado*, a membrana do *lado interno* da eletroplaca dá uma diferença de potencial de +40 mV, entre os lados interno e externo dessa membrana. Essa diferença de potencial é -90 mV na membrana do *lado externo* da eletroplaca. No *estado de repouso*, a membrana do *lado interno* da eletroplaca dá uma diferença de potencial de -90 mV entre os lados interno e externo dessa membrana. Essa diferença de potencial é a mesma que a da membrana do *lado externo* da eletroplaca. Logo, as eletroplacas no estado de repouso terão os potenciais mostrados na figura acima, de tal maneira que a diferença de potencial entre os lados interno e externo da eletroplaca é

$$-90 \text{ mV} - (-90 \text{ mV}) = 0 \text{ mV}.$$

Os sinais elétricos gerados por um peixe são *conduzidos rapidamente* pela água. A rapidez da condução dependerá da condutividade elétrica do meio e da frequência do sinal. Esses sinais são diversos e podem ser classificados de acordo com vários parâmetros. O parâmetro mais importante é a *forma do campo elétrico*. Outros são: a forma de onda da descarga elétrica, a frequência de descarga, tempo entre os sinais remetente e recebido, frequência de modulação e interrupção da descarga.

A *característica temporal* da descarga elétrica entre as espécies de peixes-elétricos é bastante diversa^(11,12). Em geral, nas *ondas de descarga*, cada impulso tem uma *longa duração* comparado ao intervalo entre impulsos. Nos *pulsos de descarga*, o impulso é *breve* comparado ao intervalo entre impulsos. Na Figura 8.20, mostramos



Figura 8.20 A forma de onda das descargas elétricas é diversa e de duração diferente⁽¹³⁾. As descargas em forma de onda das espécies a) *eigenmannia virescens* e b) *sternarchorhamphus macrostomus* têm uma duração aproximada de 22 ms e 17 ms, respectivamente. As descargas em forma de pulso das espécies c) *rhamphichthys rostratus*, d) *hypopygus lepturus* e e) *hypopomus brevirostris* são da ordem de 1,5 ms, 1,2 ms e 1 ms, respectivamente.

algumas formas de ondas e pulsos de descarga de diversas espécies de peixes-elétricos. Na Figura 8.21, temos algumas espécies de peixes e suas respectivas ondas ou pulsos de descarga⁽¹⁴⁾.

Todas as espécies conhecidas de peixes-elétricos são capazes de modular a frequência de sua descarga elétrica. Essa modulação é o resultado da despolarização das abundantes células eletricamente acopladas no núcleo criador/moderador da medula do peixe⁽¹⁵⁾.

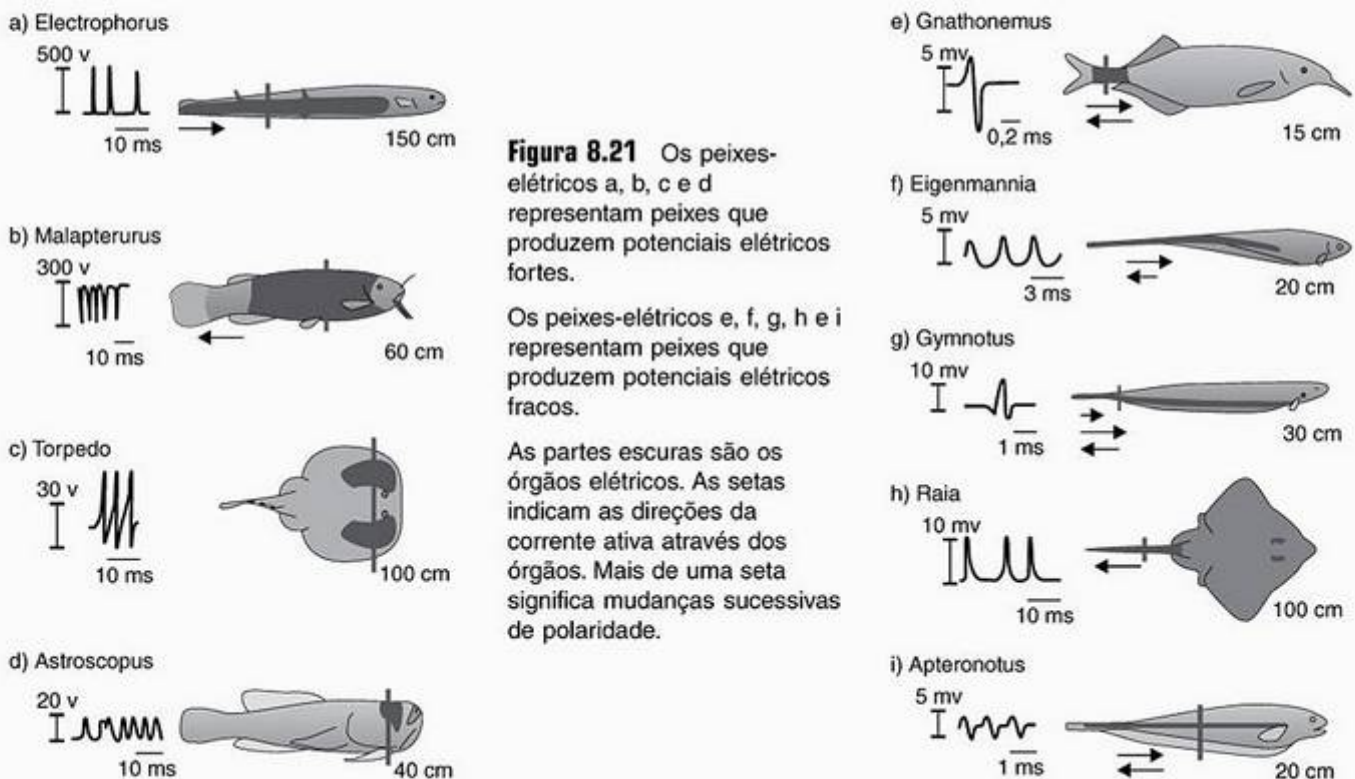


Figura 8.21 Os peixes-elétricos a, b, c e d representam peixes que produzem potenciais elétricos fortes.

Os peixes-elétricos e, f, g, h e i representam peixes que produzem potenciais elétricos fracos.

As partes escuras são os órgãos elétricos. As setas indicam as direções da corrente ativa através dos órgãos. Mais de uma seta significa mudanças sucessivas de polaridade.

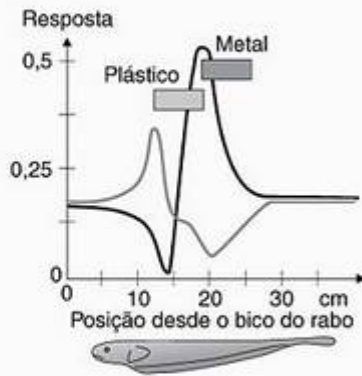


Figura 8.22 Réplica do perfil da resposta dos eletorreceptores a objetos em movimento.

Os sinais elétricos captados pelos peixes-elétricos são percorridos como fluxo de corrente através de células especializadas denominadas *eletorreceptores*. Essas células sensoriais encontram-se encaixadas na pele do peixe (a pele é um isolante com impedância de $0,1 \, \Omega \cdot \text{m}^2$ a $0,4 \, \Omega \cdot \text{m}^2$). A Figura 8.22 mostra a medida dos perfis espaciais da resposta dos eletorreceptores do peixe *eigenmannia virescens* a objetos em movimento⁽¹⁶⁾. Os eletorreceptores servem para detectar correntes elétricas e são encontrados em espécies com órgãos elétricos⁽¹⁷⁾, em peixes não-elétricos, mas muito velhos, como tubarão, raia, esturção, lampreia etc., e também em alguns anfíbios aquáticos.

Os eletorreceptores medem gradientes de potencial que, através da impedância de suas membranas, levam a uma mudança gradativa de sua polarização. Esses órgãos receptores na pele do peixe podem apresentar-se como protuberâncias em forma de verrugas (“tuberos”) ou como uma dilatação de certos dutos ou canais (“ampullary”). Os primeiros respondem melhor a estímulos de alta frequência ($\gg 50 \, \text{Hz}$) e se adaptam rapidamente a correntes elétricas mantidas através do receptor. Os segundos respondem a estímulos elétricos de baixa frequência ($< 50 \, \text{Hz}$) com modulações na frequência de descarga.

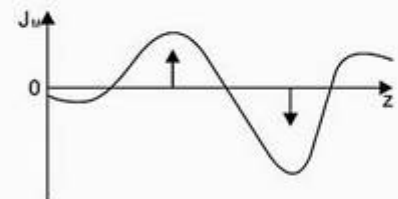


PROBLEMAS

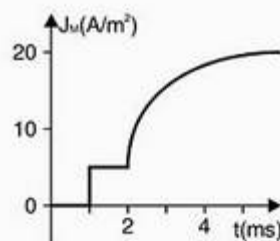
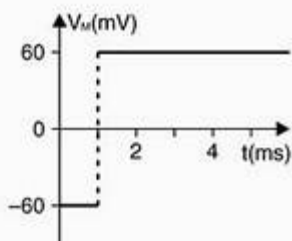
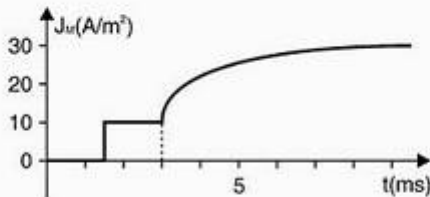
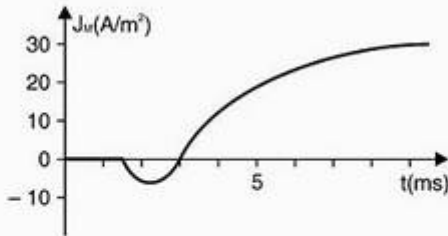
- O potencial de ação de uma célula nervosa é provocado pela movimentação passiva ou ativa de íons?
 - Quais são os principais íons que participam desse fenômeno?
- Indique, segundo a convenção adotada no texto, os sinais das densidades de corrente elétrica J_M correspondentes a:
 - cátions saindo da célula;
 - cátions entrando na célula;
 - ânions saindo da célula;
 - ânions entrando na célula.
- Em uma dada célula foram calculados, a partir das concentrações iônicas, os potenciais de Nernst $V_{\text{Na}}^N = 65 \, \text{mV}$ e $V_K^N = -90 \, \text{mV}$. Para a membrana dessa célula $g_K/g_{\text{Na}} = 20$.
 - Calcule o potencial de repouso dessa célula. Considere desprezível a densidade de corrente devida aos íons Cl^- e a soma das densidades de corrente elétrica passiva.
 - Faça um esquema indicando as densidades de corrente (ativa e passiva) associadas aos fluxos de Na^+ e K^+ através da membrana dessa célula.
 - Indique quais densidades são positivas e negativas.
- Qual é o valor máximo que o potencial da membrana V_M pode atingir durante o potencial de ação? E o valor mínimo?

5. Os potenciais de Nernst de uma célula para os íons Na^+ e K^+ são, respectivamente, 65 mV e -90 mV. O potencial de repouso dessa célula é -80 mV. Considerando desprezíveis a densidade de corrente elétrica devido aos íons de Cl^- e a soma das densidades de corrente elétrica passiva devido a esses três tipos de íons, calcule a razão entre as condutâncias da membrana para os íons K^+ e Na^+ .
6. Uma célula esférica encontra-se em um meio extracelular uniforme e muito grande. As regiões intracelular e extracelular contêm moléculas de KCl, NaCl e possivelmente NaX e KX. A membrana é permeável aos íons Na^+ , K^+ e Cl^- , porém não a X^- . O sistema está em um equilíbrio de Donnan.
 - a) O que representa X^- e qual é a razão de sua impermeabilidade?
 - b) Qual é a condição básica e a relação satisfeita pelas concentrações iônicas que surgem no equilíbrio de Donnan?
 - c) Dadas as concentrações iônicas em mM/litro: $C_{\text{K}}(1) = 50$, $C_{\text{Cl}}(1) = 0,85$, $C_{\text{K}}(2) = 5$ e $C_{\text{Na}}(1) = 35$, determine as concentrações dos constituintes iônicos remanescentes.
 - d) Determine o potencial da membrana.
7. Um axônio de lula em repouso tem um potencial de membrana $V_m = -156$ mV e as seguintes concentrações iônicas em mM/litro: $C_{\text{K}}(1) = 0$, $C_{\text{K}}(2) = 400$, $C_{\text{Na}}(1) = 100$ e $C_{\text{Na}}(2) = 4$. Utilizando aproximações plausíveis, se necessário, determine a razão $g_{\text{Na}} : g_{\text{K}}$.
8. Em um sistema de dois compartimentos, o compartimento 1 está separado do 2 por uma membrana. Cada compartimento contém NaCl, KCl e KX. A membrana é permeável a íons de Na, K e Cl, mas não a X^- . Nenhum fluxo de íons atravessando a membrana é observado. Queremos determinar as concentrações dos constituintes remanescentes. Se as seguintes concentrações iônicas em mM/litro são dadas: $C_{\text{K}}(1) = 10$, $C_{\text{Na}}(1) = 4,5$, $C_{\text{K}}(2) = 50$ e $C_{\text{Cl}}(2) = 2,9$, qual é a relação básica existente entre os componentes iônicos?
9. Os glóbulos vermelhos são somente permeáveis a ânions, desde que o fluxo passivo de cátions seja balanceado pelo transporte ativo. Os maiores ânions são Cl^- e HCO_3^- e estes alcançam o equilíbrio Donnan. Assumindo que

$$\frac{C_{\text{Cl}}(\text{célula})}{C_{\text{Cl}}(\text{plasma})} = 0,63,$$
 - a) qual é a distribuição dos íons de bicarbonato?
 - b) qual é o potencial da membrana? Descrever sua polaridade.
10. O potencial de repouso de uma membrana excitável depende de dois fatores. Um está relacionado à propriedade da membrana e o outro, à propriedade do meio. Descreva brevemente esses dois fatores.
11. A forma instantânea do potencial de membrana $V_M(z,t)$, quando se propaga no sentido $+z$, é mostrada na Figura 8.11a. Explique como as fases $\uparrow$ e $\downarrow$ da densidade de corrente J_M através da membrana podem ser associadas ao fluxo dos íons K^+ e Na^+ .



12. Ao medirmos o potencial de membrana V_M no ponto $z = 0$ de um axônio, observamos que, durante o 1º ms, V_M tinha um valor constante de -60 mV; no 2º ms, V_M alcançou o valor máximo de $+30$ mV; no 3º ms, V_M alcançou o valor mínimo de -70 mV; e do 4º ms ao 5º ms, V_M voltou ao seu valor constante -60 mV. Faça os gráficos que mostram as variações com o tempo das densidades superficiais de carga elétrica nas superfícies interna e externa da membrana desse axônio. Considere a capacidade elétrica por unidade de área da membrana como sendo $0,02$ F/m².
13. A passagem de um potencial de ação V_M pelo ponto $z = 0$ de um axônio é a mesma que a do Exercício 12. A velocidade de propagação desse potencial é 20 m/s no sentido $+z$.
- a) Faça os gráficos de V_M em função de z nos instantes $t = 0$ e $t = 1$ ms, assinando os valores de z correspondentes a $V_M = -70$ mV, -60 mV e $+30$ mV.
- b) Repetir o exercício considerando a propagação do potencial de ação no sentido $-z$.



14. Um axônio é colocado em um recipiente com água salgada. Inicialmente, o potencial de membrana V_M do axônio é -50 mV; após 2 ms, ele é alterado para o valor fixo $+20$ mV. A variação com o tempo da densidade de corrente J_M através da membrana celular está mostrada ao lado. Explique a influência da água salgada como fluido extracelular dessa célula nervosa.

15. As medidas de J_M , quando o axônio é colocado em uma solução sem sódio (o potencial de membrana é alterado de forma igual ao do Exercício 14), estão mostradas no gráfico ao lado. Explicar a diferença com relação ao gráfico do Exercício 14.

16. O potencial de membrana de um axônio é alterado do valor inicial $V_{0M} = -60$ mV para o valor $V_M = +60$ mV, como mostra o gráfico ao lado. Também é mostrada a variação da densidade de corrente J_M através da membrana. O potencial de Nernst para o Na^+ é $+40$ mV. O que você pode concluir sobre o transporte de íons através da membrana?

17. De acordo com a equação das *condutâncias paralelas*, dê expressões para I_{Cl} , I_K e I_{Na} . No pico do potencial de ação, que considerações devem ser levadas em conta?
18. As concentrações em mM/litro dos íons K^+ e Na^+ de uma célula são $C_K(1) = 10$, $C_{Na}(1) = 500$, $C_K(2) = 300$ e $C_{Na}(2) = 50$.
- a) Escreva a equação de Nernst para essa célula.
- b) Se a membrana somente é permeável a íons de K, qual será o potencial da membrana em equilíbrio?

- c) Se a membrana somente é permeável a íons de Na, qual será o potencial da membrana em equilíbrio?
- d) Se a membrana é permeável a íons de K^+ e Na^+ , que informação proporciona a equação de Nernst acerca do fluxo de corrente da região intracelular à extracelular?

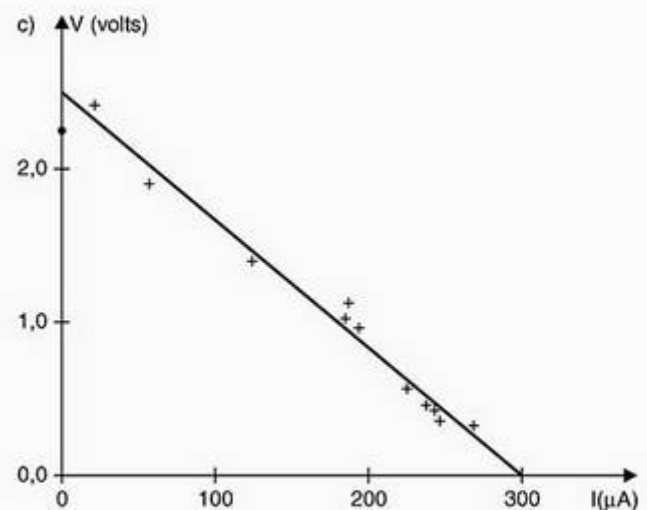
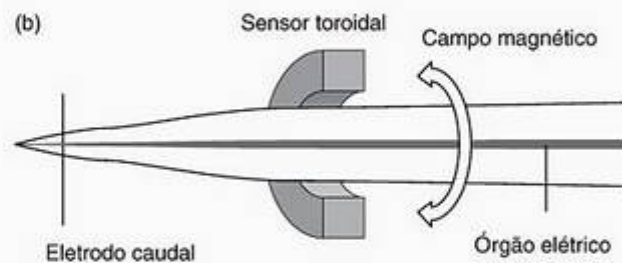
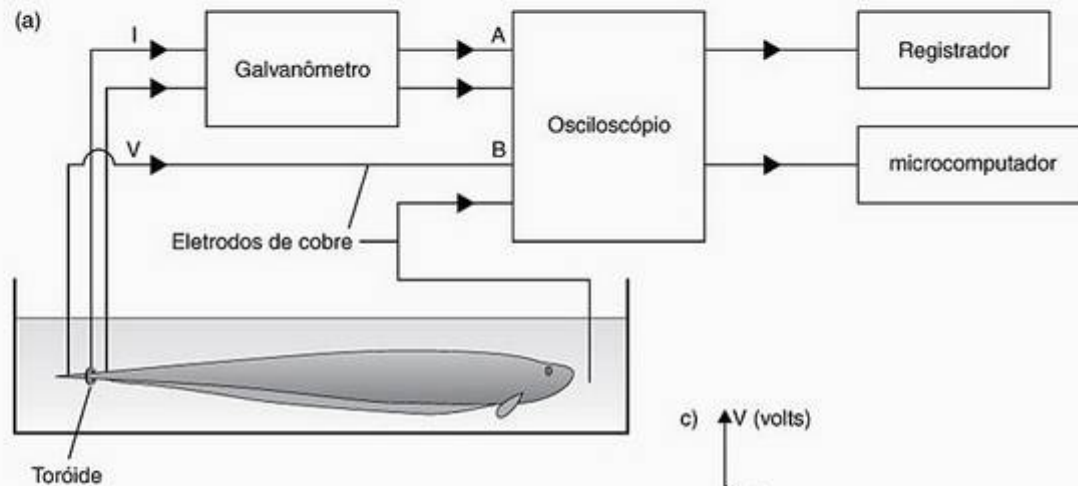
19. Um peixe-elétrico produz uma linha de corrente de 6 mA. Outros dois peixes de resistividades elétricas $r_1 = 500 \Omega \cdot m$ e $r_2 = 50 \Omega \cdot m$ encontram-se ao longo dessa linha de corrente. Se a resistividade elétrica da água é $r_0 = 100 \Omega \cdot m$,

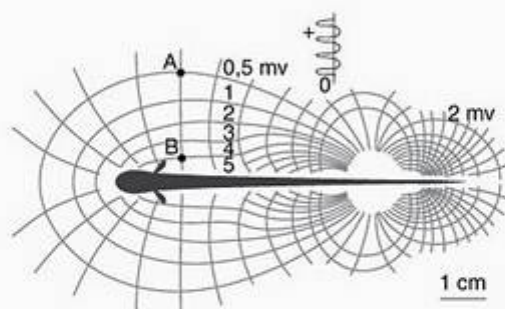
- a) calcule e explique, com um desenho, a corrente experimentada pelos peixes.
- b) como serão as linhas de corrente do peixe-elétrico em torno de cada um desses peixes?



20. Na experiência de caracterização elétrica do peixe *gymnotus carapo* feito por Baffa⁽¹⁸⁾, foram medidas a corrente e a diferença de potencial mudando-se a resistência elétrica da água. Em (a) e (b) são mostrados detalhes da montagem experimental utilizada e em (c) é apresentado o gráfico da corrente em função da diferença de potencial. Com esses dados:

- a) faça o circuito equivalente dessa experiência;
- b) calcule a resistência interna do peixe.





21. A figura ao lado mostra as linhas equipotenciais do peixe *eigenmannia virescens*. A resistividade elétrica da água do mar é $1\,000\ \Omega \cdot \text{m}$. Se um corpo de carga elétrica $7 \times 10^{-6}\ \text{C}$ desloca-se de $A \rightarrow B$ e $AB = 3\ \text{cm}$, determine a:

- energia potencial devido a esse deslocamento;
- intensidade do campo elétrico entre A e B;
- força experimentada pelo corpo;
- densidade de corrente elétrica entre os pontos A e B.

Referências Bibliográficas

- HOPPE, W.; LOHMANN, W.; MARK, H.; ZIEGLER, H. (Eds). *Biophysics*. New York, Tokyo, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983.
- PLONSEY, R.; BARR, R.C. *Bioelectricity. A quantitative approach*. New York and London, Plenum Press, 1990.
- LISSMANN, H.W. Electric location by fishes. *Scientific American*. v. 208, n. 3, p. 50-59, 1963.
- MATSUBARA, J.A. Neural correlates of a non-jammable electro location system. *Science*. v. 211, n. 4483, p. 722-725, 1981.
- KALMIJN, A.J. Electric sense of sharks and rays. *J. Exp. Biol.* v. 55, n. 2, p. 371-374, 1971.
- LISSMANN, H.W.; MULLINGE, A.M. Organization of ampullary electric receptors in gymnotidae (pisces). *Proc. Roy. Soc. Lond. B Bio.* v. 169, n. 1017, p. 345-&, 1968.
- SULLIVAN, J.P.; LAVOUE, S; HOPKINS, C.D. Molecular systematic of the African electric fishes (*Mormyroidea: Teleostei*) and a model for the evolution of their electric organs. *J. Exp. Biol.* v. 203, n. 4, p. 665-683, Feb, 2000.
- KALMIJN, A.J. Electro-perception in sharks and rays. *Nature*. v. 212, n. 5067, p. 1232-&, 1966.
- SCHEICH, H; BULLOCK, T.H; FESSARD, A. (Ed). *The detection of electric fields from electric organs. In: Handbook of sensory physiology*. Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1974. v. III/3, p. 13-58.
- Idem, ibidem.
- HOPKINS, C.D. Electric communication in fish. *American Scientist*. v. 62, n. 4, p. 426-437, 1974.
- KALMIJN, A.J. Electric and magnetic field detection in elasmobranchs fishes. *Science*. v. 218, n. 4575, p. 916-918, 1982.
- HOPKINS, Op. Cit.
- BENNETT, M.V.L; HOAR, W.S (Ed); RANDALL, D.J (Ed). *Electric organs. In: Fish physiology*. London-New York, Academic Press, 1971. v. V, p. 347-491.
- KALMIJN, A.J. Detection and processing of electromagnetic and near-field acoustic signals in elasmobranchs fishes. *Philos. T. Roy. Soc.*, v. B355, n. 1401, p. 1135-1141, Sep, 2000.
- SCHEICH, Op. Cit.
- LOSSIER, B.J.; MATSUBARA, J.A. Light and electron-microscopic studies on the spherical neurons in the electro sensory lateral line lobe of the gymnotiform fish, *sternopygus*. *J. Comp. Neurol.* v. 298, n. 2, p. 237-249, Aug, 1990.
- BAFFA, O.; CÔRREA, S.L. Magnetic and electric characteristics of the electric fish *Gymnnotus carapó*. *Biophys. J.* v. 63, p. 591-593, Aug, 1992.

Capítulo 9

Geomagnetismo, Biomagnetismo e Radiação Eletromagnética



9.1 INTRODUÇÃO

Muitos dos *efeitos físicos-biológicos* nos organismos vivos que experimentam a ação das *diversas forças* têm sua origem nas características físicas naturais de nosso planeta. As *fontes* mais importantes dessas *forças geofísicas* são:

- ♦ a radiação eletromagnética natural, cuja principal fonte é o Sol;
- ♦ o campo magnético da Terra;
- ♦ o campo gravitacional da Terra, combinado aos campos gravitacionais do Sol e da Lua;
- ♦ os campos elétricos na atmosfera;
- ♦ a pressão exercida pelo ar e/ou água de nosso planeta.

As principais questões que surgem imediatamente são: Quais os *efeitos sobre os organismos vivos* dessas forças geofísicas? Como um organismo se adapta à ação dessas forças? Quais dessas forças podem ser detectadas pelo sistema nervoso central do organismo?

Podemos adiantar algumas respostas fundamentadas em algumas situações experimentadas por nós mesmos. No entanto, faltam ainda provas científicas concretas para explicar muitos efeitos dessas forças geofísicas.

Por exemplo, *temos evidências* de que a orientação das aves migratórias é influenciada pelos campos eletromagnéticos alternados, fracos ou de baixa frequência; também *existem evidências* de que os campos elétricos da atmosfera (da ordem dos 100 V/m nas proximidades da superfície da Terra) podem influenciar o comportamento dos animais. Enfim, podemos dizer que o estudo dos *efeitos das forças geofísicas* sob sistemas vivos é uma área que oferece uma série de questões que estão à espera de uma análise científica mais sistemática.

A *força magnética*, devido à radiação eletromagnética ou a um *campo magnético*, é uma manifestação das forças elétricas quando as cargas elétricas têm um movimento relativo. Dessa maneira, os efeitos elétricos e magnéticos estão intimamente relacionados; devemos usar o termo eletromagnético para descrever, por completo, um efeito devido a essas forças.

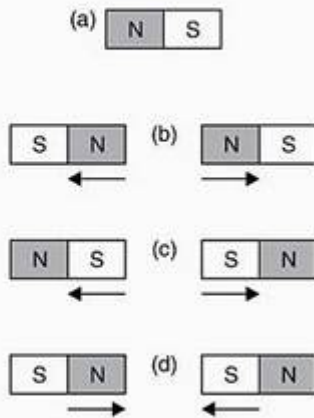


Figura 9.1 a) Pólos de um ímã; b) e c) forças de repulsão; d) forças de atração.

Muitos corpos na natureza têm um *magnetismo permanente*, que não pode ser retirado da mesma maneira que retiramos cargas elétricas de objetos. Esses corpos, quando estão suspensos no ar ou flutuando na água, têm uma direção definida com relação à Terra. Assim, nesses corpos, podemos definir os *pólos magnéticos*.

Esses pólos são o *norte* (N) e o *sul* (S) e estão localizados em extremos opostos do corpo magnético, ou simplesmente *magneto*, como mostra a Figura 9.1a. Quando dois ímãs estão próximos, se os *pólos iguais* estão frente a frente (N-N ou S-S), os ímãs se *repelem* (veja as Figuras 9.1b e 9.1c); se os pólos diferentes (N-S ou S-N) estão frente a frente, os ímãs se *atraem* (veja a Figura 9.1d). Os pólos N e S de um ímã não existem independente um do outro. Esses efeitos de repulsão ou atração entre ímãs podem ser descritos associando-se um *pólo magnético* (ou *carga magnética*) de intensidade q^* a uma das extremidades, e $-q^*$ à outra. Apesar de a carga magnética realmente não existir, é comum utilizar esse conceito por ele ser um modo matematicamente conveniente de descrever os ímãs. Existe uma concordância para explicar as propriedades físicas de um ímã, que seria através das denominadas *correntes de Ampère*.



9.2 CAMPO MAGNÉTICO E FORÇA MAGNÉTICA

O *campo magnético* $\mathbf{B}$ caracteriza o espaço em torno de um corpo magnetizado ou de um ímã permanente. Ele se manifesta como uma *força magnética* sobre corpos colocados em sua vizinhança. Esse campo é uma *quantidade vetorial* com intensidade e direção variáveis. A direção do campo normalmente é determinada com compassos magnéticos. Na Figura 9.2, mostramos as linhas de campo magnético de um ímã ou barra magnetizada. Note que a distribuição das linhas do campo é semelhante às linhas do campo elétrico de um dipolo elétrico. Essas linhas se *dirigem* do pólo norte ao pólo sul da barra magnetizada; elas são mais densas perto do corpo magnético e mais dispersas conforme nos afastamos do corpo.

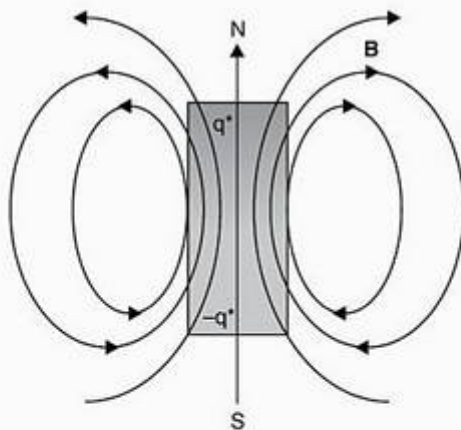


Figura 9.2 Linhas de campo magnético de uma barra magnética. Essas linhas são fechadas.

A unidade do campo magnético $\mathbf{B}$ no SI é o *Tesla* (T). Outra unidade muito utilizada para medirmos campos magnéticos é o *gauss* (G). Sua equivalência com o tesla é $1\text{T} = 10^4\text{G}$.

Note que, na definição de $\mathbf{B}$, utilizamos como referência uma barra magnética; esse corpo era eletricamente neutro. Então surge a questão: qual é a relação entre a corrente elétrica e o campo magnético? A primeira observação experimental de que, quando se tem uma corrente elétrica, se produz um campo magnético, foi de *Oersted*. Medidas com um compasso magnético mostraram que as linhas de campo magnético nas vizinhanças de *um arame que conduz corrente* (veja a Figura 9.3a) são círculos concêntricos e perpendiculares ao arame. Quando se trata de um *laço de corrente* ou arame em forma

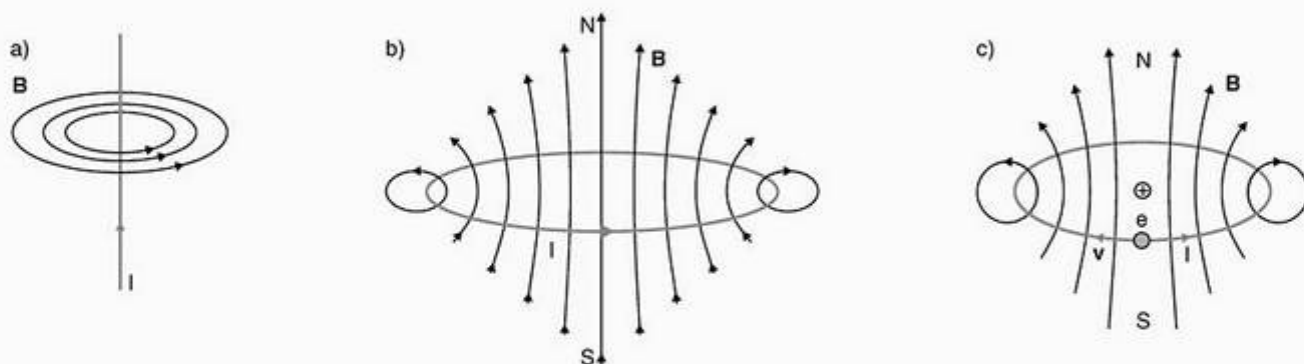


Figura 9.3 Linhas de campo magnético devido: a) a uma corrente I fluindo por um arame; b) ao arame circular transportando uma corrente I ; c) a um elétron que se move com velocidade v em torno de um núcleo estacionário, produzindo uma corrente I .

de espira, por onde flui uma corrente I (veja a Figura 9.3b), as linhas do campo magnético são similares às de um dipolo. Logo, podemos definir um pólo N e um pólo S para o campo desse laço de corrente ou espira ou simplesmente *dipolo magnético*. Em *nível atômico*, para determinarmos o campo magnético, podemos utilizar o modelo simplificado da estrutura de um átomo, isto é, consideramos que os elétrons se movem ao redor do núcleo atômico em órbitas definidas. Dessa forma, um único elétron que execute uma órbita circular ao redor de um núcleo carregado positivamente é equivalente a uma espira de corrente (veja a Figura 9.3c), dando, assim, uma configuração de linhas semelhante à configuração de um dipolo magnético ou de uma barra magnetizada.

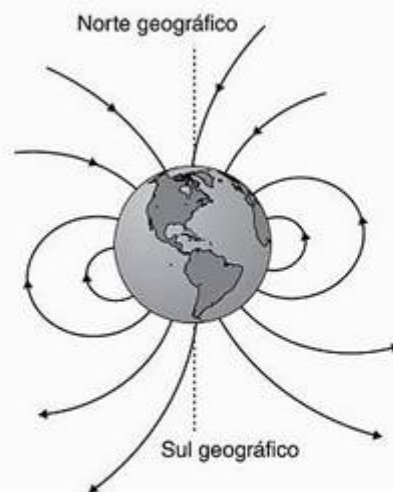
A *diferença* entre as linhas de um campo elétrico e as de um campo magnético é que essas últimas são *linhas fechadas*, ou seja, elas não têm nem início nem fim. Isto significa que pólos magnéticos isolados ou *monopólos não existem*. Matematicamente teremos que $\text{div}\mathbf{B} = 0$.

Exemplo: Considere a Terra como um grande magneto.

- Esquematize as linhas do campo magnético da Terra fora de sua superfície.
- Explique como você determinaria as direções dessas linhas na superfície da Terra.

Resolução:

- Considere que o magneto que se encontra no interior da Terra tem seu eixo de simetria ao longo de um eixo diametral da Terra e que a direção desse eixo não coincide com a do eixo geográfico da Terra. As formas das linhas em um plano que contém o eixo de rotação da Terra estão esquematizadas na figura ao lado. Embora algumas linhas estejam cortadas, cada linha partindo das vizinhanças do pólo sul do magneto encurva-se para interceptar a superfície próxima ao pólo norte.



- b) Note, na figura, que, em quase todos os pontos sobre a superfície da Terra, o campo tem um componente perpendicular à superfície. Utilizando-se uma bússola cujo plano esteja na horizontal, a direção da agulha corresponderá ao componente horizontal do campo. Fazendo-se girar o plano da bússola em torno dessa direção até que o plano fique vertical, então a agulha dará a direção de $\mathbf{B}$ àquele ponto.

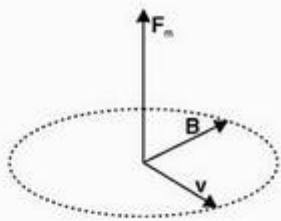


Figura 9.4 A força $\mathbf{F}_m$ é perpendicular ao plano definido por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$.

Efeitos do campo magnético sobre cargas em movimento

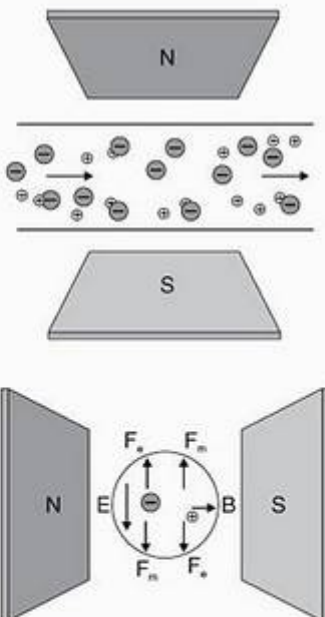
De forma similar ao caso de um campo elétrico, podemos definir a magnitude de $\mathbf{B}$ a partir da força exercida pelo campo sobre uma carga teste. Quando a carga está em *repouso*, ela não experimentará *nenhuma* força magnética $\mathbf{F}_m$. A força manifesta-se somente quando a carga teste está em *movimento*. Experimentalmente, verificamos que, para um dado campo magnético, a intensidade de $\mathbf{F}_m$ é proporcional à intensidade da carga e à sua velocidade, ou seja, $F_m \propto q$ e $F_m \propto v$, provando-se que

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (9.1)$$

Como mostra a Figura 9.4, $\mathbf{F}_m$ é *sempre perpendicular* ao plano definido por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$, enquanto a intensidade F_m depende do seno do ângulo entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$.

Exemplo: O plasma sanguíneo é um típico fluido extracelular que contém íons de Na^+ e Cl^- nas concentrações $C_{\text{Na}}(1) = 145 \text{ mM/l}$ e $C_{\text{Cl}}(1) = 125 \text{ mM/l}$. Outros íons também estão presentes, porém, em concentrações desprezíveis. Considere que uma artéria de *diâmetro* d experimenta um campo magnético $\mathbf{B}$. Qual será a velocidade média desses íons?

Resolução: Como os íons do plasma estão se movimentando no interior da artéria com uma velocidade $\mathbf{v}$, esses experimentarão uma força magnética $\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. O efeito dessa força $\mathbf{F}_m$ é polarizar os íons, ou seja, dependendo do sinal dos íons, estes irão se arranjar em lados opostos na superfície interna da artéria. Essa polarização origina um campo elétrico $\mathbf{E}$ tal que a diferença de potencial através da artéria será $V = Ed$. O campo elétrico produzirá uma força elétrica $\mathbf{F}_e$ sobre os íons. No equilíbrio $\mathbf{F}_m = \mathbf{F}_e$, ou seja, $eE = evB = eV/d$, esta expressão permitirá calcular a velocidade v do fluido sanguíneo – evidentemente, esse valor será uma velocidade média dos íons na artéria.



Se tanto um campo elétrico quanto um magnético estiverem agindo sobre uma partícula carregada em movimento, esta experimentará uma força F_{em} que é a soma das forças devido a cada um desses campos, ou seja, $F_{em} = F_e + F_m = q(E + v \times B)$. Essa força é denominada *força de Lorentz*. É importante destacar que a força magnética não é uma força fundamental da natureza, no sentido das forças elétrica e gravitacional. A força magnética é uma manifestação da força elétrica.



9.3 GEOMAGNETISMO

O geomagnetismo estuda os efeitos que os organismos vivos experimentam devido à ação da *força geofísica cuja origem é o campo magnético da Terra*. As propriedades físicas desse *campo geomagnético* são determinadas a partir de sua semelhança com o campo produzido por um *dipolo magnético* ou por uma simples *barra magnética*.

As linhas de força desse campo têm a distribuição espacial mostrada na Figura 9.5. Como o campo magnético B é uma quantidade vetorial, é necessário que sua intensidade e sua direção sejam conhecidas, para que ele esteja totalmente especificado.

A posição dos pólos norte e sul do campo geomagnético é *oposta* à do pólo norte-sul geográfico. Na realidade, o magnetismo terrestre não é estático; ele muda muito lentamente com o tempo. Análises de amostras datadas arqueologicamente mostraram que a intensidade do campo magnético da Terra oscila entre valores máximos e mínimos em um intervalo de tempo de cinco mil anos. Concluiu-se, também, que a *polaridade do campo mudou* nos últimos dez a vinte milhões de anos, sendo que essa inversão acontece a cada trezentos mil anos, aproximadamente.

Como mostra a Figura 9.6, a atual direção do eixo do magneto não coincide com a direção do eixo de rotação da Terra. Esses eixos formam um ângulo de $11,4^\circ$; portanto, o componente horizontal do campo geomagnético de algum *ponto local* sobre a superfície da Terra terá uma declividade (ϕ) com relação à direção do norte-sul geográfico (NG-SG).

Sobre a superfície da Terra, definimos como *meridiano* toda linha que une o NG com o SG. Definindo, dessa maneira, um *meridiano inicial*, podemos determinar a posição de outro, dando o *ângulo diedro (longitude)* formado pelo plano do meridional buscado e o plano denominado inicial.

A *latitude* é utilizada para distinguir pontos diferentes sobre um mesmo meridiano. Define-se como o ângulo formado pela linha de um prumo traçado desde o ponto dado da superfície terrestre com respeito ao plano do equador. Tanto a determinação da *latitude* quanto o estabelecimento da *direção do meridiano* estão intimamente vinculados ao movimento das estrelas.

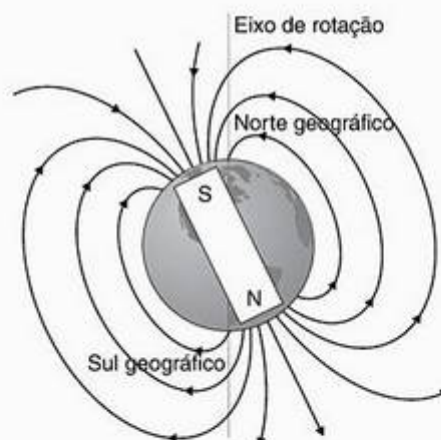


Figura 9.5 O campo magnético da Terra é semelhante ao de uma barra magnética com o pólo S perto do pólo norte geográfico.

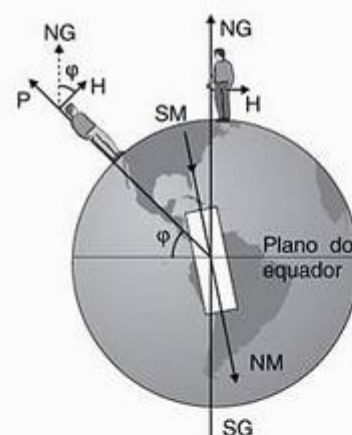


Figura 9.6 A direção do NG sobre o horizonte (H) é igual à latitude (ϕ) do lugar de observação. P: direção de prumo; NM: norte magnético; SM: sul magnético; e SG: sul geográfico.

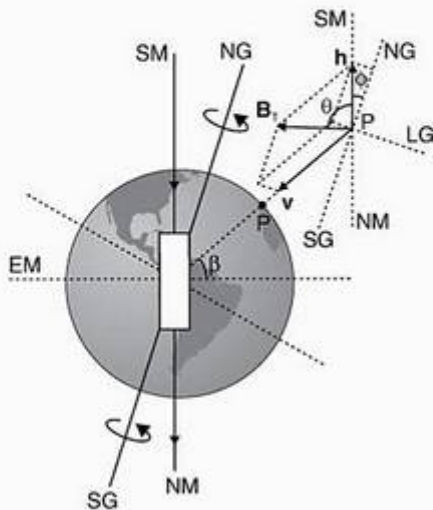


Figura 9.7 Componente horizontal (h) e vertical (v) do campo geomagnético B_T em um ponto P sob a superfície terrestre. No canto superior direito estão definidos a inclinação θ do campo e o seu declive ϕ . β é a direção de um prumo em P com o equador magnético (EM).

Na Figura 9.6, para uma pessoa no pólo norte (NG), a direção do prumo coincide com o eixo de rotação da Terra. A latitude do eixo da Terra será 90° . Outra pessoa, em outro ponto do mesmo meridiano, observará a mesma direção do eixo da Terra. Já a direção de um prumo *muda*; portanto, a direção do eixo da Terra sobre o horizonte muda para um valor menor do que 90° . Podemos observar que a direção do eixo da Terra sobre o horizonte (H) é igual à latitude (ϕ). A linha que une os pontos com igual latitude é denominada *paralelo*. Assim, meridianos e paralelos definem o sistema de *coordenadas geográficas*. Cada ponto sobre a superfície terrestre possui uma longitude e uma latitude bem determinadas.

Na Figura 9.7 mostramos a direção do campo geomagnético B_T em um ponto P sobre a superfície da Terra. O ângulo θ entre a direção de B_T e a horizontal (h) é denominado *inclinação*; e o ângulo ϕ entre o componente horizontal (h) de B_T e a direção NG-SG é denominado *declive*. Por exemplo, na cidade de Cambridge, nos EUA, a magnitude de B_T é aproximadamente 0,58 G, $\theta \cong 73^\circ$ e $\phi \cong 15^\circ$; logo, os componentes horizontal e vertical de B_T serão, respectivamente, $h = 0,58 \cos 73^\circ = 0,17$ G e $v = 0,58 \sin 73^\circ = 0,55$ G.

Exemplo: A magnitude do campo geomagnético no equador magnético é 0,3 G = 3×10^{-5} T e no pólo magnético é 0,7 G = 7×10^{-5} T. Determine os componentes horizontal e vertical desse campo no:

- equador magnético;
- pólo magnético.

Resolução:

- No equador magnético $\theta = 0^\circ$ ou 180° ; logo, $h = B_T \cos \theta = 0,3$ G e $v = B_T \sin \theta = 0$ G.
- No pólo magnético $\theta = 90^\circ$; logo, $h = B_T \cos \theta = 0$ G e $v = B_T \sin \theta = 0,7 \sin 90^\circ = 0,7$ G.

Na Europa Central, a magnitude de B_T fica em torno de 0,52 G, se $\beta = 50^\circ$ e $\theta = 67^\circ$; os componentes horizontal e vertical do campo geomagnético serão $h = 0,52 \cos 67^\circ = 0,2$ G e $v = 0,52 \sin 67^\circ = 0,48$ G. Devemos destacar que diversos fatores ambientais em uma determinada latitude produziram ocasionalmente variações bastante pequenas dos valores do campo.

Efeitos do campo geomagnético sobre organismos vivos têm sido anunciados com muita frequência, tanto em organismos simples quanto em complexos^(1,2,3,4): bac-

térias, algas unicelulares e multicelulares, protozoários, vermes, insetos, moluscos e vertebrados. *Sem embargo, os diversos trabalhos publicados em muitos casos não têm chegado a resultados conclusivos.*

O campo geomagnético tem uma grande influência sobre os peixes que estão em movimento. Como mostra a Figura 9.8, esse campo induz um gradiente de potencial elétrico que pode constituir a base física de uma bússola orientadora de seu movimento.

Os tubarões têm a capacidade de detectar a presença de pequenos peixes a distâncias de 5 cm a 10 cm pela recepção do potencial de ação dos músculos respiratórios desses peixes. Outros peixes podem detectar a presença de peixes em águas escuras e profundas⁽⁵⁾.

Com relação aos efeitos do campo geomagnético em outros seres vivos, *há indícios de respostas mais elaboradas.* O pombo, as abelhas e várias outras espécies animais apresentam uma sensibilidade muito grande à alteração da intensidade do campo, sendo afetados por alterações locais ou por tempestades magnéticas solares que produzem variações de alguns centésimos no valor do campo geomagnético^(6,7).

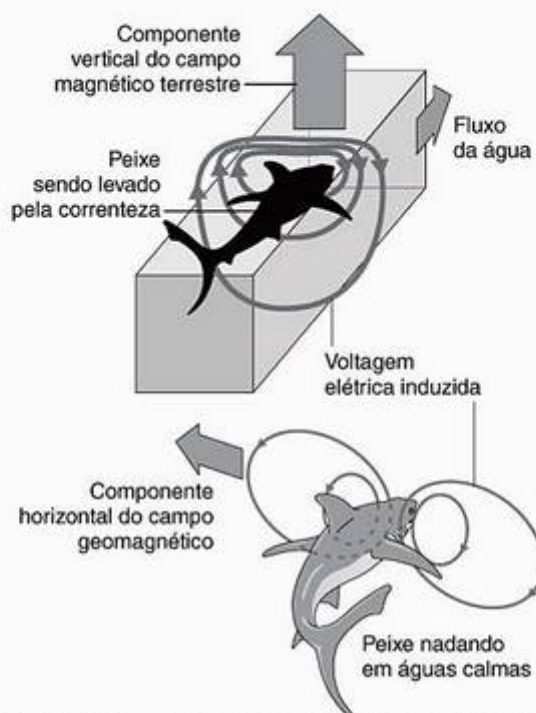


Figura 9.8 Efeito do campo geomagnético na orientação de um peixe (mais detalhes na nota nº 9 do Capítulo 8).

Barras magnetizadas em campos magnéticos

Quando uma *barra magnetizada* é colocada em um campo magnético uniforme **B**, ela tende a alinhar-se na direção do campo, como mostra a Figura 9.9. Esse efeito também acontece com limalha de ferro não-magnetizada, pois os fragmentos de ferro se magnetizam na presença de **B**. Uma bússola é uma pequena barra magnética que se alinha na direção do campo geomagnético. Esse efeito pode ser descrito, associando-se um *pólo magnético ou carga magnética* de intensidade q^* a uma das extremidades e $-q^*$ à outra. A grandeza do pólo q^* , se existir, é definida como a razão entre a força **F** atuante sobre ela e o campo **B**: $F = q^*B$.

Apesar de a carga magnética *na realidade não existir*, ela é bastante utilizada no tratamento matemático dos ímãs. Ao ser colocada uma barra magnetizada em um campo **B**, essa experimentará um torque τ igual a

$$\tau = l \times F = l \times q^*B = q^*l \times B, \quad (9.2)$$

l é o vetor na direção pólo sul – pólo norte. O termo q^*l é definido como o *momento magnético m* da barra; logo,

$$\tau = m \times B. \quad (9.3)$$

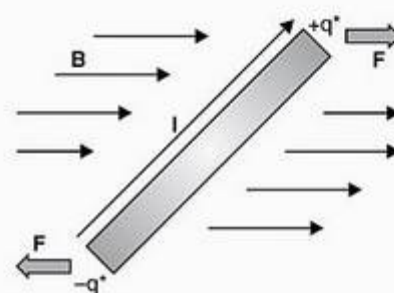


Figura 9.9 Barra magnetizada em um campo magnético **B**, sob a ação do torque do campo.

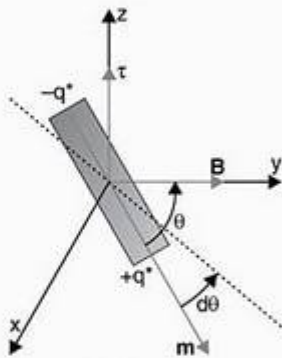


Figura 9.10 O trabalho, quando a barra magnetizada gira um ângulo $d\theta$, será $mB \sin\theta d\theta$. A energia potencial da barra é $U_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$.

Essa equação é análoga ao torque sobre um dipolo elétrico $\mathbf{p}$ em um campo elétrico $\mathbf{E}$. Uma *espira de corrente* (veja a Figura 9.3b, anteriormente) comporta-se da mesma maneira que uma barra magnetizada quando ela é colocada em um campo magnético $\mathbf{B}$. Podemos mostrar (veja o exemplo a seguir) que o torque experimental pela espira que conduz uma corrente I é $\tau = I\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, onde A é a área da espira. Logo, para o caso de uma espira de corrente,

$$\mathbf{m} = I\mathbf{A}. \quad (9.4)$$

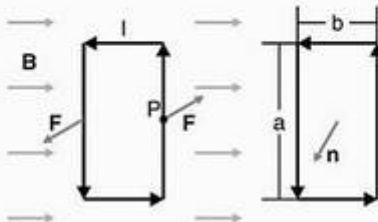
Se devido à ação do torque τ sobre uma barra de momento magnético $\mathbf{m}$ ela gira um ângulo $d\theta$, como mostra a Figura 9.10, será feito um *trabalho*:

$$dW = \tau \cdot d\theta = (\mathbf{m} \times \mathbf{B}) \cdot d\theta = [(m \sin\theta \mathbf{i} + m \cos\theta \mathbf{j}) \times (B \mathbf{j})] \cdot d\theta = mB \sin\theta d\theta.$$

Assim, o trabalho total, devido a τ quando a barra gira da posição θ_0 a θ , será $W = \int dW = -mB(\cos\theta - \cos\theta_0)$. Esse trabalho será igual à variação da energia potencial U_m da barra, ou seja, $W = \Delta U_m$. Dessa forma definimos a energia potencial de uma barra magnética de momento magnético $\mathbf{m}$ como

$$U_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}. \quad (9.5)$$

Exemplo: Uma espira retangular de lados a e b está em um campo magnético uniforme $\mathbf{B}$, como mostra a figura ao lado. A espira conduz uma corrente I . Qual é o torque sobre a espira?



Resolução: A normal $\mathbf{n}$ à espira faz um ângulo de 90° com a direção de $\mathbf{B}$.

As forças em cada segmento da espira se reduzem às duas forças mostradas na figura acima, visto que não há forças nos lados superior e inferior, pois, nesses segmentos, a corrente é antiparalela e paralela a $\mathbf{B}$. As forças nos outros dois lados são calculadas a partir de uma expressão equivalente à equação (9.1): $d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}$.

Como $d\mathbf{l}$ e $\mathbf{B}$ são perpendiculares, então $F = IabB$. Essas forças são iguais, mas opostas, e formam um par de torção. A força resultante é nula, e o torque em relação a qualquer ponto é independente da localização do ponto. Escolhendo o ponto P mostrado na figura acima, a intensidade desse torque será $\tau = Fb = IabB = IAB$, onde A é a área da espira. Podemos escrever esse torque da seguinte maneira: $\tau = I\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$, onde $\mathbf{m}$ é o momento magnético da espira de área A .



9.4 ORIENTAÇÃO MAGNÉTICA

Uma variedade de animais, quando estão em movimento, tem sua *orientação* de alguma forma afetada pelo campo geomagnético, sendo que, na maioria dos

casos, não é totalmente conhecido o mecanismo utilizado para detectar esse campo^(8,9,10). Diversas observações experimentais da influência do campo geomagnético, na orientação de espécies variadas, sugerem pelo menos *três mecanismos* para explicar o efeito desse campo:

- ♦ A detecção do campo está associada ao uso de *magnetos permanentes*, que, à semelhança de um compasso magnético, produzem um torque ao tentar o alinhamento do magneto com um campo magnético externo. Esse é o mecanismo utilizado pelas bactérias magnetotáticas. Na Figura 9.11, essa bactéria é mostrada.

- ♦ Em seu organismo, os animais devem ter *substâncias ou moléculas paramagnéticas*, tal que, na presença de um campo magnético externo, um alinhamento paralelo ao campo dessas moléculas se produz^(11,12).

- ♦ Os animais devem ter a capacidade de medir a separação da carga que é induzida quando eles se movimentam através do campo⁽¹³⁾. É provavelmente o caso do *peixe elasmobrânquio*, para o qual, em sua volta, a água salgada proporciona uma provável trajetória de retorno para o fluxo de corrente induzida.

A influência do campo geomagnético no *comportamento* de seres vivos foi observada em pombos e abelhas^(14,15). Ambos o utilizam como elemento de orientação de vôo. No caso das abelhas, o campo geomagnético também influencia a dança que elas realizam quando saem à procura do néctar. Porém, é apenas em alguns tipos de *algas verdes e bactérias* que o mecanismo de atuação do campo geomagnético parece estar estabelecido.

Bactérias magnéticas

As bactérias denominadas *bactérias magnéticas*⁽¹⁶⁾ apresentam um tipo de *tatismo* denominado *magnetotatismo ou magnetotaxia*. A magnetotaxia é um dos mecanismos de resposta de alguns seres vivos ao campo geomagnético. Essa resposta está associada à existência de *sensores magnéticos* nesses organismos vivos, ou seja, de *materiais magnéticos*. Esses sensores interagem com campos magnéticos de intensidade variável. O principal material magnético encontrado em seres vivos é a *magnetita* Fe_3O_4 , ou óxido magnético de ferro. Esse material é resultante da *biomineralização* de nutrientes nesses seres. A magnetita é extremamente densa e possui *magnetização permanente*, sendo já encontrada em tartarugas, pombos, morcegos, atuns, abelhas, bactérias, algas etc.^(17,18,19)

As bactérias e as algas magnetotáticas apresentam essa resposta passiva ao campo e não dependem de nenhuma função vital do organismo para isso. Podemos dizer que a descoberta do magnetotatismo em bactérias constitui um importante avanço no estudo do *biomagnetismo*. As bactérias magnetotáticas apresentam cadeias de 10 a 20 *cubos de magnetita pura*, cujas dimensões variam entre 400 Å a 1 000 Å. Essa cadeia situada no interior da bactéria (veja a Figura 9.11, anteriormente) funciona



Figura 9.11 Bactéria magnetotática: uma cadeia de partículas (magnetizadas) alinha-se quase paralela ao eixo da bactéria. A espécie aqui mostrada tem um flagelo em cada extremo.

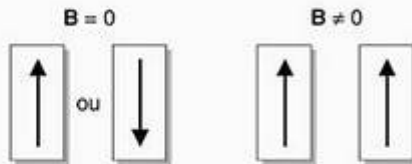


Figura 9.12 Monodomínio magnético: ele está sempre magnetizado.

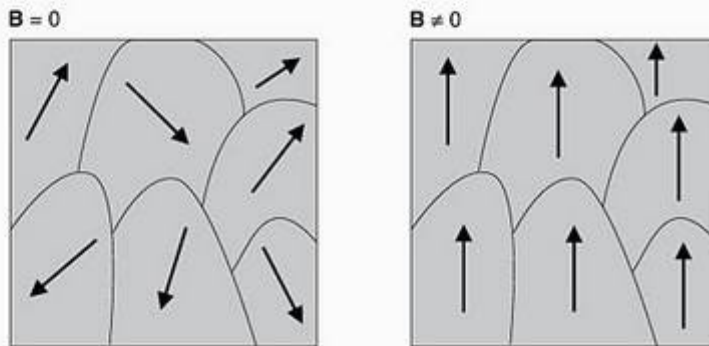


Figura 9.13 Multidomínios magnéticos: a estrutura cristalina é constituída por várias regiões denominadas *domínios magnéticos*.

como uma microscópica agulha magnetizada. Cada um desses cubos é um *único domínio ferromagnético ou monodomínio magnético* de momento dipolo: $m = 1,3 \times 10^{-15} \text{ A.m}^2$. Na Figura 9.12, mostramos o efeito de um campo sobre um monodomínio magnético.

Nos organismos com sensores magnéticos, encontramos esses domínios em forma de multidomínios magnéticos. Na Figura 9.13, mostramos o efeito de um campo magnético sobre os multidomínios magnéticos. Como o organismo está em suspensão na água, a cadeia funciona como se fosse uma bússola. *Tudo indica que a cadeia cristalina é paralela à direção do movimento dessas bactérias.*

Certas bactérias magnetotáticas nadam ao longo das linhas do campo geomagnético e são influenciadas por esse campo. A orientação dessas bactérias na água à temperatura ambiente é determinada pela *competição* entre o torque exercido pelo campo geomagnético sobre o momento dipolo da bactéria e as forças aleatórias resultantes do movimento térmico das moléculas da água.

Bactérias colecionadas de sedimentos no *hemisfério norte* nadam na direção norte (NG); atribuímos isso ao momento dipolo da bactéria que está orientado para frente do NG. Se o momento dipolo é invertido, ou seja, se o pólo sul do momento é orientado para frente, a bactéria nada na direção oposta. Assim, embora a cadeia cristalina alinhe-se com o campo magnético, seus flagelos (elemento relacionado com o movimento da bactéria) localizam-se em extremidades diferentes nos dois tipos de organismos. A Figura 9.14 mostra esse efeito para as bactérias que rumam para o norte (BRN) e para as que rumam para o sul (BRS).

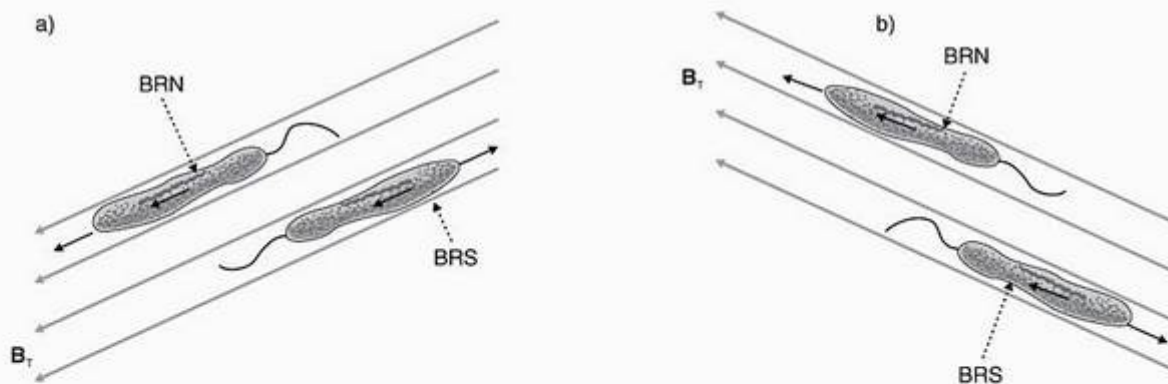


Figura 9.14 Bactérias magnetotáticas: sua magnetização é paralela ao campo geomagnético B_T .

- a) No hemisfério norte, as BRN dirigem-se para baixo rumo ao sedimento do oceano; enquanto as BRS dirigem-se para cima, rumo à parte do oceano com mais oxigênio.
- b) No hemisfério sul, as BRS dirigem-se para baixo, e as BRN dirigem-se para cima.

Devido à inclinação das linhas do campo geomagnético, as BRN no *hemisfério norte* migram para baixo, e as BRS migram para cima. No *hemisfério sul*, as BRS nadam para o fundo das águas e as BRN dirigem-se para cima. No *equador magnético*, onde o componente vertical do $\mathbf{B}_T$ é zero e as linhas do campo são horizontais, todas as bactérias magnetotáticas têm um movimento na direção horizontal, sendo que as BRN e BRS seguem sentidos opostos.

As águas do *hemisfério norte* apresentam um maior número de BRN. Esses microorganismos são até 50 mil vezes maiores do que uma molécula de água; logo, eles serão muito sensíveis a qualquer variação do meio em que se encontram. *Efeitos da temperatura* passam a ser importantes, pois são responsáveis pelo movimento desordenado ou movimento Browniano das partículas do meio. No caso de *organismos magnetotáticos*, sua energia devido à interação magnética $U_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ deverá ser maior do que a energia térmica $E_t = kT/2$ (k é constante de Boltzmann) para que haja uma orientação efetiva.

Exemplo: Uma bactéria magnética tem momento de dipolo magnético $1,3 \times 10^{-15} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ e aponta para o norte em um local onde o campo geomagnético também aponta para o norte, com magnitude $5 \times 10^{-5} \text{ T}$.

- Quanto trabalho deve ser realizado para mudar a orientação da bactéria do norte para o leste nesse campo?
- Qual é o torque magnético sobre a bactéria quando ela aponta para o leste?
- Quais serão o torque e a energia, quando a bactéria aponta para o sul?

Resolução:

- O trabalho para mudar a orientação da bactéria será igual à variação de sua energia potencial ou $W = \Delta U = -mB \cos 0^\circ + mB \cos 90^\circ = -1,3 \times 10^{-15} \times 5 \times 10^{-20} \text{ J} = -6,5 \times 10^{-20} \text{ J}$.
- O torque exercido pelo campo geomagnético sobre a bactéria, ao estar orientada ao leste, será $\tau = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = -mB \sin 90^\circ \mathbf{k} = -6,5 \times 10^{-20} \text{ N} \cdot \text{mk}$.
- Quando a bactéria está orientada para o sul, o torque será nulo. A energia potencial nessa orientação será $U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -mB \cos 180^\circ = 6,5 \times 10^{-20} \text{ J}$.

Orientação magnética de abelhas e pombos

Observações experimentais realizadas com abelhas durante suas saídas à procura de alimento mostraram que as posições relativas entre a *fonte de alimentação*, o *favo* e o *Sol* (veja a Figura 9.15) são os elementos utilizados pelas abelhas para elas se orientarem em suas sequenciais entradas e saídas do favo. Essas posições relativas mudam durante o dia (veja a Figura 9.16), enquanto o campo geomagnético é o mes-

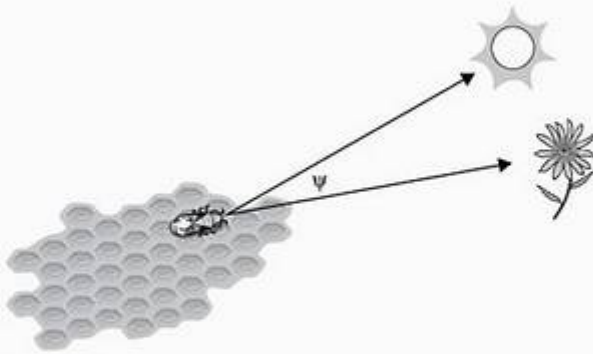


Figura 9.15 Abelha sobre um favo horizontal. A direção ψ é definida pela direção da fonte de alimento e pela posição azimutal do Sol.

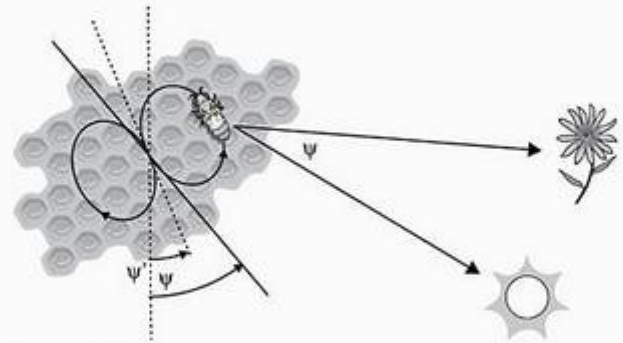


Figura 9.16 Afastamento sistemático entre a direção ψ' definida pela direção de dança de uma abelha relativo à direção vertical e à direção ψ .

mo na posição do favo. Experiências mostraram que o uso de campos magnéticos externos para anular os efeitos do campo geomagnético influencia a orientação das abelhas⁽²⁰⁾. Essas observações deram indícios de que as abelhas sentem a influência de um campo magnético, mas *não oferecem resposta* sobre o mecanismo utilizado para isso.

Observações, por radar, de pássaros em vôos migratórios durante a noite, estando o céu totalmente nublado, mostraram que eles podem viajar grandes distâncias em uma direção definida e sem *nenhum auxílio visual*⁽²¹⁾. Também foi observado que, se o céu não estiver nublado, eles podem navegar durante a noite utilizando as estrelas como guia^(22,23).

Nos experimentos de laboratório com pássaros que estavam prontos para iniciar seu vôo migratório, foram utilizados campos com *intensidade de 0,46 G*, ou seja, da ordem do campo geomagnético⁽²⁴⁾. Nos vários dias de observação, a intensidade do campo mudou para valores entre 0,14 G até 0,81 G. Essas observações têm mostrado que:

- ♦ em um espaço fechado, os pássaros orientam-se ao longo da direção apropriada para o início (queda ou salto para o sul ou norte) do vôo migratório em uma determinada estação, contanto que o campo magnético no recinto fechado corresponda ao campo geomagnético sem perturbação;
- ♦ se o campo geomagnético for substituído por um *campo artificial* de intensidade similar, porém com sua orientação mudada em 90°, os pássaros orientarão a si próprios em relação a essa nova direção do campo magnético e sempre de acordo com a estação;
- ♦ os pássaros somente orientam a si próprios em campos com intensidade total entre 0,3 G a 0,7 G.

Outros experimentos com pássaros em campos magnéticos artificiais, onde a polaridade de cada componente do campo foi medida e também em um campo horizontal com $\theta = 0^\circ$ e v (componente vertical) = 0, mostram que os vôos desses animais são influenciados pelo campo geomagnético. Resultados experimentais ao serem estudados tordos norte-americanos (*turdus migratorius*)⁽²⁵⁾ aparecem na Figura 9.17.

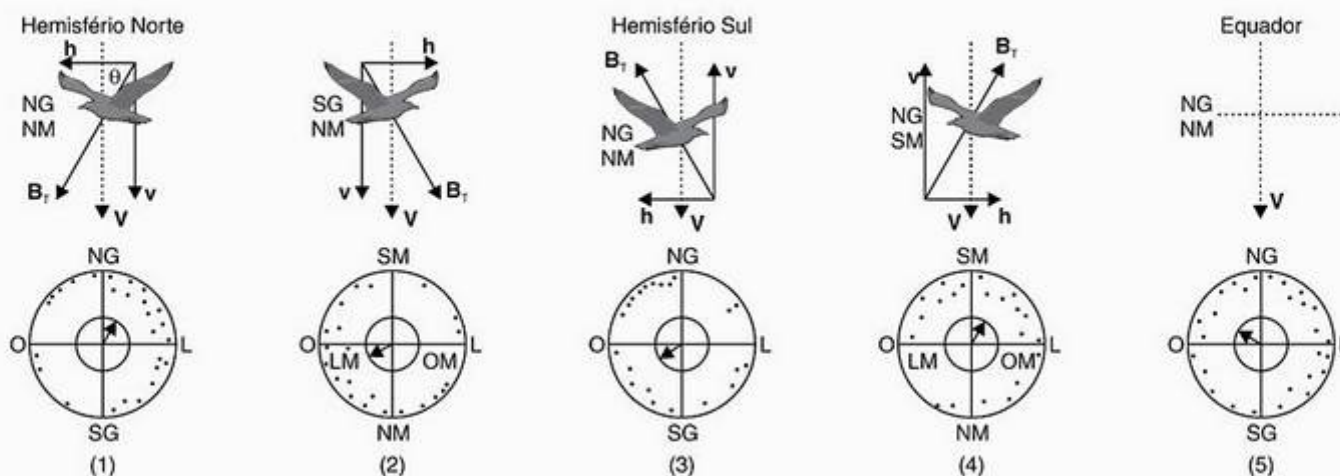


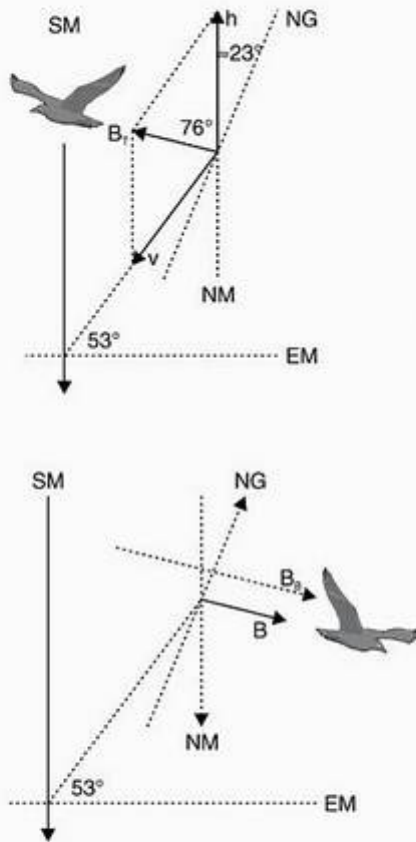
Figura 9.17 Medidas de laboratório da orientação migratória do tordo norte-americano na primavera para determinadas orientações dos componentes h e v do campo geomagnético B_T , relativo à direção V da gravidade. NG-SG e NM-SM representam os pólos norte e sul geográficos e magnéticos, respectivamente, e estão indicando as direções no lado esquerdo da parte superior de cada figura. As condições naturais estão representadas em (1) para o hemisfério norte; (3) para o hemisfério sul; e (5) no equador. As condições nos hemisférios norte e sul, quando a direção de h é invertida, são mostradas em (2) e (4), respectivamente. Os diagramas de distribuição circular mostram as medidas das orientações médias dos pássaros em uma noite. A soma de todas essas orientações é mostrada por um vetor resultante colocado no interior dos círculos.

Foi observado que o compasso magnético do *European Robins* não usa a polaridade do campo magnético para detectar a direção norte⁽²⁶⁾. Esses pássaros derivam pela direção norte interpretando a inclinação da direção axial das linhas do campo magnético no espaço. Há evidências de que a orientação dos pombos-correios é alterada mudando-se a polaridade do campo magnético aplicado. Essas observações induzem-nos a pensar que a orientação magnética desses animais é feita somente em termos da direção das linhas do campo magnético, e não em termos de sua polaridade. As investigações da capacidade de navegação dos pássaros mostraram que, além de sua forte sensibilidade ao campo magnético, eles também apresentam, em pequeno número, outras habilidades sensoriais.

Exemplo: O tordo norte-americano é uma espécie que utiliza a orientação do campo geomagnético como guia em sua viagem migratória.

Considere que o tordo tem uma pequena bobina alimentada por uma bateria solar presa a seu pescoço e que ele inicia sua viagem migratória de um local no hemisfério norte da Terra de latitude 70° ou $\beta = 53^\circ$, além de o campo geomagnético ter uma magnitude de $0,7 \text{ G}$ e inclinação de 76° , aproximadamente.

- Determine os valores dos componentes horizontal e vertical do campo.
- Mostre graficamente a direção e o sentido em que está viajando o tordo com relação à direção NG-SG.
- Quais devem ser a magnitude e a direção do campo magnético produzido pela pequena bobina, para que o tordo viaje em sentido contrário ao encontrado na resposta do item (b)?
- Faça um gráfico que mostre a direção e o sentido da viagem migratória correspondente a sua resposta em (c).

**Resolução:**

- a) No hemisfério norte, as linhas do campo geomagnético (veja a Figura 9.5, anteriormente) têm seu componente vertical dirigido para o interior da Terra. No local em que o tordo inicia sua viagem, teremos os componentes $v = B_T \sin 76^\circ = 0,68 \text{ G}$ e $h = B_T \cos 76^\circ = 0,17 \text{ G}$ do campo geomagnético.
- b) NG é o norte geográfico; φ é a latitude do local onde o tordo inicia sua viagem migratória; h é a direção do componente horizontal do campo B_T ; e o ponto O é o centro da Terra. Assim, o tordo viaja no sentido mostrado na figura com relação ao norte geográfico.
- c) A bobina deverá produzir um campo magnético B_B , cuja magnitude seja o dobro do campo B_T e em sentido oposto a B_T , ou $B_B = 0,34 \text{ G}$. A direção de B formará um ângulo de $180^\circ - 99^\circ = 81^\circ$ com a direção NG.
- d) O novo sentido em que viaja o tordo é mostrado na figura ao lado.

**9.5 CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS**

Os campos elétrico e magnético normalmente manifestam-se de maneira conjunta, mesmo quando a *fonte desses campos é desligada*. Se a fonte de carga ou corrente é *estacionária*, os campos também serão estacionários. Entretanto, se a *corrente é variável*, teremos um campo magnético variável, ou seja, $\partial B / \partial t \neq 0$, e um campo elétrico será produzido (Lei de Faraday) mesmo sem ter carga elétrica no espaço. Esse campo elétrico é variável, ou seja, $\partial E / \partial t \neq 0$; assim, produzirá uma contribuição para B , mesmo após a fonte de corrente ter sido desligada. Está claro que essa nova contribuição para B tem $\partial B / \partial t \neq 0$, que produz uma nova contribuição para E , e assim por diante. A menos que a *energia eletromagnética* produzida se *dissipe*, o processo continuará indefinidamente (apesar de a energia propagar-se a uma velocidade determinada).

Essas variações simultâneas dos vetores de campos E e B ou oscilações de um campo eletromagnético dão origem às *ondas eletromagnéticas (OEM)*. Estas são *ondas planas*, possíveis de se propagar através da matéria ou no espaço vazio.

Na Figura 9.18, mostramos a forma típica de uma OEM. São exemplos dessas ondas: luz visível, raios X, radiação calorífica, microondas, ondas de rádio e TV etc.

Algumas propriedades físicas das OEM são as seguintes:

- ♦ Longe da fonte do campo, as ondas são *uniformes* em um plano perpendicular à direção de propagação da OEM; logo, elas são *ondas planas*.
- ♦ Elas são *ondas transversais*, ou seja, os vetores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são perpendiculares à direção de propagação da OEM.
- ♦ As direções dos vetores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são perpendiculares entre si.
- ♦ A *direção de propagação* da onda é a mesma que a do vetor $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, tal como mostra a Figura 9.19; e é determinada pela regra da mão direita.
- ♦ Se λ é o comprimento de onda e ν é sua frequência, a velocidade v de propagação da onda será $v = \lambda \cdot \nu$. Na Figura 9.20, mostramos λ e o período $\tau = 1/\nu$. No SI, a frequência é medida em Hertz (Hz); $1\text{ Hz} = 1/\text{s}$.
- ♦ Sua velocidade no vácuo ou no ar é uma constante de valor $c = 3 \times 10^8$ m/s.
- ♦ As magnitudes E e B são proporcionais, ou, $E \propto B$. Como a intensidade I da OEM é proporcional a $|\mathbf{E} \times \mathbf{B}|$, então $I \propto E^2$ ou $I \propto B^2$.
- ♦ Os componentes $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ em geral podem estar *fora de fase*. Na Figura 9.18 esses componentes estão em fase.
- ♦ As OEMs também podem ser caracterizadas por um *vetor de onda* $\mathbf{k}$ cuja direção coincide com a direção de propagação da onda, sendo sua magnitude $2\pi/\lambda$, e pela frequência angular $\omega = 2\pi\nu$.



Figura 9.18 OEM propagando-se na direção $+z$. Os vetores campo elétrico ($\mathbf{E}$) e magnético ($\mathbf{B}$) são mutuamente perpendiculares.

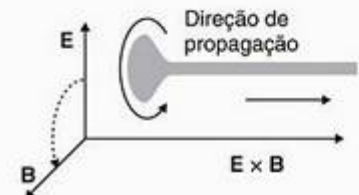


Figura 9.19 A direção de propagação da OEM é a direção em que avança um parafuso, caso ele seja apertado no sentido de $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$.

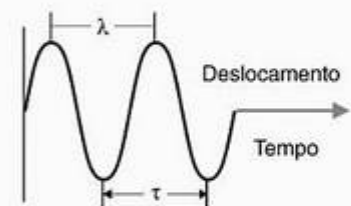


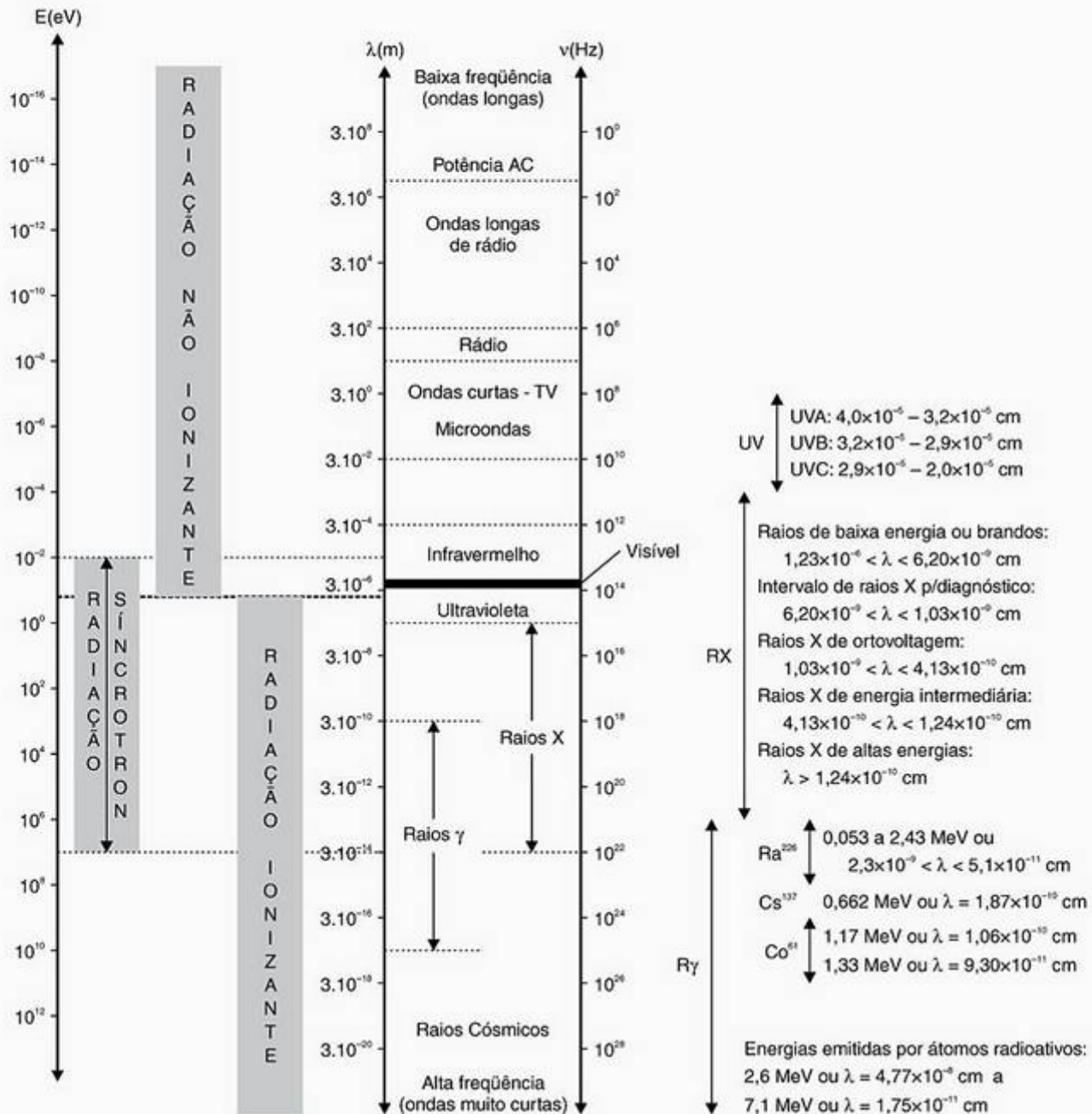
Figura 9.20 Interpretação do período τ e do comprimento de onda λ de uma onda plana de frequência ν .

O espectro eletromagnético

Maxwell, em 1862, fez uma previsão teórica da existência das OEM. Seus cálculos mostraram que a velocidade dessas OEM seria a mesma que a velocidade medida para a propagação da luz no ar. Excluindo a luz, as primeiras OEMs com comprimento de onda de 10 m a 100 m só foram produzidas por Hertz em 1887. Atualmente, são utilizados diversos métodos eletrônicos para gerar OEM de frequências até 10^{12} Hz ($\lambda = 0,3$ mm). Para gerar OEM de frequência acima desse valor, utilizamos como fontes geradoras a *radiação atômica*.

O limite de frequência alcançado por essas fontes é próximo a 10^{20} Hz. Para frequências acima desse valor, as fontes geradoras podem ser o interior de um *núcleo atômico* ou a interação entre *partículas de altas velocidades*, ou seja, de altas energias.

Na próxima página, mostramos o *espectro eletromagnético*, no qual notamos que a radiação produzida pode ser ionizante ou não-ionizante.



A interação das OEMs com a matéria é dependente da frequência da onda. Assim, o olho é sensível à luz visível, enquanto a pele é sensível à radiação de calor. Ondas de rádio não conseguem atravessar superfícies metálicas; já os raios X e gama conseguem isso com facilidade. A grande variedade de interação das OEMs com a matéria faz com que essas radiações tenham um uso extraordinário.

Exemplo: Calcule o comprimento de onda e a magnitude do vetor de onda das ondas de rádio emitidas por uma:

- emissora de FM que opera a 100 MHz.
- estação de AM que opera a 100 KHz.

Resolução: As ondas de rádio são OEM; logo, sua velocidade no ar será $c = 3 \times 10^8$ m/s; como $\lambda \cdot \nu = c$, teremos os seguintes comprimentos de onda:

- $\lambda_{FM} = c/\nu = (3 \times 10^8 / 100 \times 10^6) \text{ m} = 3 \text{ m}$; $k_{FM} = 2\pi/\lambda = 2,09 \text{ m}^{-1}$;
- $\lambda_{AM} = c/\nu = (3 \times 10^8 / 100 \times 10^3) \text{ m} = 3 \text{ 000 m} = 3 \text{ km}$; $k_{AM} = 2\pi/\lambda = 2,09 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$.

Exemplo: Qual é a frequência de uma OEM que tem o mesmo comprimento de onda de uma onda ultra-sônica de frequência 10^5 Hz?

Resolução: A velocidade da onda ultra-sônica no ar é 340 m/s. Se sua frequência é 10^5 Hz, o comprimento dessa onda será $\lambda_{US} = (340/10^5) \text{ m} = 3,4 \times 10^{-3} \text{ m}$. Para uma OEM no ar com $\lambda = 3,4 \times 10^{-3} \text{ m}$, sua frequência será $\nu = (3 \times 10^8 / 3,4 \times 10^{-3}) = 0,88 \times 10^{11} \text{ Hz} = 88,2 \text{ GHz}$.

Diversos efeitos das radiações não-ionizantes

Apesar do grande número de estudos realizados nas últimas décadas, muitos dos efeitos biológicos da radiação eletromagnética não-ionizante (REM-NI) permanecem ainda com um alto grau de incerteza. Muitos resultados sobre observações de bioefeitos concluem que esses são dependentes da frequência da radiação e/ou da intensidade instantânea dos campos elétrico ou magnético que são induzidos, além, é claro, das condições do sistema biológico^(27,28,29,30).

O estudo de bioefeitos da REM-NI em espécimes vivos mostrou que essa radiação tem diversas influências, como, por exemplo:

- ♦ *Cardiovasculares:* produzindo alteração do ritmo cardíaco.
- ♦ *Endócrinos:* produzindo mudanças histológicas na glândula tireóide.
- ♦ *Imunológicos:* produzindo mudanças transientes e inconsistentes na integridade funcional do sistema de defesa imunológico.
- ♦ *Teratogênicos:* campos intensos estão associados, com um certo grau de confiança, na indução de teratogêneses.
- ♦ *Sob o sistema nervoso e sob o comportamento:* como o efeito das correntes contínuas fracas no crescimento de neurônios e a exposição prolongada a certos campos eletromagnéticos podem incrementar a incidência da depressão.

♦ *Nas células:* produzindo alterações na permeabilidade dos elementos eletropositivos plasmáticos; diminuição dos eritrócitos; alteração do metabolismo energético; alteração na razão de crescimento dos microorganismos; liberação de Ca^{2+} de células *in vitro*; orientação de neurites; incremento da reprodução; alteração da permeabilidade da membrana; fusão celular; diminuição celular etc.

Efeitos das radiações ionizantes

Os *efeitos biológicos* da radiação ionizante podem ser diretos ou indiretos.

♦ Efeitos *diretos* são as mudanças que aparecem como resultado da absorção da energia irradiada pelas moléculas que estão sendo estudadas (alvos)^(31,32).

♦ Efeitos *indiretos* são as mudanças das moléculas em uma solução, devido aos produtos da radiólise da água ou outra solução, e não pela absorção de energia pelas moléculas em estudo.

Muitos efeitos têm sido observados e estudados, devido à ação da radiação ionizante, em embriões e fetos humanos⁽³³⁾. É necessário destacar que, nas crianças que conseguem sobreviver aos efeitos danificadores da radiação, os danos se manifestam na forma de várias malformações, retardando o desenvolvimento físico e mental. As malformações mais freqüentes são: microcefalia, hidrocefalia e anomalias no desenvolvimento cardíaco.

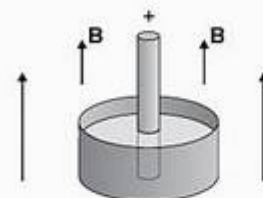
Os dados atualmente disponíveis são insuficientes em muitos casos para estabelecermos a dose máxima de radiação tolerada por um feto. Isso se deve aos resultados observados em experiências com animais que normalmente são extrapolados em relação aos humanos. Mesmo assim, dispomos de uma série de dados obtidos com a observação do *efeito da radiação ionizante* em humanos que experimentaram acidentes involuntários ao manusear essas fontes de radiação.



PROBLEMAS

- Esquematize as linhas de campo magnético para as duas situações seguintes:
 -
 -
- Determine a força magnética sobre um elétron cuja velocidade tem componentes $v_x = 4,4 \times 10^6$ m/s, $v_y = -3,2 \times 10^6$ m/s e $v_z = 0$ em um ponto onde o campo magnético tem componentes $B_x = 0$, $B_y = -12$ mT e $B_z = 12$ mT.
 - Mostre a direção desses vetores em um diagrama.
- Um próton de 1 MeV de energia move-se perpendicularmente a um campo magnético de 2 000 G. Qual será a força sobre o próton?

4. Um próton de 10 MeV está se movendo horizontalmente na direção este próximo ao equador geográfico, onde o campo geomagnético é 0,3 G. Após o próton viajar 10 m, determine:
 - a) de quanto será sua deflexão da direção original;
 - b) em que direção será a deflexão.
5. Qual é o raio da órbita de um próton de energia 1 MeV em um campo de 10^4 G?
6. Um elétron move-se a uma velocidade $v = 2,5 \times 10^7$ m/s em um campo magnético de 50 G. O vetor v faz um ângulo de 45° com relação a B . Qual é a força magnética sobre o elétron?
7. Próximo ao equador geográfico, o campo geomagnético é horizontal e tem magnitude aproximada de 0,25 G. Um arame que conduz uma corrente de 12 A e de 1 km de comprimento está orientado na direção leste-este. Qual é a força exercida pelo campo geomagnético sobre o arame?
8. Tem sido proposto que a origem do campo geomagnético é um anel de corrente de elétrons que fluem no interior metálico da Terra. Qual será a direção do fluxo de elétrons para dar a polaridade correta do campo geomagnético?
9. Um elétron de 10 keV move-se em um campo magnético de 1 T. Quais serão, sobre o elétron:
 - a) as forças mínima e máxima;
 - b) as condições pelas quais elas são obtidas.
10. Um potencial de 250 μ V é medido através de uma artéria de 1,2 cm de diâmetro, quando utilizamos um magneto de 800 G como medidor de fluxo. Qual é a razão do fluxo volumétrico Q na artéria?
11. Para as condições do Exercício 10, qual é o campo elétrico através da artéria devido aos íons Na^+ ?
12. Uma massa de 1g está se movendo com velocidade $v = 0,1c$, na direção este no equador geográfico, onde $B = 0,3$ G. Que carga elétrica deverá ter essa massa para que a força magnética (para cima) cancele a força gravitacional (para baixo)?
13. Um elétron move-se na direção este próximo ao equador geográfico. Qual é a direção da força geomagnética sobre o elétron?
14. O recipiente metálico mostrado ao lado tem em seu centro uma haste metálica isolada no fundo. Ele contém água salgada na qual os portadores de corrente são os íons Na^+ e Cl^- . O recipiente está situado em um campo magnético dirigido para cima. Descreva o movimento de cada espécie de íon visto por um observador situado na parte de cima.
15. Um elétron livre em um metal está orientado de modo que seu momento magnético de $9,27 \times 10^{-24}$ A.m² de magnitude é antiparalelo a um campo magnético de 35 T aplicado externamente. Se a orientação do momento magnético varia 180° , determine a variação ΔU na energia potencial do momento magnético com o campo magnético aplicado externamente.



16. Uma linha de corrente conduz uma corrente de 500 A para o norte. Quais são o módulo e o sentido da força por unidade de comprimento na linha de corrente exercidos pelo campo geomagnético:
 - a) Se, no Brasil, tiver componente vertical de 2×10^{-5} T para baixo e componente horizontal de 1×10^{-5} T para o norte?
 - b) Se, nos EUA, tiver componente vertical de 5×10^{-5} T para baixo e componente horizontal de 2×10^{-5} T para o norte?
17. Suponha que o metal do Exercício 15 esteja à temperatura ambiente (300 K). É provável que os momentos magnéticos dos vários elétrons livres se alinhem, todos eles, praticamente paralelos ao campo externo? E se o metal estiver a 0,1 K?
18. Os elétrons de um tubo de imagem de televisão têm energia de 12 keV. O tubo está orientado de maneira que os elétrons se movem horizontalmente do sul para o norte. O componente vertical do campo geomagnético aponta para baixo e vale $5,5 \times 10^{-5}$ T.
 - a) Em que direção será desviado o feixe?
 - b) Qual a aceleração adquirida por um elétron?
 - c) Qual será o desvio sofrido pelo feixe após percorrer 20 cm dentro do tubo de imagem?
19. No Brasil, a magnitude do campo geomagnético é 0,6 G e sua direção é para o norte e para cima com um ângulo da ordem de 15° com a horizontal. Um próton move-se horizontalmente na direção norte, com velocidade de 10^7 m/s. Calcule a força sobre o próton.
20. Uma pedra de granizo de 2 g, com carga elétrica de -7×10^{-12} C, cai verticalmente com velocidade de 80 m/s. Na região, há campos gravitacional, elétrico e magnético de módulos $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $E = 120 \text{ N/C}$ e $B = 40 \text{ } \mu\text{T}$, respectivamente. Os campos g e E são dirigidos verticalmente para baixo, enquanto a direção de B é horizontal e o sentido é para o norte.
 - a) Determine o módulo e a direção da força exercida por cada um desses campos sobre a pedra de granizo.
 - b) Alguma dessas forças é desprezível?
 - c) Indique quaisquer outras forças significativas que atuem sobre a pedra de granizo.
21. Um campo magnético uniforme de 1,5 T está dirigido no sentido z positivo. Calcule a força sobre um próton quando sua velocidade $\mathbf{v}$ é:
 - a) $3 \times 10^6 \text{ } \hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}$; c) $8 \times 10^6 \text{ km/s}$;
 - b) $2 \times 10^6 \text{ } \hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}$; d) $(3 \times 10^6 \text{ } \hat{\mathbf{i}} + 4 \times 10^6 \text{ } \hat{\mathbf{j}}) \text{ m/s}$.
22. Um pequeno ímã está em um campo magnético de 0,1 T. O torque máximo sobre ele é 0,2 N.m.
 - a) Qual o momento magnético do ímã?
 - b) Sendo o comprimento do ímã 4 cm, qual é o valor do seu pólo magnético q^* ?

23. Um feixe de prótons, com velocidade $v = 0,1c$, move-se através de uma região de campos elétrico e magnético. Os prótons estão movendo-se perpendicularmente para dentro da página, sendo a força eletrostática sobre eles igual a $3 \times 10^{-13} \text{ N}$.
- Qual deve ser a razão E/B , de modo que a força resultante sobre os prótons seja zero?
 - Qual será o módulo de B ?
 - Suponha que E/B possua o valor acima. Quais seriam o sentido e o módulo da força resultante sobre uma partícula de carga $+e$ e velocidade $v = 0,2c$?
24. Um pequeno ímã de 5 cm de comprimento faz um ângulo de 45° com um campo magnético uniforme de 0,04 T. O torque sobre ele tem o valor 0,1 N.m. Calcule:
- o momento magnético do ímã;
 - o valor do pólo magnético q^* .
25. Um avião a jato está voando diretamente para o norte, a uma latitude em que o componente vertical do campo magnético da Terra é de 0,6 G, apontando para baixo. Sua velocidade é de 278 m/s.
- Qual é o campo elétrico externo medido pelo piloto?
 - Estarão as asas eletricamente carregadas?
26. Compare os módulos, na proximidade da superfície da Terra, do peso de um elétron e de uma força magnética típica exercida pelo campo magnético da Terra ($B = 10^{-5} \text{ T}$) sobre um elétron com velocidade de 10^6 m/s .
27. O campo geomagnético é essencialmente o campo de um dipolo magnético. Suponha que esse campo seja produzido por uma corrente circulando embaixo do equador a uma distância média de 5 000 km do centro da Terra. Qual seria o valor dessa corrente, se o campo geomagnético, em ambos os pólos magnéticos, fosse de aproximadamente 1 G?
28. Suponha que a corrente do Exercício 27 esteja fluindo através de uma área igual a um quarto da área da seção transversal da Terra.
- Qual é a densidade de corrente J ?
 - Qual é a corrente I por cm^2 da área da seção transversal?
 - Se a corrente for devida aos elétrons em movimento que têm velocidade de deslocamento de 10^{-4} m/s , quantos elétrons por cm^3 haverá em movimento?
29. Um fio retilíneo horizontal transporta uma corrente de 16 A do oeste para leste e experimenta o campo geomagnético de 0,04 mT, em um local onde B_T é paralelo à superfície e aponta para o norte.
- Determine a força magnética sobre 1 m de fio.
 - Se a massa do fio é 50 g, que corrente permitirá que o fio seja magneticamente sustentado (isto é, a força magnética equilibra o peso)?
30. Uma agulha de bússola tem momento de dipolo magnético $0,1 \text{ A.m}^2$ e aponta para o norte em um lugar onde o campo magnético da Terra também aponta para o norte, com módulo $5 \times 10^{-5} \text{ T}$.



- a) Quanto trabalho deve ser realizado para mudar a orientação da agulha de norte para leste nesse campo?
 - b) Qual é o torque magnético sobre a agulha quando ela aponta para leste?
 - c) Determine o torque e a energia se a agulha aponta para o sul.
31. Uma OEM no ar de 50 MHz de frequência tem seus componentes elétrico e magnético em fase (veja a Figura 9.18, anteriormente). Se a amplitude máxima E_0 do campo elétrico é 120 N/C, determine a amplitude máxima B_0 , ω , τ , k e λ .
32. A partir do espectro eletromagnético, determine que tipo de onda tem comprimento de onda aproximadamente igual:
- a) ao comprimento de um campo de futebol;
 - b) ao comprimento de um dedo;
 - c) à espessura de um fio de cabelo;
 - d) à dimensão de um átomo;
 - e) à dimensão de um núcleo atômico.
33. Em uma comparação entre luz infravermelha e ultravioleta, descubra qual delas tem maior:
- a) comprimento de onda;
 - b) frequência.
34. A frequência angular de uma OEM no vácuo é $8,2 \times 10^{12}$ rad/s.
- a) Determine k , λ , v e τ .
 - b) Se a OEM estivesse no ar, alguma de suas respostas seria diferente?
35. A amplitude máxima do componente magnético de uma OEM no vácuo é 510 nT.
- a) Qual é a amplitude máxima do componente elétrico dessa OEM?
 - b) No caso de a OEM estar no ar, sua resposta seria diferente?
36. Suponha que o componente elétrico de uma OEM no vácuo seja $E(x,t) = (31 \text{ N/C}) \cos[(1,8 \text{ rad/m})x + (5,4 \times 10^8 \text{ rad/s})t]\mathbf{i}$
- Calcule:
- a) a direção de propagação;
 - b) o comprimento de onda;
 - c) a frequência;
 - d) a amplitude máxima do componente magnético;
 - e) a expressão para a parte do campo magnético da onda.

Referências Bibliográficas

1. BLAKEMORE, P., FRANKEL, R.B. Magnetic Navigation in Bacteria. *Scientific American*. v. 245, n. 6, p. 42-49, 1981.
2. ACOSTA-AVALOS, D.A. et al. Insetos Sociais: um exemplo de magnetismo animal. *Rev. Bras. Ens. Fís.* v. 22, p. 1-5, 2000.
3. ESQUIVEL, D.M.S. et al. Evidence for magnetic material in the fire ant *Solenopsis* sp. By Electron Paramagnetic Resonance Measurements. *Naturwissenschaften*. v. 86, n. 1, p. 30-32, Jan, 1999.
4. LOHMANN, K.J. Magnetic orientation by hatchling loggerhead sea turtles (*Caretta caretta*). *J. Exp. Biol.* v. 155, p. 37-49, Jan 1991.
5. LOHMANN, K.J. Magnetic orientation and navigation in marine animals. *Am. Zool.* v. 41, n. 6, p. 1509-1509, Dec 2001.
6. GOULD, J.L. The case for Magnetic Sensitivity in Birds and Bees (such as it is), *American Scientist*. v. 68, n. 3, p. 256-267, 1980.
7. WAJNBERG, E. et al. Electron Paramagnetic Resonance Study of the migratory ant *Pachycondyla Marginata* abdomens. *Biophys. J.* v. 78, n. 2, p. 1018-1023, Feb, 2000.
8. ABLE, K.P. The concepts and terminology of bird navigation. *J. Avian. Biol.* v. 32, n. 2, p. 174-183, Jun, 2001.
9. WILTSCHKO, W.; WILTSCHKO, R. Magnetic orientation and celestial cues in migratory orientation. *Experientia*. v. 46, n. 4, p. 342-352, Apr, 1990.
10. GOULD, J.L. et al. Orientation of demagnetized bees. *J. Exp. Biol.* v. 86, Jun, p. 1-8, 1980.
11. LEASK, M.J.M. A physicochemical mechanism for magnetic field detection by migratory birds and homing pigeons. *Nature*. v. 267, n. 5607, p. 144-145, 1977.
12. ACOSTA-AVALOS, D.A. et al. Isolation of magnetic nanoparticles from *Pachycondyla Marginata* ants. *J. Exp. Biol.* v. 202, n. 19, p. 2687-2692, Out, 1999.
13. LOHMANN, K.J. et al. Perception of ocean wave direction by sea turtles. *J. Exp. Biol.* v. 198, n. 5, p. 1079-1085, May, 1995.
14. LEASK, M.J.M. Physicochemical mechanism for magnetic field detection by migratory birds and homing pigeons. *Nature*. v. 267, n. 5607, p. 144-145, 1977.
15. KEETON, W.T. Mystery of pigeon homing. *Scientific American*. v. 231, n. 6, p. 96-107, 1974.
16. BLAKEMORE, Op. Cit.
17. LOWENSTAM, H.A. Minerals Formed by Organism, *Science*. v. 211, n. 4487, p. 1126-1131, 1981.
18. WILTSCHKO, W.; WILTSCHKO, R. Magnetic orientation in birds. *J. Exp. Biol.* v. 199, n. 1, p. 29-38, Jan, 1996.
19. WALCOTT, C.; GOULD, J.L.; KIRSCHVINK, J.L. Pigeons have magnets. *Science*. v. 205, n. 4410, p. 1027-1029, 1979.
20. GOULD, J.L. et al. Orientation of demagnetized Bees. *J. Exp. Biol.* v. 86, p. 1-8, Jun, 1980.
21. WILTSCHKO, W.; WILTSCHKO, R. Magnetic orientation and celestial cues in migratory orientation. *Experientia*. v. 46, n. 4, p. 342-352, Apr, 1990.
22. GOULD, J.L. Magnetic senses—birds lost in the red. *Nature*. v. 364, n. 6437, p. 491-492, Aug, 1993.
23. WILTSCHKO, W. et al. Red-light disrupts magnetic orientation of migratory birds. *Nature*. v. 364, n. 6437, p. 525-527, Aug, 1993.
24. WALCOTT, C.; GREEN, R.P. Orientation of homing pigeons altered a change in the direction of an applied magnetic field. *Science*. v. 184, n. 4133, p. 180-182, 1974.
25. SCHIMDT-KOENIG, K.; KEETON, W.T. (Eds.). *Animal Migration, Navigation and Homing*. New York: Berlin Heidelberg, Springer, 1978.
26. WILTSCHKO, W.; WILTSCHKO, R. Magnetic compass of *European Robins*. *Science*. v. 176, n. 4030, p. 62-64, 1972.
27. D'AMBROSIO, et al. Chromosomal aberrations induced by ELF electrical fields. *J. Bioelectricity*. v. 4, n. 1, p. 279-284, 1985.
28. POLLACK, H. Medical aspects of exposure to radio frequency radiation including microwaves. *Southern Medical Journal*. V. 76, n. 6, p. 759-765, 1983.
29. SMIALOWICZ, R.J. Immunologic effects of no ionizing electromagnetic radiation *IEEE Eng. Med. Biol.* v. 6, n. 1, p. 47-51, Mar, 1987.

30. D'AMBROSIO, G. et al. Cytogenetic damage in human lymphocytes following GMSK phase modulated microwave exposure. *Bioelectromagnetics*. v. 23, n. 1, p. 7-13, Jan, 2002.
31. SPELLER, R.D.; HORROCKS, J.A. Photon scattering – a new source of information in medicine and biology? *Phys. Med. Biol.* v. 36, n. 1, p. 1-6, 1991.
32. EVANS, H.S. et al. Measurement of small-angle photon scattering for some breast tissue and tissues-substitute materials. *Phys. Med. Biol.* v. 36, p. 7-18, 1991.
33. United Nations Scientific Committee on the effects of atomic radiation Report. on the Biological Effects of Irradiation in Uterus. New York, United Nations, 1984.

Capítulo 10

Ondas Mecânicas, Bioacústica e Comunicação Sonora



10.1 INTRODUÇÃO

As *ondas mecânicas* são perturbações ou distúrbios que se propagam através de meios materiais. Por exemplo, são ondas mecânicas:

- ♦ ondas em cordas (geradas por muitos instrumentos musicais);
- ♦ ondas na água;
- ♦ ondas sonoras (importantes na comunicação de seres vivos) etc.

Ondas mecânicas são muito utilizadas na medicina, odontologia e biologia; são utilizadas também para tratamentos de saúde, observação interna de organismos e pesquisas em geral. Dentro de sua gama de comprimentos de onda, as ondas mecânicas são utilizadas como meio de comunicação por diversas espécies. Elas também são utilizadas para detectar a presença de seres vivos ou como elementos de orientação. *Enfim, a importância desse tipo de onda para diversas espécies é muito grande.*

Diferentes das *ondas eletromagnéticas*, que somente são *transversais*, as *ondas mecânicas* podem ser:

- ♦ *transversais*: quando a perturbação é perpendicular à direção de propagação da onda (como é o caso das ondas produzidas pelas cordas);
- ♦ *longitudinais*: quando a perturbação é paralela à direção de propagação da onda (como é o caso das ondas sonoras).

Pulsos ondulatórios: reflexão e transmissão

Os pulsos ondulatórios são *perturbações* de extensão limitada, ou seja, eles têm um princípio e um fim. Por exemplo, o barulho de um tiro é um pulso ondulatório acústico; um relâmpago de luz é um pulso luminoso; uma onda de maré é um pulso ondulatório na água. Na Figura 10.1, mostramos a geração de um pulso e sua propagação através de uma corda. Toda vez que um *pulso se propaga*:

- ♦ em qualquer instante, somente uma região limitada do espaço estará perturbada;

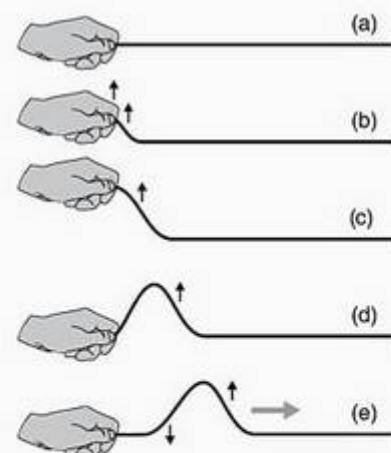


Figura 10.1 Pulso ondulatório através de uma corda.

- ♦ em qualquer ponto, ele leva um tempo limitado para passar;
- ♦ em qualquer instante ou posição, o pulso estará transmitindo momento linear e energia.

Se um pulso viaja uma distância Δx , em um tempo Δt , sua velocidade média de propagação será $v = \Delta x / \Delta t$. Em geral, a *velocidade* de um pulso *depende* das propriedades físicas do meio em que ele se propaga, e *não* da velocidade da fonte que gera o pulso em relação ao meio.

Todo pulso ondulatório precisa de um meio material para se propagar. Se o pulso tem uma velocidade v em um certo meio e entra em outro meio onde:

- ♦ sua velocidade é *menor* do que a original, então o pulso refletido será *invertido*;
- ♦ sua velocidade é *maior* do que a original, então o pulso refletido *não é invertido*.

Muitas vezes, o meio ou fronteira onde um pulso incide *não é livre* (veja a Figura 10.2a) *nem rígido* (veja a Figura 10.2b). Nessa situação, uma parte do pulso será refletida (Figuras 10.2a' e 10.2b') e outra parte será transmitida. A Figura 10.2c mostra a transmissão e a reflexão de um pulso na fronteira de dois meios diferentes. A fração da energia do pulso que é transmitida dependerá das densidades relativas dos meios.

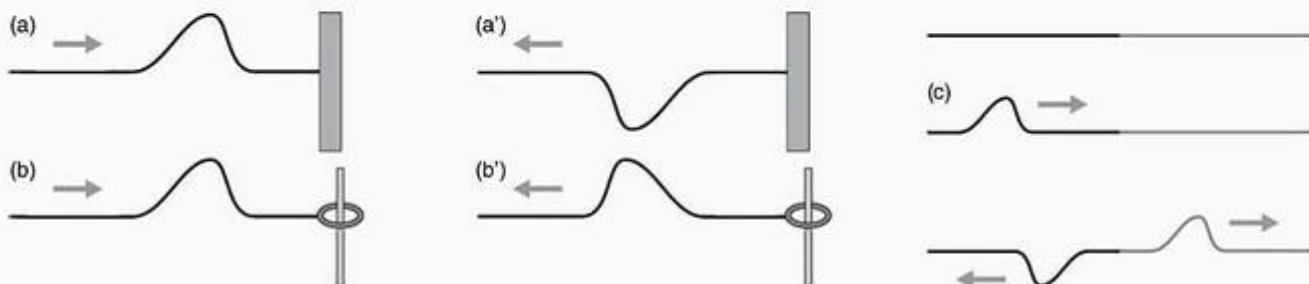
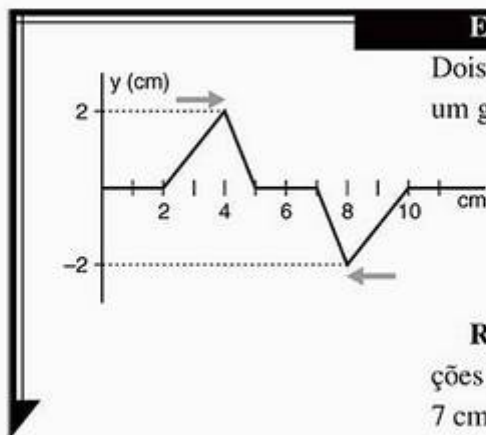


Figura 10.2 (a) e (b) são pulsos incidentes, enquanto (a') e (b') são os respectivos pulsos refletidos. No primeiro caso, a reflexão acontece quando o meio de propagação do pulso tem um extremo fixo. No segundo caso, a reflexão acontece na extremidade livre. Em (c) temos dois meios diferentes; depois de o pulso alcançar a fronteira, teremos um pulso refletido e um transmitido.



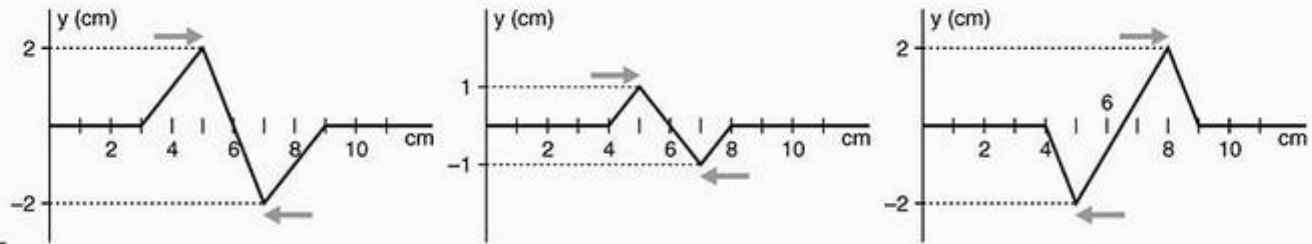
Exemplo: A figura ao lado mostra uma corda tensionada no instante $t = 0$.

Dois pulsos movem-se em direções opostas com velocidades de 1 cm/s. Faça um gráfico das formas da corda nos instantes:

- 1,0 s;
- 2,0 s;
- 3,0 s.

Resolução: O pulso que se propaga para a *direita* tem as seguintes posições depois de 1,0 s, 2,0 s e 3,0 s, respectivamente: extremo anterior: 6 cm, 7 cm e 8 cm; extremo posterior: 3 cm, 4 cm e 5 cm. O pulso que se propaga

para a esquerda tem as seguintes posições depois de 1,0 s, 2,0 s e 3,0 s, respectivamente: extremo anterior: 6 cm, 5 cm e 4 cm; extremo posterior: 9 cm, 8 cm e 7 cm. Logo, as formas da corda serão, respectivamente, as seguintes:



Se um pulso, à medida que ele se desloca em um meio, *mudar sua forma*, dizemos que experimentou uma *dispersão*. No caso de um pulso que *não tem dispersão*, ao propagar-se por uma corda, sua velocidade de propagação v não dependerá do comprimento da corda nem da amplitude da forma do pulso. Porém, a sua velocidade dependerá da massa da corda por unidade de comprimento μ e da tensão T aplicada à corda. Na Figura 10.3a é mostrado um pulso que se propaga com velocidade v através de uma corda de densidade linear μ . Um segmento pequenino da corda de tamanho $r\phi$ e massa $\Delta m = \mu r\phi$ tem aceleração centrípeta v^2/r ; e isso se deve à ação das forças tensoras T exercidas pela corda em ambos os extremos do segmento escolhido, tal como mostra a Figura 10.3b. Por ser ϕ pequeno, a força resultante sobre Δm será $2T\sin(\phi/2) \cong 2T(\phi/2) = T\phi$. Além do mais, a amplitude do pulso será bem menor do que seu comprimento. Pela 2ª lei de Newton, o segmento de corda satisfaz a relação $T\phi = \Delta m(v^2/r) = \mu r\phi(v^2/r) = \mu\phi v^2$. Logo, a velocidade v do pulso na corda será

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (10.1)$$

A Figura 10.4 mostra um pulso longitudinal propagando-se através de uma mola. Em geral, a velocidade v de propagação de um pulso depende das *propriedades elásticas e inercial* do meio de propagação. Se o meio é um:

- ♦ *fluido* de densidade ρ , e módulo volumétrico B , sua velocidade será $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$;
- ♦ *sólido* de densidade ρ , e módulo de Young Y , sua velocidade será $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$.

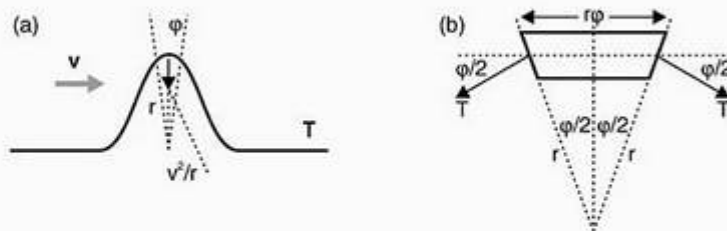


Figura 10.3 a) Pulso propagando-se com velocidade v através de uma corda de densidade linear μ ; b) um elemento de massa $\Delta m = \mu r\phi$ e aceleração centrípeta v^2/r experimenta uma força resultante $T\phi$.

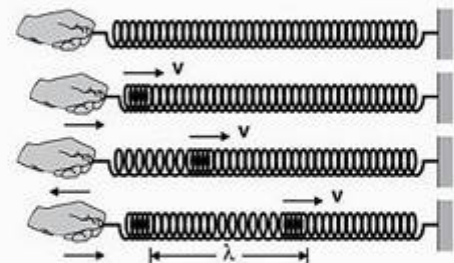


Figura 10.4 Pulso longitudinal propagando-se através de uma mola.

Exemplo: Quando a tensão em uma corda é 100 N, a velocidade de um pulso é 120 m/s. Qual é a velocidade do pulso quando a tensão é 200 N?

Resolução: Por ser a mesma corda, sua densidade linear não muda ao variar a magnitude da tensão aplicada. Logo, se $T_1 = 100$ N, $T_2 = 200$ N e $v_1 = 120$ m/s, então, de $T_1 v_1^2 = T_2 v_2^2$ teremos $v_2 = v_1 (T_2/T_1)^{1/2} = (120 \text{ m/s})(200/100)^{1/2} = 169,7 \text{ m/s}$.

Exemplo: Uma corda elástica de $0,8 \text{ g/cm}^3$ de densidade e seção transversal de $0,5 \text{ cm}^2$ é submetida a uma tensão de 100 N. Em um extremo da corda existe uma fonte que gera pulsos com uma frequência de 2 000 Hz. Qual é o comprimento do pulso que se propaga através da corda?

Resolução: A densidade linear da corda será $\mu = (0,8 \text{ g/cm}^3)(0,5 \text{ cm}^2) = 0,04 \text{ kg/m}$. Logo, a velocidade do pulso na corda é $v = (100 \text{ N}/0,04 \text{ kg/m})^{1/2} = 50 \text{ m/s}$. A frequência do pulso é 2 000 Hz, logo o comprimento do pulso é $\lambda = 50/2\,000 = 0,025 \text{ m}$.

Ondas harmônicas: energia e intensidade

As ondas harmônicas, ou ondas progressivas, são ondas cujas variações espacial e temporal seguem as funções seno ou cosseno. Uma onda harmônica de amplitude máxima y_0 , propagando-se com velocidade v na direção $+x$, terá uma amplitude $y(x,t) = y_0 \sin(x - vt)$ na posição x e no instante t ou

$$y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t). \quad (10.2)$$

$k = 2\pi/\lambda$ é o número de onda, sendo λ o comprimento de onda; $\omega = 2\pi v = 2\pi/\tau$ é a frequência angular, sendo v a frequência e τ , o período da onda. Na equação (10.2), quando o tempo é fixo, a variação espacial do deslocamento é senoidal, como mostra a Figura 10.5a. Em uma posição fixa, o deslocamento executa uma vibração harmônica simples, como mostra a Figura 10.5b.

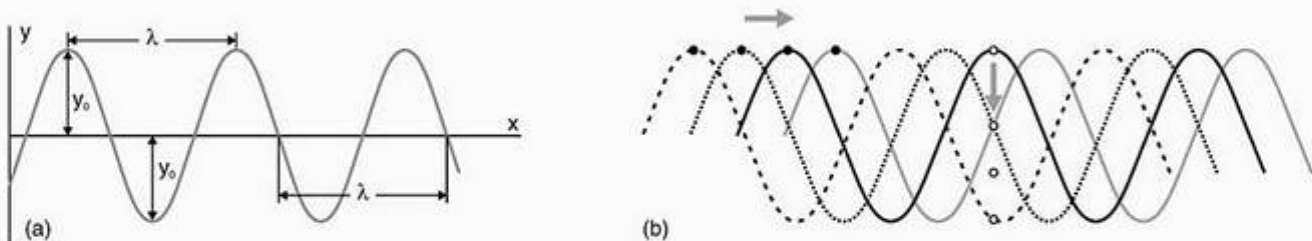


Figura 10.5 a) Variação espacial de uma onda harmônica de amplitude y_0 e comprimento de onda λ .
b) Onda harmônica em quatro instantes consecutivos: os círculos pretos marcam um ponto característico da onda; os círculos brancos marcam um ponto físico no meio.

Há uma relação simples entre a frequência da onda $\nu = \omega/2\pi$, o comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$ e a velocidade v da onda harmônica

$$\blacktriangleright \quad v = \lambda \cdot \nu = \omega/k. \quad (10.3)$$

Da equação (10.2), podemos induzir as seguintes características de uma onda harmônica:

♦ a velocidade de um ponto material em uma posição fixa x_0 , que segue um movimento harmônico simples, é dada por

$$\blacktriangleright \quad u = \frac{\partial y}{\partial t} = -y_0 \omega \cos(kx_0 - \omega t); \quad (10.4)$$

♦ como $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -y_0 \omega^2 \sin(kx - \omega t)$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y_0 k^2 \sin(kx - \omega t)$, as ondas harmônicas satisfazem a equação de onda

$$\blacktriangleright \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (10.5)$$

Exemplo: A equação de uma onda harmônica é $y = 3,5 \sin(\pi x/3)$; onde y e x são medidos em cm. Quais são a amplitude e o comprimento dessa onda?

Resolução: De acordo com a equação (10.2), a amplitude da onda será $y_0 = 3,5$ cm. Como $k = \pi/3 = 2\pi/\lambda$, o comprimento dessa onda será $\lambda = 6$ cm.

Como toda onda contém energia, quando ela está se deslocando, é energia que estará sendo transportada na direção de seu movimento. Assim, a energia é transportada através do sistema em que a onda se propaga. Para calcularmos a quantidade de energia transportada por uma onda, consideraremos uma onda transversal que se propaga ao longo de uma corda estendida de densidade linear μ .

A Figura 10.6a mostra um segmento de corda nos instantes t e $t + \Delta t$, quando uma onda está se propagando na direção $+x$. A energia do elemento de corda Δl no instante t é igual à energia do elemento $\Delta l'$ no instante $t + \Delta t$. Na Figura 10.6b, temos um elemento de corda dl e massa $dm = \mu dl$ no instante t . Esse elemento tem energia cinética dK , devido ao seu movimento, e energia potencial dU , devido à distensão experimentada pela passagem da onda.

Admitindo que o deslocamento transversal do elemento de corda é pequeno, ou seja, $\theta \cong 0^\circ$, então, $dx = dl \cdot \cos \theta \cong dl$, e sua energia cinética $dK = \frac{1}{2} \mu dx (\partial y / \partial t)^2$; portanto, a energia cinética por unidade de comprimento ou densidade de energia cinética ρ_K é

$$\blacktriangleright \quad \rho_K = dK/dx = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2. \quad (10.6)$$

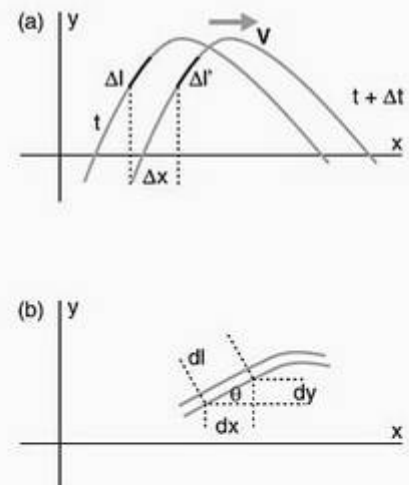


Figura 10.6 a) Energia propagando-se ao longo de uma corda com velocidade $\Delta x/\Delta t$. b) Elemento de corda dl no instante t .

A energia potencial dU produzida no elemento de corda pela passagem da onda deve-se ao estiramento ($dl - dx$) do elemento. Uma vez que o elemento dl está sob o efeito da tensão T (veja a Figura 10.3b), inclusive antes da passagem da onda, podemos mostrar que (Problema 20) $dU = \frac{1}{2} T dx \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$; portanto, a energia potencial por unidade de comprimento ou *densidade de energia potencial* ρ_U é

$$\rho_U = \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2. \quad (10.7)$$

Assim a *densidade de energia total* $\rho_E = \rho_K + \rho_U$ da onda é

$$\rho_E = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2. \quad (10.8)$$

Para o caso de uma onda harmônica, teremos $\rho_K = \rho_U$; logo, $\rho_E = 2\rho_K = 2\rho_U$.

A Figura 10.6a mostra que a energia do segmento de corda Δl é passada a $\Delta l'$ no intervalo de tempo Δt , com uma velocidade $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, que é a mesma velocidade v da onda. Assim, a potência da onda é

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \rho_E \cdot v. \quad (10.9)$$

Para uma onda harmônica $y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$, podemos escrever sua potência como $P = \mu \omega^2 y_0^2 v \cos^2(kx - \omega t)$.

O transporte de energia por uma onda também é descrito em termos da *intensidade da onda* I . A intensidade é definida como a taxa média com a qual a onda transmite energia através da unidade de área A , normal à direção de propagação

$$I = \frac{1}{A} \left\langle \frac{\Delta E}{\Delta t} \right\rangle = \frac{\langle P \rangle}{A} = \frac{\rho_E}{A} v = \eta v, \quad (10.10)$$

sendo η a *densidade de energia total* por unidade de volume. A intensidade é medida no SI em W/m^2 .

Exemplo: As ondas transversais que se propagam ao longo de uma corda de $\mu = 0,1 \text{ kg/m}$ são dadas pela função de onda $y(x,t) = 0,02 \sin(0,2 \pi x - 4 \pi t)$; onde y e x estão em metros e t está em segundos. Determine:

- a amplitude, a frequência e o comprimento dessas ondas;
- a velocidade de propagação;
- a densidade de energia total;
- a potência da onda.

Resolução:

- Comparando a expressão da função de onda dada pela equação (10.2) e a expressão dessas ondas transversais, achamos $y_0 = 0,02 \text{ m}$; $v = \omega/2\pi = 4\pi/2\pi = 2 \text{ Hz}$; e $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/0,2\pi = 10 \text{ m}$.
- A velocidade de propagação da onda é $v = v \cdot \lambda = (2 \text{ Hz})(10 \text{ m}) = 20 \text{ m/s}$.

- c) A densidade de energia total é duas vezes a densidade de energia cinética; logo, da equação (10.6), achamos $\rho_E = 0,1[0,08\pi \cos(0,2x - 4\pi t)]^2 \text{ J/m} = 6,3 \times 10^{-3} \cos^2(0,2x - 4\pi t) \text{ J/m}$.
- d) A potência da onda, de acordo com a equação (10.9), é $P = \rho_E \cdot v = 0,13 \cos^2(0,2x - 4\pi t) W$.

10.2 ONDAS MECÂNICAS LONGITUDINAIS

Essas *ondas longitudinais* são perturbações que se propagam em meios líquidos, sólidos ou gasosos⁽¹⁾. Na Figura 10.7a, mostramos uma perturbação que se propaga através do ar no sentido $+x$. As partículas do ar, devido à perturbação, movem-se de acordo com a Figura 10.7b. Por causa desse movimento, na posição x_1 , as partículas se separam, e, em x_3 , elas se juntam. A *onda harmônica* que representa o deslocamento das partículas do ar é mostrada na Figura 10.7c. A *amplitude* y da onda é uma medida do deslocamento de uma partícula do meio. Se o deslocamento das partículas for no sentido

- ♦ $+x$, y será positiva;
- ♦ $-x$, y será negativa.

Enquanto as partículas do ar se movem em torno de sua posição de equilíbrio, a *pressão do ar* oscila em torno de seu *valor normal* p_0 . Quando os valores da pressão p e da densidade do ar, com relação aos valores normais, forem

- ♦ maiores (posição x_3), p será positivo;
- ♦ menores (posição x_1), p será negativo.

Se p é a pressão em um pequeno volume de ar no interior do tubo, a variação da pressão $y_p = p - p_0$, nesse volume, seguirá a seguinte equação

$$y_p = y_{0p} \sin(kx - \omega t). \quad (10.11)$$

y_{0p} é o máximo valor da diferença entre a pressão em um pequeno volume de ar e a pressão normal p_0 . Essa variação da pressão do ar no tubo pode ser representada por uma *onda harmônica*, como na Figura 10.7d. As figuras 10.7c e 10.7d mostram que, nas posições de deslocamento máximo (x_2 e x_4), a variação da pressão é nula; e, nas posições de deslocamento nulo (x_1 e x_3), a variação da pressão é máxima ou mínima. Logo, existirá uma defasagem de 90° entre as equações que regem essas variações. Portanto, a equação do *deslocamento* das partículas de ar, em relação a suas posições de equilíbrio, será

$$y = y_0 \sin(kx - \omega t + 90^\circ). \quad (10.12)$$

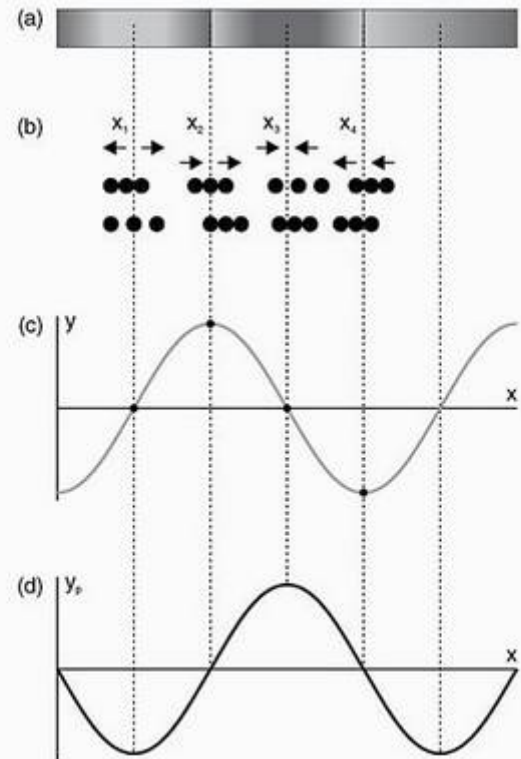


Figura 10.7 a) Perturbação longitudinal no ar; b) o movimento das partículas pode ser positivo ou negativo; c) x_1 e x_3 são posições de equilíbrio das partículas, e, em x_2 e x_4 , o deslocamento é máximo; d) em x_1 e x_3 , a variação da pressão é máxima, e, em x_2 e x_4 , ela não muda.

A velocidade com a qual a perturbação se propaga nesse meio é dada por $v = \omega/k$. Por outro lado, a *variação da pressão* $y_p = p - p_0$ em um pequeno volume V do ar no interior do tubo é dada por $y_p = -B \frac{\Delta V}{V} = -\rho v^2 \frac{\Delta V}{V}$, onde o módulo volumétrico B e a densidade do meio ρ satisfazem a relação $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$. Logo, pela equação (10.11), teremos $y_{op} \sin(kx - \omega t) = -\rho v^2 \frac{\Delta V}{V}$.

Se A é a seção transversal do tubo de forma cilíndrica, então, em um comprimento Δx do tubo, teremos um volume de ar $V = A\Delta x$. A variação do volume ΔV está relacionada com a variação do deslocamento Δy das partículas contidas em V , ou seja, $\Delta V = A\Delta y$. Portanto, $\frac{\Delta V}{V} = \frac{A\Delta y}{A\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Dessa forma, teremos $y_{op} \sin(kx - \omega t) = -\rho v^2 \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Da equação (10.12) achamos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y_0 k \cos(kx - \omega t + 90^\circ) = -y_0 k \sin(kx - \omega t)$. Como $k = \omega/v$, encontramos que a relação entre a amplitude de pressão y_{op} e a amplitude de deslocamento y_0 é

$$y_{op} = y_0 \rho \omega v. \quad (10.13)$$

Exemplo: O módulo volumétrico da água doce é $(1/49) \times 10^{11}$ Pa; uma onda longitudinal de 262 Hz está se propagando na água. Determine:

- a velocidade dessa onda;
- o comprimento de onda.

Resolução: Como a densidade da água é 10^3 kg/m^3 :

- A velocidade da onda longitudinal será $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = [(1/49) \times 10^{11} \text{ Pa} / 10^3 \text{ kg/m}^3]^{1/2} = 1\,428,6 \text{ m/s}$.
- O comprimento de onda é $\lambda = v/f = (1\,428,6 \text{ m/s}) / (262 \text{ Hz}) = 5,45 \text{ m}$.

Exemplo: Uma onda longitudinal de 1 000 Hz, que se propaga no ar ($\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$) com velocidade de 340 m/s, incide sobre a membrana timpânica com uma intensidade de 10^{-12} W/m^2 . Calcule a amplitude da onda.

Resolução: Se a onda longitudinal é harmônica, $P = \mu \omega^2 y_0^2 v \cos^2(kx - \omega t)$; logo, a potência média será $\langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 v$. Sendo A_T a área da membrana timpânica, teremos, da definição de intensidade de uma onda,

$$I = \frac{1}{2} \frac{\mu}{A_T} \cdot \omega^2 y_0^2 v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 y_0^2 v = 2\pi^2 \rho v^2 y_0^2 v.$$

Logo, $y_0 = \sqrt{\frac{I}{2\pi^2 \rho v^2 v}} = 1,07 \times 10^{-11} \text{ m}$ é a amplitude máxima da onda de deslocamento.

Ondas estacionárias

Ondas estacionárias são ondas de amplitude variável e nós fixos. Essas ondas são superposições de ondas que avançam em uma mesma direção, mas em sentidos opostos, de tal maneira que sua *interferência* provoca a formação de uma configuração estacionária ou permanente de vibração.

♦ Vejamos o caso de ondas estacionárias *longitudinais* produzidas no interior de um tubo cujas *extremidades são abertas*. A Figura 10.8a mostra quatro formas ou *harmônicos* das ondas de deslocamento. Note que nos extremos do tubo temos os *máximos* dessas ondas. Se os harmônicos correspondem a ondas de variação de pressão, nos extremos do tubo teremos *nós ou intensidade nula* dessas ondas, tal como mostra a Figura 10.8b.

Esses modelos de ondas estacionárias são os mesmos que obtemos para as ondas estacionárias *transversais* produzidas em uma *corda com suas extremidades fixas*. Neste caso, as ondas têm a forma da Figura 10.8b.

A onda gerada por uma fonte localizada em um dos extremos do tubo ou da corda experimentará uma *interferência construtiva* com a onda que se reflete no outro extremo do tubo ou da corda. Esse processo continua até que seja atingida uma *amplitude máxima* para a onda resultante.

A fonte e o meio perturbado entram em *ressonância* quando a frequência v de vibração da fonte gera uma perturbação, cujo comprimento de onda λ é igual ao dobro do comprimento L do tubo ou da corda.

A onda da variação de pressão deve ser nula nos extremos do tubo ou $y_p = 0$. Isso equivale à condição física $p = p_0$ (pressão atmosférica). Portanto, $n\lambda/2 = L$ ($n = 1, 2, 3, \dots$); logo,

$$\lambda_n = 2L/n \quad (10.14)$$

são os comprimentos de onda dos diversos harmônicos que podem ser gerados. As frequências desses harmônicos satisfazem a condição $v_n = v/\lambda_n = nv/2L = nv_1$. A frequência $v_1 = v/2L$ é

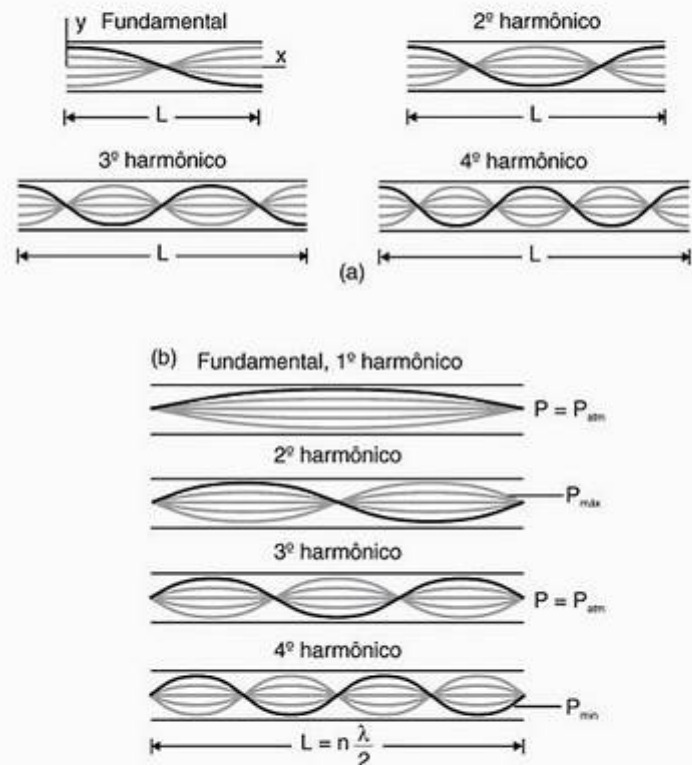


Figura 10.8 Ondas estacionárias em um tubo com extremidades abertas. São mostrados quatro harmônicos das ondas de: a) deslocamento; e b) variação de pressão.

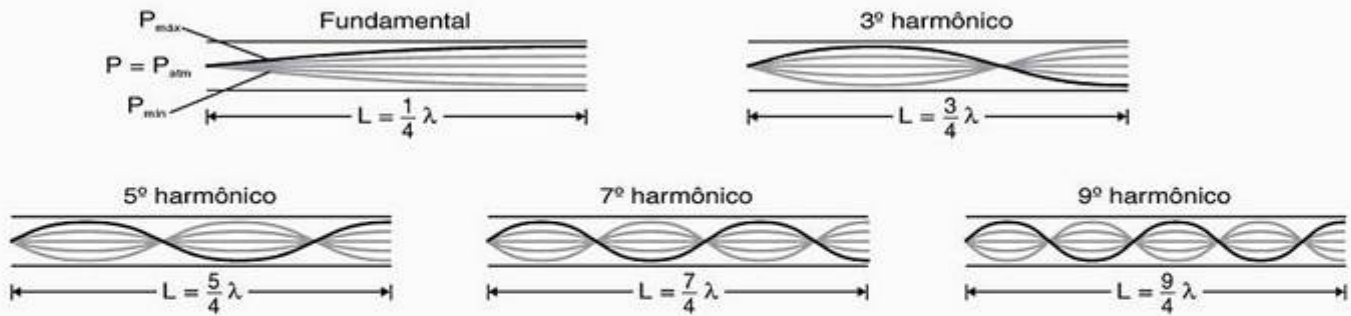


Figura 10.9 Ondas estacionárias em um tubo com uma extremidade aberta e outra fechada. São mostrados cinco harmônicos de ondas de pressão.

denominada *frequência fundamental*. Assim, ao vibrar o meio com uma das frequências naturais, ν_n absorverá energia da fonte externa até a amplitude da onda atingir um valor máximo.

♦ Vejamos agora o caso de ondas estacionárias *longitudinais* produzidas no interior de um tubo que tem *uma extremidade aberta e outra fechada*. Nesse caso, as ondas de variação de pressão têm a forma mostrada na Figura 10.9. Na extremidade aberta, a onda tem um nó, e, na extremidade fechada, a onda tem amplitude máxima. Esses modelos de ondas estacionárias são os mesmos que obtemos para as ondas estacionárias *transversais* produzidas em uma corda com *uma extremidade livre e outra fixa*. Nesse caso, a onda gerada pela fonte localizada no extremo aberto do tubo ou no extremo fixo da corda, ao ser refletida pela extremidade fechada do tubo ou pela extremidade livre da corda, *não é invertida*. Já a reflexão que acontece na fonte *inverte* a onda.

A onda estacionária da variação de pressão, no extremo fechado do tubo de comprimento L , deve ser *máxima*, enquanto, no extremo aberto, deve ser *nula*; ou seja, $n\lambda/4 = L$ ($n = 1, 3, 5, \dots$). Logo,

$$\lambda_n = 4L/n \quad (10.15)$$

são os comprimentos de onda dos diversos harmônicos que podem ser gerados. As frequências desses harmônicos satisfazem a condição $\nu_n = v/\lambda_n = nv/4L = n\nu_1$. A frequência $\nu_1 = v/4L$ é denominada *frequência fundamental*.

O caso da *ressonância* da perturbação longitudinal gerado por um *diapasão* que se propaga através de um tubo com água, que tem uma extremidade aberta e a outra fechada, corresponde à situação mostrada na Figura 10.10.

Nessa situação, teremos um *nó da onda de pressão* ou um *ventre da onda de deslocamento* na extremidade aberta do tubo. A condição de *ressonância* implica $L = n\lambda/4$, ou $v = v/\lambda = nv/4L$ ($n = 1, 3, 5, \dots$), sendo L o comprimento da coluna de ar no tubo.

Logo, conhecendo-se a frequência ν de vibração do diapasão e o comprimento L da coluna de ar necessária para que aconteça a ressonância, podemos determinar a velocidade v da onda longitudinal gerada.

Como a onda produzida é uma *onda sonora* que se propaga no ar, o método analisado serve para determinarmos sua velocidade nesse meio.

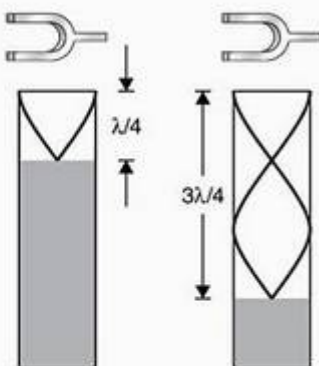


Figura 10.10 Os dois primeiros harmônicos de uma onda sonora no ar.

Exemplo: Uma corda de violão de 0,75 m de comprimento tem uma frequência fundamental de 440 Hz.

- Qual é a velocidade de uma onda que se propaga pela corda?
- Para produzir outras frequências, o comprimento efetivo da corda é encurtado, pressionando-a em um ponto debaixo do extremo da corda. Que comprimento é necessário para produzir-se uma frequência fundamental de 660 Hz?

Resolução: Esse é um caso de uma corda com seus extremos fixos. Logo, se L é o comprimento da corda, $v_n = nv/2L$. Para a frequência fundamental, temos $v = 2Lv_1$.

- A velocidade da onda será $v = 2 \times 0,75 \text{ m} \times 440 \text{ Hz} = 660 \text{ m/s}$.
- Se $v_1 = 660 \text{ Hz}$ e a velocidade da onda não muda, então o novo comprimento da corda é $L' = v/2v_1 = (660 \text{ m/s})/2 \times 660 \text{ Hz} = 0,5 \text{ m}$.

Exemplo: Para que valor de frequência o ouvido humano é mais sensível, se, em média, o ouvido externo tem um canal auditivo cujo comprimento é da ordem de 2,7 cm?

Resolução: Esse caso corresponde a um tubo de $L = 2,7 \text{ cm}$ com ar, uma extremidade aberta e a outra fechada. Como a onda sonora se propaga no ar a 340 m/s, a frequência fundamental é $v_1 = v/4L = (340 \text{ m/s})/(4 \times 2,7 \times 10^{-2} \text{ m}) = 3148 \text{ Hz}$. Esse valor corresponde à frequência para a qual o ouvido humano é mais sensível.

Exemplo: A velocidade do som no ar a 20°C é de 340 m/s.

- Qual o comprimento de onda de um som cuja frequência é 32 Hz e que corresponde à nota mais grave em um tubo de órgão de tamanho médio?
- Qual a frequência de uma onda cujo comprimento de onda é de 122 cm, correspondendo aproximadamente ao ré acima do dó médio no piano?

Resolução: Da relação fundamental entre a frequência e o comprimento de onda teremos:

- $\lambda = v/v = (340 \text{ m/s})/32 \text{ Hz} = 10,62 \text{ m}$;
- se $\lambda = 122 \text{ m}$, então, $v = v/\lambda = (340 \text{ m/s})/1,22 \text{ m} = 279 \text{ Hz}$.



10.3 O SOM

Som é a *sensação* produzida no ouvido humano por um trem de ondas que percorre um *meio elástico* e que satisfaz certas frequências e intensidade. *O som não é transmitido no vácuo.* Toda vez que experimentamos uma sensação sonora há:

- ♦ um movimento vibratório de um meio material, que pode ser sólido (corda), líquido (água) ou gasoso (ar);
- ♦ um meio material elástico entre o corpo vibrante e a orelha.

Os sons distinguem-se um do outro pelas seguintes qualidades fisiológicas:

- ♦ a *altura*, que está ligada unicamente à frequência da onda sonora;
- ♦ o *timbre*, que depende dos harmônicos associados ao som fundamental;
- ♦ e a *intensidade* fisiológica de um som, que está ligada à amplitude das vibrações.



Os *sons da voz humana* são ricos em harmônicos, mas sua amplitude decresce muito rapidamente quando sua frequência cresce. Os sons audíveis pelos humanos devem ter frequências entre 20 Hz e 20 000 Hz ou 20 kHz. Isso corresponde a ondas sonoras no ar de

$1,7 \text{ cm} < \lambda < 1,7 \text{ m}$, uma vez que a velocidade dessas ondas no ar é uma constante igual a 343 m/s.

Como as *ondas sonoras* são ondas mecânicas longitudinais, as equações (10.11) ou (10.12) dão sua representação matemática. As amplitudes da onda de variação da pressão y_p e da onda de deslocamento y , relacionadas pela equação (10.13), em função da impedância acústica do meio Z , definido como $Z = \rho v$, terão a relação

$$\blacktriangleright A_p = Z\omega A. \quad (10.16)$$

Para determinarmos a *intensidade* I de uma onda sonora, é necessário conhecermos sua densidade de energia η

$$\blacktriangleright \eta = \frac{\langle E \rangle}{\Delta V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta V} \cdot \omega^2 y^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 y^2 = \frac{1}{2} \frac{y_p^2}{\rho v^2}. \quad (10.17)$$

Logo, para uma onda sonora em um gás

$$\blacktriangleright I = \eta v = \frac{1}{2} Z \omega^2 y^2 = \frac{1}{2} y_p^2 / Z. \quad (10.18)$$

O *ouvido humano* pode perceber intensidades sonoras dentro da faixa de valores de 10^{-12} W/m^2 até 1 W/m^2 . Tomando $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$ para a densidade do ar e $v = 343 \text{ m/s}$ para a velocidade do som no ar, pela equação (10.18) podemos determinar que essas intensidades correspondem a amplitudes y_p da onda de variação da pressão de $2,87 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2$ até $28,7 \text{ N/m}^2$, respectivamente. Essas variações de pressão são pequeníssimas com relação ao valor normal, $p_0 = 1,01 \times 10^5 \text{ N/m}^2$.

As intensidades sonoras I também são quantificadas como um *nível de intensidade sonora* β , medido em decibéis (dB) e definido por

$$\blacktriangleright \beta = 10 \log(I/I_0), \quad (10.19)$$

$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ é uma intensidade sonora de referência. Com esse conceito de β , temos que:

- ♦ o *limiar de audição* corresponde a $I = 10^{-12}$ ou $\beta = 10 \log(1) = 0 \text{ dB}$;
- ♦ o *limiar doloroso* corresponde a $I = 1 \text{ W/m}^2$ ou $\beta = 10 \log 10^{12} = 120 \text{ dB}$.

Quando a intensidade sonora é $I > 1 \text{ W/m}^2$ ou $\beta > 120 \text{ dB}$, a *sensação no ouvido é dolorosa*. Portanto, para a *audição humana*, o nível de intensidade sonora (β), a intensidade da onda (I) ou a amplitude máxima da onda de variação da pressão (y_p) devem ter valores entre os respectivos intervalos:

$$0 \text{ dB} \leq \beta \leq 120 \text{ dB}$$

$$10^{-12} \text{ W/m}^2 \leq I \leq 10^0 \text{ W/m}^2$$

$$2,87 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2 \leq A_p \leq 28,7 \text{ N/m}^2$$

Exemplo: Uma onda sonora de um nível de intensidade de 80 dB incide sobre um tímpano de área $0,6 \text{ cm}^2$. Quanta energia absorve o tímpano em 3 minutos?

Resolução: Inicialmente, calcularemos a intensidade da onda. Da equação (10.19) temos $80 \text{ dB} = 10 \log(10^{12} I)$ ou $8 = 12 + \log I$. Logo, $I = 10^{-4} \text{ W/m}^2$.

Da equação (10.10), temos que a potência média da onda é

$$\langle P \rangle = 10^{-4} \text{ W/m}^2 \times 6 \times 10^{-5} \text{ m}^2 = 6 \times 10^{-9} \text{ W}.$$

A energia que absorverá o tímpano em 180 s é $E = \langle P \rangle \cdot t = 1,08 \times 10^{-6} \text{ J}$.

Exemplo: Uma onda sonora no ar ($\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$) tem um nível de intensidade de 120 dB. Determine:

- a) a amplitude da onda de variação de pressão;
- b) a força exercida sobre um tímpano de $0,55 \text{ cm}^2$ de área.

Resolução: A intensidade I da onda satisfaz a relação $120 \text{ dB} = 10 \log(10^{12} I)$ ou $12 = 12 + \log I$. Logo, $I = 1 \text{ W/m}^2$. Como a onda se propaga no ar, sua velocidade é 343 m/s .

a) Da equação (10.17) temos $y_p = (2\rho v I)^{1/2} = (2 \times 1,29 \times 343 \times 1)^{1/2} \text{ Pa} = 29,75 \text{ Pa}$.

b) A força sobre o tímpano devido a essa variação da pressão exercida pela onda é $F = y_p \times \text{área} = 29,75 \text{ Pa} \times 0,55 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 1,64 \times 10^{-3} \text{ N}$.

Efeito Doppler

Toda vez que temos um gerador de ondas, ou uma fonte e um receptor de ondas, com um movimento relativo entre eles, pode acontecer o seguinte:

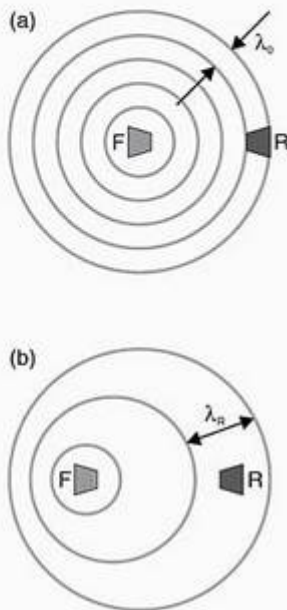


Figura 10.11 a) Frentes de onda de uma fonte pontual (F) em repouso com relação ao meio. b) Caso em que o meio está se movimentando com velocidade v_m no sentido da fonte ao receptor (R).

♦ Se a fonte estiver em *repouso* com relação ao receptor, e se o meio que transporta a onda *estiver em repouso* com relação a ambos, então a frequência ν_R da onda no receptor é a *mesma* que a frequência ν_0 da onda na fonte. Ou seja, $\nu_0 = \nu_R = v/\lambda_0$; onde v é a *velocidade da onda relativa ao meio* (veja a Figura 10.11a).

De fato se N é o número de ondas emitidas pela fonte em um tempo Δt , então $N = \nu_0 \Delta t$. Essas ondas estão contidas em um espaço $v \Delta t$. Logo, o comprimento de onda no receptor será

$$\lambda_R = \frac{v \Delta t}{N} = \frac{v \Delta t}{\nu_0 \Delta t} = \frac{v}{\nu_0} = \lambda_0,$$

e a frequência no receptor será

$$\nu_R = \frac{N}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{v \Delta t}{\lambda_R} = \frac{v}{\lambda_R} = \frac{v}{\lambda_0} = \nu_0.$$

♦ Se a fonte estiver em *repouso* com relação ao receptor, e se o meio em que se move a onda *não estiver em repouso* com relação a ambos, então, o comprimento λ_0 da onda emitida pela fonte *se modificará*. Admitindo que o meio esteja se movendo a uma velocidade v_m no sentido da fonte para o receptor (veja a Figura 10.11b), o comprimento da onda no receptor será

$$\lambda_R = \left(1 + \frac{v_m}{v}\right) \lambda_0.$$

O número de ondas emitidas pela fonte em um tempo Δt será $N = \nu_0 \Delta t$. Essas ondas estão contidas em um espaço $v' \Delta t$, onde $v' = v + v_m$ é a velocidade das ondas relativa à fonte ou ao receptor. Logo, o comprimento de onda no receptor será

$$\lambda_R = \frac{v' \Delta t}{N} = \frac{(v + v_m) \Delta t}{\nu_0 \Delta t} = \frac{v + v_m}{\nu_0} = \frac{v}{\nu_0} \left(1 + \frac{v_m}{v}\right) = \left(1 + \frac{v_m}{v}\right) \lambda_0;$$

e a frequência no receptor será

$$\nu_R = \frac{N}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{v' \Delta t}{\lambda_R} = \frac{v'}{\lambda_R} = \frac{v}{\lambda_0} = \nu_0.$$

♦ Se a fonte e o receptor estiverem *se aproximando ou se afastando* um do outro, a frequência ν_R da onda no receptor *não será a mesma* que a frequência ν_0 da onda na fonte. Esse fenômeno é denominado *efeito Doppler*.

* Se a fonte estiver se movendo com velocidade v_f com relação ao meio em que a velocidade da onda for v , então, no sentido do movimento da fonte, as frentes de onda estarão mais próximas. Logo, o receptor (R) detectará um som com *frequência ν' maior do que a frequência ν_0 da fonte em repouso*. De fato, como mostra a Figura 10.12, em um tempo Δt , o número de ondas emitidas pela fonte será $N = \nu_0 \Delta t$. Sendo $v \Delta t$ a distância que avança a primeira frente de ondas, e sendo $v_f \Delta t$ a distância coberta pela fonte no tempo Δt ; então, *na zona frontal à fonte*, N frentes de onda ocuparão uma distância $v \Delta t - v_f \Delta t = (v - v_f) \Delta t$. Logo, o comprimento da onda que passa por um ponto em repouso com relação ao meio será

$$\lambda' = \frac{(v - v_f) \Delta t}{\nu_0 \Delta t} = \frac{v - v_f}{\nu_0} = \frac{v}{\nu_0} \left(1 - \frac{v_f}{v}\right).$$

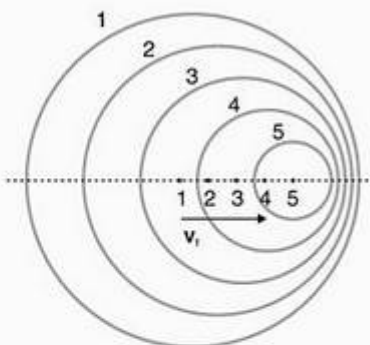


Figura 10.12 Frentes de ondas sucessivas emitidas por uma fonte que se move com velocidade v_f para a direita.

$$\blacktriangleright \quad \therefore \lambda' = \lambda_0 \left(1 - \frac{v_f}{v} \right) \quad \text{ou} \quad v' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v_0}{\left(1 - \frac{v_f}{v} \right)}. \quad (10.20)$$

Esta é a frequência em frente à fonte móvel, ou seja, quando a fonte se aproxima do receptor.

Na *zona posterior à fonte*, as frentes de ondas estão mais espaçadas. Logo, um receptor detectará ondas com

$$\blacktriangleright \quad \lambda'' = \lambda_0 \left(1 + \frac{v_f}{v} \right) \quad \text{ou} \quad v'' = \frac{v}{\lambda''} = \frac{v_0}{\left(1 + \frac{v_f}{v} \right)}. \quad (10.21)$$

Esta é a frequência quando a fonte está se afastando do receptor.

• Se a fonte (F) estiver em repouso, e o receptor (R) se mover com relação ao meio com velocidade v_r , *não haverá modificação* do comprimento de onda λ_0 . A frequência das ondas v' no receptor *aumentará*, caso este se mova em direção à fonte; e *diminuirá*, caso ele se afaste da fonte. De acordo com a Figura 10.13, se o receptor estiver estacionário, o número de ondas detectadas em um tempo Δt será $v\Delta t/\lambda_0$. Quando o receptor se mover na direção da fonte com velocidade v_r , o número adicional de ondas detectadas será $v_r\Delta t/\lambda_0$.

Portanto, o número total de ondas detectadas pelo receptor será $N = (v\Delta t + v_r\Delta t)/\lambda_0 = (v + v_r)\Delta t/\lambda_0$. Logo, a frequência v' com a qual se detecta as ondas será

$$\blacktriangleright \quad v' = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v_0}{\left(1 + \frac{v_r}{v} \right)}. \quad (10.22)$$

No caso em que o receptor se mover afastando-se da fonte, a frequência v'' com a qual se detecta as ondas será

$$\blacktriangleright \quad v'' = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v_0}{\left(1 - \frac{v_r}{v} \right)}. \quad (10.23)$$

Quando a fonte e o receptor se movem em relação ao meio, a velocidade da onda v é substituída por $v' = v \pm v_m$, onde v_m é a velocidade do meio.

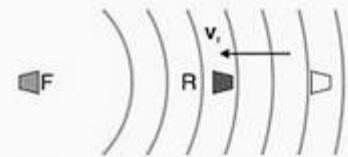


Figura 10.13 Receptor (R) movendo-se para a fonte (F) com velocidade v_r .

Exemplo: Um morcego que está voando a uma velocidade de 10 m/s, em direção a uma parede estacionária, emite um som ultra-sônico de 100 kHz.

- Calcule a frequência com que a onda incide na parede e o comprimento de onda na região frontal ao morcego.
- Uma vez que o som é refletido pela parede, esta atua como uma fonte de ondas, cuja frequência é a calculada em (a). Com que frequência o morcego ouve o som refletido pela parede?

Resolução:

- a) Nesse caso, a fonte é o morcego que emite ondas de $v_0 = 100$ kHz. A fonte se move a velocidade $v_f = 10$ m/s em relação ao meio. Logo, pela equação (10.20), a frequência dessas ondas na parede ou receptor é

$$v' = \frac{100}{\left(1 + \frac{10}{343}\right)} \text{ kHz} = 103 \text{ kHz}.$$

O comprimento dessa onda é

$$\lambda' = v/v' = (343 \text{ m/s})/103 \times 10^3 \text{ Hz} = 3,3 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

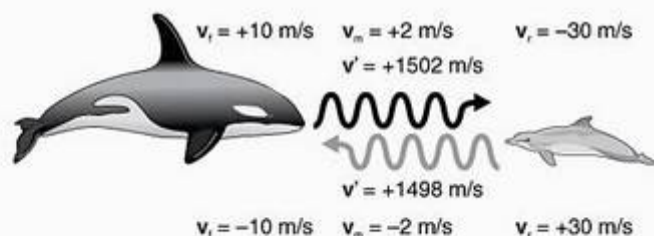
- b) Nesse caso, a fonte é a parede e emite ondas de $v_0 = 103$ kHz. O morcego é o receptor que se move a uma velocidade $v_r = 10$ m/s. Logo, pela equação (10.22), a frequência das ondas refletidas que chegam ao ouvido do morcego é

$$v' = 103 \left(1 + \frac{10}{343}\right) \text{ kHz} = 106 \text{ kHz}.$$

Comentário: a compensação do deslocamento Doppler, no sistema de detecção sonoro do morcego, foi amplamente analisada por Behrend⁽²⁾.

Exemplo: Uma baleia está se movimentando a uma velocidade de 10 m/s, no mesmo sentido que uma correnteza de 2 m/s. Simultaneamente, um golfinho se movimenta a 30 m/s em direção à baleia e sentido oposto à correnteza. A baleia emite um som de 9,74 kHz. Determine:

- a) Com que frequência o golfinho ouvirá esse som?
b) O golfinho responde com um som de frequência igual ao que ouviu. Com que frequência a baleia ouvirá esse som? (Considere que a velocidade do som na água do mar é 1500 m/s.)



Resolução: Este exercício pode ser resolvido de várias maneiras. Daremos uma resolução a partir das considerações da figura ao lado. A magnitude da velocidade da onda será 1502 m/s na situação (a) e 1498 m/s na situação (b). As magnitudes das velocidades da baleia e do golfinho serão 10 m/s e 30 m/s, respectivamente.

- a) A fonte (baleia) está se movendo a uma velocidade v_f em relação ao meio, onde a velocidade da onda é v' . Se o receptor (golfinho) estiver em repouso, ele detectará a onda emitida pela baleia com uma frequência dada pela equação (10.20)

$$v' = \frac{9,74}{\left(1 - \frac{10}{1502}\right)} \text{ kHz}.$$

Como o receptor está se acercando da fonte com velocidade v_r , o golfinho ouvirá o som emitido pela baleia com uma frequência dada pela equação (10.22)

$$v_r = v' \left(1 + \frac{30}{1502} \right) = \frac{9,74 \text{ kHz} \left(1 + \frac{30}{1502} \right)}{\left(1 - \frac{10}{1502} \right)} = 10 \text{ kHz.}$$

- b) A fonte (golfinho) está se movendo com velocidade 30 m/s em relação ao meio, onde a velocidade da onda é 1498 m/s. Se o receptor (baleia) estiver em repouso, ele detectará a onda emitida pela baleia, com uma frequência dada pela equação (10.20)

$$v' = \frac{10 \text{ kHz}}{\left(1 - \frac{30}{1498} \right)}$$

Como a baleia está se acercando da fonte a uma velocidade 10 m/s, a baleia ouvirá o som emitido pelo golfinho com uma frequência dada pela equação (10.22)

$$v_r = v' \left(1 + \frac{10}{1498} \right) = \frac{10 \text{ kHz} \left(1 + \frac{10}{1498} \right)}{\left(1 - \frac{10}{1498} \right)} = 10,27 \text{ kHz.}$$



10.4 BIOACÚSTICA

A bioacústica estuda o funcionamento do sistema auditivo dos mamíferos e dos humanos, ou seja, é a *análise e a percepção de sensações auditivas* cuja origem são os estímulos sonoros. Esses estímulos, cuja *origem física* são as ondas mecânicas, ao chegarem ao sistema auditivo terminam agindo sobre células ciliadas e seus nervos terminais, que codificarão o estímulo mecânico em potenciais de ação. De acordo com os estudos publicados até o presente, a ação de ouvir dos mamíferos é bastante similar à dos humanos. Logo, é comum comparar, discutir e estender os resultados de experiências acústicas com mamíferos para os humanos e para outras espécies animais^(3,4,5,6).

O ouvido humano

O ouvido humano é um órgão extremamente sensível, que converte um fraco estímulo mecânico, produzido em um meio externo, em *estímulos nervosos*. Na região de sua máxima sensibilidade, a pressão acústica que ele pode perceber é de um milibar; o que equivale a uma amplitude de deslocamento molecular da ordem de

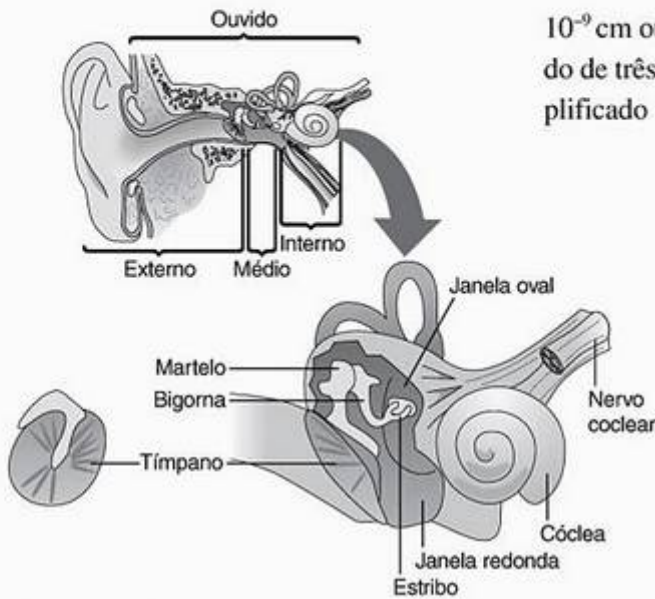


Figura 10.14 O ouvido humano dividido em ouvido externo, médio e interno.

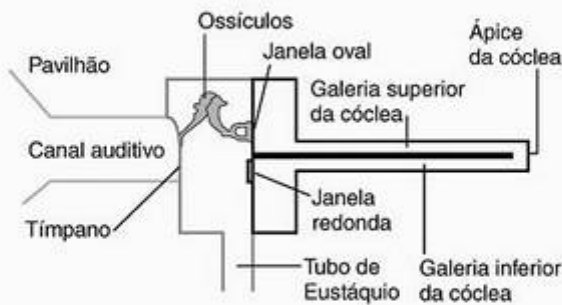


Figura 10.15 Esquema do ouvido humano.

10^{-9} cm ou $0,1 \text{ \AA}$. Como mostra a Figura 10.14, o ouvido é constituído de três partes: ouvido externo, médio e interno. Um esquema simplificado do ouvido é mostrado na Figura 10.15.

♦ **Ouvido externo:** parte do ouvido que está em contato com o meio externo. É nesta parte que *incide* o estímulo produzido por uma fonte sonora. Ele consiste de um canal auditivo e de um pavilhão externo, médio e interno. O canal tem aproximadamente 0,7 cm de diâmetro e 2,5 cm de comprimento e termina na *membrana timpânica*.

No humano, o pavilhão é pouco efetivo se comparado ao de alguns animais, onde essa parte produz um ganho apreciável para certos intervalos de frequência do som detectado^(7,8). Ondas sonoras de frequência entre 2 kHz a 6 kHz, após atravessar o canal auditivo, chegam ao tímpano com um ganho apreciável.

♦ **Ouvido médio:** A membrana timpânica é o início do ouvido médio. Essa é uma cavidade cheia de ar de aproximadamente 2 cm^3 de volume. Contém três pequenos ossos: *martelo*, *bigorna* e *estribo*. Esta cavidade é limitada internamente pelo promontório, onde se encontram as janelas oval e redonda. Em sua parte inferior está a abertura da trompa de Eustáquio. Em adultos, em média a área do tímpano e da janela oval é $A_t = 0,55 \text{ cm}^2$ e $A_{jo} = 0,032 \text{ cm}^2$, respectivamente. Se um estímulo sonoro exercer sobre o tímpano uma força F_t , o sistema de ossículos

dá um ganho a essa força de uma maneira tal que a força na janela oval será $F_{jo} \approx 1,3F_t$. Logo, as pressões experimentadas pela janela oval (P_{jo}) e o tímpano (P_t) satisfazem a relação $P_{jo} \approx 22P_t$.

♦ **Ouvido interno:** nesta parte do ouvido, a energia transportada pelo estímulo sonoro será convertida em um *sinal elétrico*, o qual será levado ao córtex auditivo. Sua estrutura contém a *cóclea*, cujas paredes limitam três tubos enrolados em espiral.

A cóclea constitui o labirinto anterior dessa parte do ouvido. Se a imaginarmos desenrolada, os três tubos cocleares têm disposição paralela. De acordo com as figuras 10.15 e 10.16a, a galeria superior da cóclea, ou *rampa vestibular*, comunica-se com o ouvido médio através da janela oval. A galeria média da cóclea, ou *canal coclear*, contém o órgão de Corti (Figura 10.16b). A galeria inferior da cóclea, ou *rampa timpânica*, se comunica com o ouvido médio através da janela redonda. Essas duas rampas se comunicam pelo helicotrema localizado no ápice da cóclea. Elas contêm *perilinf*a que, semelhante ao líquido extracelular, tem maior concentração de íons Na^+ .

O canal coclear contém *endolinfa* que, semelhante ao líquido intracelular, tem maior concentração de íons K^+ . A rampa vestibular está separada do canal coclear pela membrana vestibular de *Reissner*. O canal coclear é separado da rampa timpânica pela *membrana basilar*. Essa membrana vai se alargando a partir de sua base (0,04 mm) até o ápice (0,4 mm), aumentando, portanto, sua massa. Sobre o órgão de Corti está a *membrana tectorial*.

♦ **Órgão de Corti:** transforma uma oscilação mecânica no ouvido interno em um sinal que pode ser processado pelo sistema nervoso. Nesse órgão (veja a Figura 10.17) existe a *membrana tectorial*, que cobre os cílios das *células ciliadas* externas. Nos extremos inferiores dessas células encontram-se sinapses com neurônios que apresentam seus corpos celulares nos gânglios espirais de Corti, localizados na cóclea. Os axônios desses neurônios constituem o nervo coclear.

Transmissão e recepção das ondas sonoras pelo ouvido

O estímulo sonoro transmitido pelo sistema tímpano-ossicular através da janela oval penetra na perilinfa da rampa vestibular, como mostra a Figura 10.18. Em consequência, nessa região do ouvido interno irá se produzir um deslocamento simultâneo das membranas de Reissner e basilar e do canal coclear.

A membrana basilar constitui a estrutura receptora auditiva devido às células de sustentação e às células receptoras secundárias ciliadas contidas em toda a sua extensão. Dessa maneira, inicia-se uma oscilação na base da membrana basilar, que se propagará na direção do helicotrema. Essa oscilação é uma *onda viajante* (não é onda estacionária) que chega até uma certa posição da membrana. Essa posição é dependente da frequência da onda sonora. A *onda viajante* tem *amplitude variável*, sendo uma delas um máximo. A membrana basilar oscilará com a amplitude da onda viajante, e, na posição do máximo da amplitude, a membrana experimentará uma *ressonância*. Dependendo da frequência da onda sonora, a máxima deflexão da membrana basilar acon-

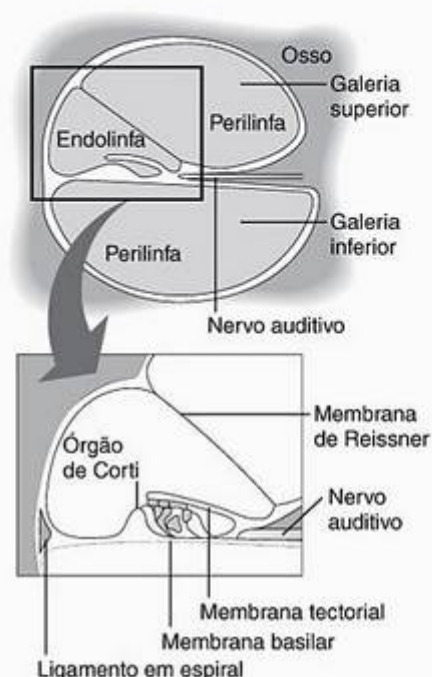


Figura 10.16 a) Seção transversal do canal coclear e sua parte óssea. b) Principais membranas do ouvido interno.

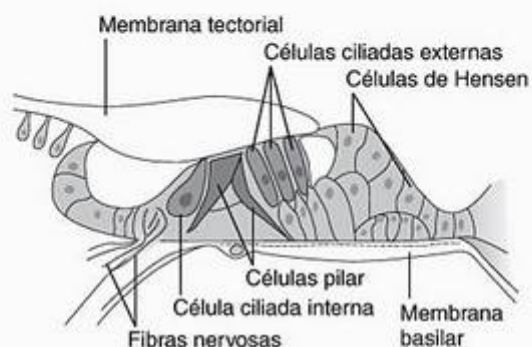


Figura 10.17 Esquema do órgão de Corti e a membrana tectorial.

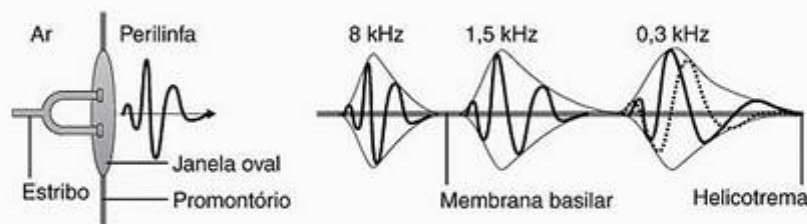


Figura 10.18 O estribo faz vibrar a janela oval produzindo-se uma onda viajante que, ao propagar-se pela perilinfa, produz a oscilação da membrana basilar.

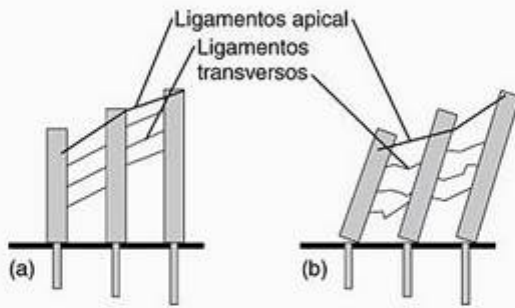


Figura 10.19 Esterocílios em estado de repouso (a) e de excitação (b).

tecera em diferentes regiões da membrana. Esse máximo é perto:

- ♦ da *janela oval* para frequências altas;
- ♦ e do *helicotrema* para frequências baixas.

Nas regiões de *máxima deflexão*, as células sensoriais são mais excitadas, ou seja, a inclinação que experimentarão os cílios das células ciliadas externas, devido à força exercida pela membrana tectorial, será máxima (como mostra a Figura 10.19). A inclinação dos cílios determinará a abertura dos *canais de potássio*. Logo, as células serão despolarizadas, dando origem aos *potenciais de ação*⁽⁹⁾.

Ondas de pressão na janela oval com amplitudes de alguns centésimos de N/m^2 produzem deflexões da membrana basilar da ordem de Angstroms.

Características da percepção auditiva

Como já mencionamos, as frequências audíveis estão no intervalo de 20 Hz a 20 kHz, aproximadamente. A sensibilidade do ouvido varia muito com a frequência v da onda sonora, criando-se, assim, um *campo de audibilidade*. Para o caso de um humano adulto, a forma desse campo é mostrada na Figura 10.20. Notamos que a sensibilidade cresce com v , exceto para valores de frequência correspondente ao limiar de audibilidade. Quando, em um valor de frequência audível, fazemos crescer a intensidade física de um som, constatamos que:

- ♦ a partir de um certo valor da pressão acústica, denominada *limiar de sensibilidade*, começamos a perceber som;
- ♦ além de um valor bem superior da pressão acústica denominada *limiar doloroso*, o som provoca uma sensação penosa e até mesmo insuportável.

Da análise da curva de audibilidade, concluímos que o ouvido:

- ♦ *não percebe* com a mesma intensidade sons de frequências diferentes;
- ♦ *é sensível* sobretudo a frequências médias (500 Hz a 5 000 Hz) visto que, para igual intensidade física, a intensidade fisiológica é a maior nesse intervalo (veja a Figura 10.21).

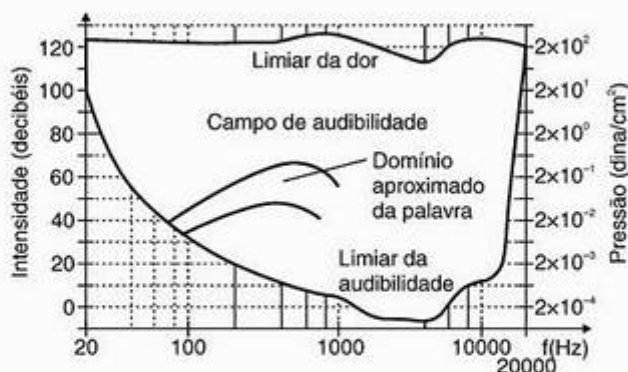


Figura 10.20 Gráfico do campo de audibilidade.

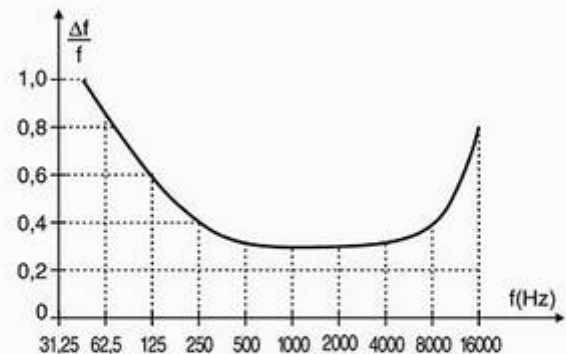


Figura 10.21 Gráfico da variação da percepção do campo de audibilidade.

- ♦ tem a *capacidade* de perceber vibrações que apresentam pequenas diferenças de frequências; isso acontece no denominado *limiar diferencial*;
- ♦ apresenta, para as frequências médias, limites bastante consideráveis entre as relações de pressões acústicas;
- ♦ é pouco sensível a sons com frequências que se situam nos extremos do campo de audibilidade.

As ondas acústicas podem produzir diversos efeitos no organismo de um humano⁽¹⁰⁾, como, por exemplo, sensação de mal-estar, vertigem e náusea. Isso se deve às minúsculas células capilares do ouvido interno que vibram. Essas ondas também podem fazer órgãos internos vibrarem, resultando em dores, espasmos ou até em morte.

A barreira do som

As ondas de pressão do ar viajam à velocidade do som, distanciando-se de um corpo em movimento como ondulações tridimensionais. Essa situação é denominada *subsônica*. Na Figura 10.22a mostramos o caso de um avião em voo.

À medida que o avião acelera, as ondas ficam cada vez mais próximas umas das outras. O ar à frente do avião fica comprimido. Tal situação é denominada *transônica*, como é o caso da Figura 10.22b.

Quando o avião atinge as ondas de pressão e bate contra a densa *barreira* de ar, causando ondas de choque, estamos na situação denominada *mach 1*. As ondas de choque em forma de *cone* dissipam-se no ar ao redor do avião, como é o caso mostrado na Figura 10.22c.

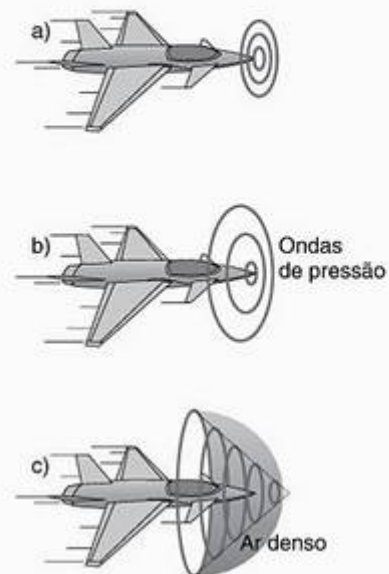


Figura 10.22 Ondas de pressão nos casos: a) subsônico; b) transônico; e c) mach 1.

Exemplo: A impedância acústica do ouvido médio é $4,5 \times 10^2 \text{ kg/s.m}^2$ e do ouvido interno é $5 \times 10^5 \text{ kg/s.m}^2$. Uma perturbação sonora de 20 dB de nível de intensidade é produzida pelo estribo sobre a janela oval de 3mm^2 de área. Se a janela oval produz oscilações de 300 Hz junto com seu quinto e décimo quinto harmônicos:

- a) Que força exerce o estribo sobre a janela oval?
- b) Quais serão as amplitudes máximas da membrana basilar devido a essas oscilações?
- c) Faça um diagrama da forma aproximada da membrana basilar quando em oscilação.

Resolução: Da equação (10.19) temos que a intensidade I desta perturbação satisfaz a relação $\log I + \log 10^{12} = 2$. Logo, $I = 10^{-10} \text{ W/m}^2$. A equação (10.18) diz que a amplitude da onda de variação de pressão é $y_p = (2IZ)^{1/2}$; dessa forma, sobre a janela oval, teremos

$$y_p = [2 \times 10^{-10} \text{ W/m}^2 \times 4,5 \times 10^2 \text{ kg/s.m}^2]^{1/2} = 3 \times 10^{-4} \text{ Pa}.$$

a) Essa variação de pressão exerce sobre a janela oval a força

$$f_{JO} = y_p \cdot A = 3 \times 10^{-4} \text{ Pa} \times 3 \times 10^{-6} \text{ m}^2 = 9 \times 10^{-10} \text{ N}.$$

b) Essa perturbação produz no ouvido interno uma oscilação cuja amplitude y_0 é dada pela equação (10.18)

$$y_0 = \sqrt{\frac{I}{2\pi^2 v^2 Z}} = \sqrt{\frac{10^{-10}}{2\pi^2 v^2 \times 5 \times 10^5}} = \frac{10^{-8}}{\pi v (\text{Hz})} \cdot \text{m}.$$

Para $v = 300 \text{ Hz}$, temos $y_1 = 0,11 \text{ \AA}$;

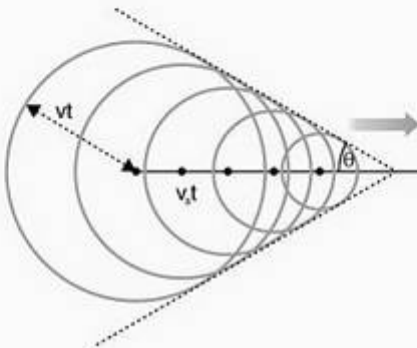
$v = 1\,500 \text{ Hz}$, temos $y_2 = 0,021 \text{ \AA}$;

$v = 7\,500 \text{ Hz}$, temos $y_3 = 0,0042 \text{ \AA}$.

c) Diagrama da membrana basilar:



Exemplo: Quando uma fonte sonora e o receptor movem-se no mesmo sentido com velocidades v_s e v_r , respectivamente, e a onda sonora tem uma velocidade v com relação ao meio de propagação, o *deslocamento Doppler* para o som é $v_r = v_s \left(\frac{v - v_r}{v - v_s} \right)$. Aqui, v_s e v_r são as frequências da fonte e o receptor, respectivamente. Discuta o caso em que $v_s \geq v$.



Resolução: Quando $v_s \geq v$, teremos um comprimento de onda $\lambda_r \leq 0$. Esse resultado não tem significado físico algum. Logo, podemos afirmar que a fórmula Doppler para o som não pode ser utilizada quando a fonte se move no sentido ao receptor com velocidade maior do que a velocidade do som. A situação $v_s \geq v$ dá origem a uma *onda de choque*. Essa onda é o resultado de um acúmulo de frentes de onda em um *cone*, como mostra a figura ao lado. O semi-ângulo θ do envoltório cônico é dado por $\sin\theta = v/v_s$.

A voz humana

A produção da fala é o resultado de um conjunto de processos que envolvem diversas partes do organismo. Essas partes, mostradas na Figura 10.23, além de estarem interconectadas, experimentam interações entre elas.

A fala é consequência do movimento reduzido, aumentado e não-coordenado dessas partes. A *respiração* proporciona a matéria-prima para a fala, resultando:

- ♦ na produção de um som que pode ser ouvido;
- ♦ no controle desse som, para produzir uma fonação concreta.

Durante a *fonação*, o ar da respiração produz a *vibração das cordas vocais* que, inicialmente, estão *fechadas* (veja a Figura 10.24); o que resulta em um som complexo. Entre os sons vocalizados, são produzidos *segmentos mudos* da corrente respiratória, que são emitidos entre as *cordas relaxadas*.

A frequência do som produzido pelas cordas vocais depende da tensão experimentada e de sua massa. A massa das cordas vocais do homem (m_h) é maior do que a da mulher (m_m). Logo, para uma tensão determinada, a frequência fundamental da voz do homem é menor do que a da mulher. Assim:

- ♦ no homem: $v_1 = 125 \text{ Hz}$; $v_2 = 250 \text{ Hz} = 2v_1$; $v_3 = 3v_1 \dots$;
- ♦ na mulher: $v_1 = 250 \text{ Hz}$; $v_2 = 500 \text{ Hz} = 2v_1$; $v_3 = 3v_1 \dots$.

A corrente respiratória resultante com componentes periódicos e não-periódicos deve ser modelada e modificada para produzir um *fonema concreto*. O mecanismo físico envolvido nesse processo aparece na Figura 10.25.

A produção de um fonema segue a seguinte ordem:

- ♦ o conjunto faringe e as cavidades oral e nasal formam uma *cavidade ressonante*, que reforça certos componentes do som. Se a cavidade nasal se junta a outras cavidades, teremos um *som nasal definido*;

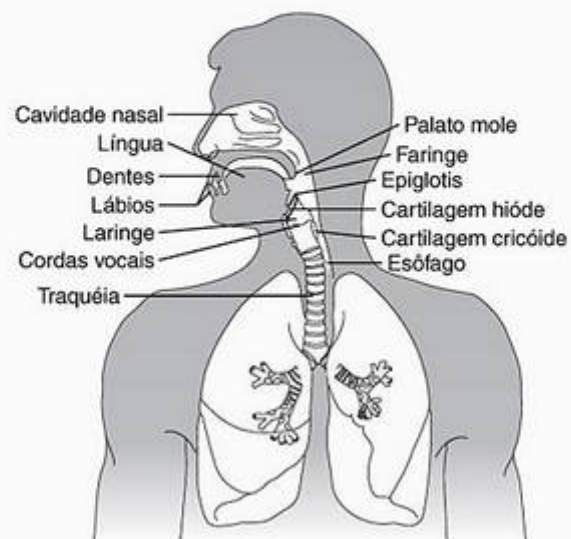


Figura 10.23 Componentes funcionais do mecanismo da fala.

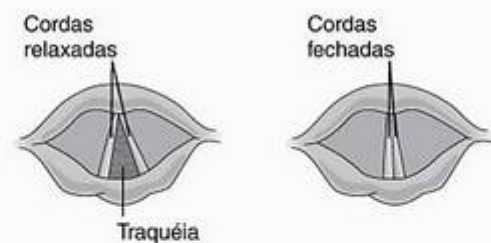


Figura 10.24 Funcionamento das cordas vocais.

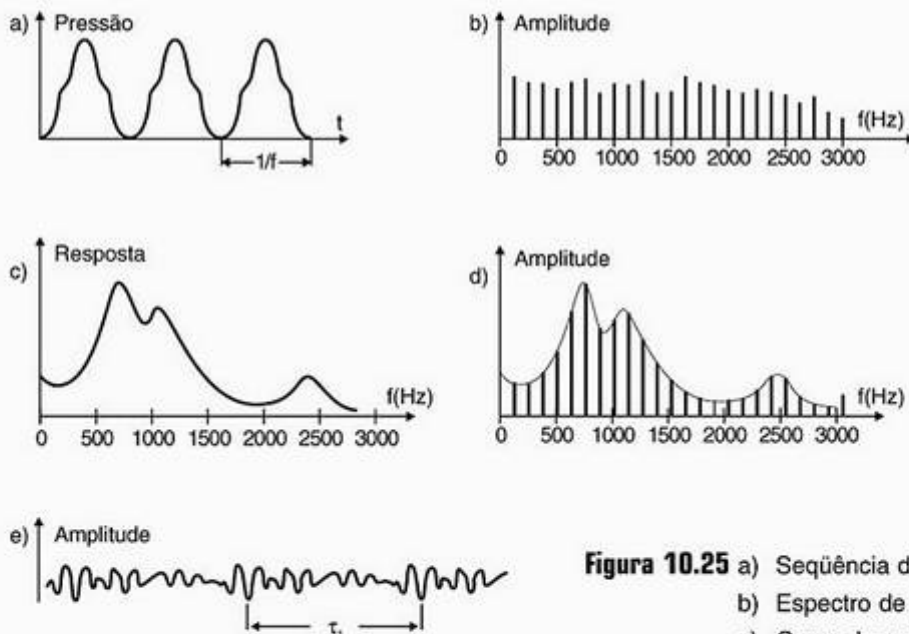


Figura 10.25 a) Sequência de pulsos produzidos pela laringe.
b) Espectro de pulsos periódicos.
c) Curva de resposta da boca e faringe.
d) Espectro após ressonância.
e) Onda sonora final.

- ♦ os músculos da parte superior da faringe e o palato mole iniciam, juntos, uma conexão e/ou desligamento com alterações na ressonância;
- ♦ a cavidade oral pode mudar as condições de ressonância para uma posição diferencial da língua e do maxilar inferior e por alterações na abertura dos lábios;
- ♦ a corrente respiratória passa a ser um *fonema concreto* por meio da impedância produzida pelos articuladores: língua, dentes e lábios. A Figura 10.26 mostra os fônicos utilizados ao pronunciarmos “ah”.

Os sons que seguem uma rápida seqüência agrupam-se em palavras; essas são unidas em frases a diferentes velocidades e com os ritmos característicos de um idioma. Podemos, assim dizer, que a produção da fala pode ser considerada como o resultado da influência de uma série de válvulas musculoesqueléticas sobre a corrente da respiração.

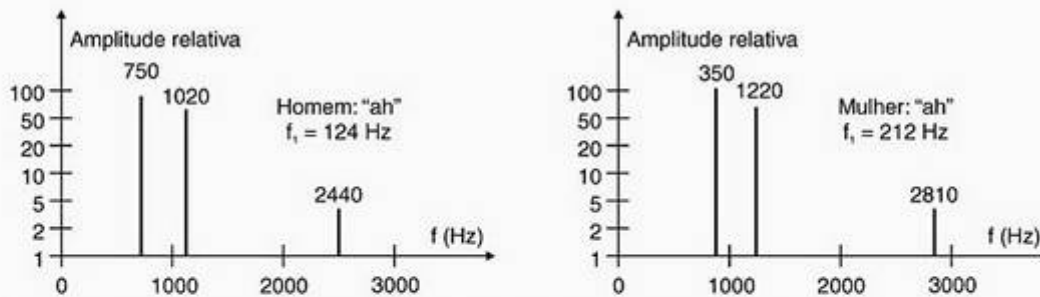


Figura 10.26 Amplitudes relativas dos primeiros três fônicos da pronúncia “ah”.

Exemplo: A frequência fundamental das cordas vocais de um homem é 125 Hz. Ao pronunciar o fonema *ah*, a primeira frequência formante da cavidade de sua fala é 730 Hz.

- Que harmônico é mais intensificado e por quê?
- Se o homem respirasse hélio (velocidade da onda sonora $\cong 987$ m/s), qual seria a primeira frequência formante?

Resolução:

- Como a frequência fundamental é $v_1 = 125$ Hz, então, $v_5 = 625$ Hz e $v_6 = 750$ Hz; assim, podemos dizer que o 6º harmônico será mais intensificado por ele estar mais perto do valor 730 Hz.
- A velocidade v da onda sonora é diretamente proporcional a sua frequência v . Logo, no hélio, a primeira frequência formante será

$$v_{He} = 730 \times 987/340 = 2\,119 \text{ Hz.}$$



10.5 ONDAS ULTRA-SÔNICAS

As ondas ultra-sônicas são ondas mecânicas longitudinais, cujas frequências estão fora do campo de audibilidade dos humanos. Se a frequência de vibração da onda sonora for:

- ♦ menor do que 20 Hz, as ondas são denominadas *infra-sônicas*;
- ♦ maior do que 20 000 Hz = 20 kHz, as ondas são denominadas *ultra-sônicas*.

As *propriedades físicas* das ondas acústicas infra-sônicas ou ultra-sônicas são as mesmas que as das ondas acústicas audíveis pelo humano. Assim, a descrição das interações físicas das ondas com a matéria é feita sem que se tente distinguir o tipo de onda acústica. As *ondas infra-sônicas* se manifestam pelas *oscilações de pressão* que elas provocam no meio em que estão se propagando. Já as *ondas ultra-sônicas* se manifestam por produzirem *alterações no meio em que estão se propagando*.

Muitos animais têm um campo de audição que inclui essas ondas acústicas⁽¹¹⁾, como, por exemplo:

- ♦ os cães podem ouvir frequências entre 15 Hz e 50 kHz;
- ♦ os gatos podem ouvir frequências entre 60 Hz e 65 kHz;
- ♦ os morcegos^(12,13,14) podem ouvir frequências entre 10 kHz e 120 kHz;
- ♦ os golfinhos podem ouvir frequências entre 10 kHz e 240 kHz etc.

Para a geração de ondas ultra-sônicas, utilizamos *transdutores*, que são mecanismos que convertem energia elétrica em energia mecânica. A Figura 10.27 mostra um *material piezelétrico*, ao qual aplicamos uma diferença de potencial. Se o campo elétrico no material for de uma frequência apropriada, serão induzidas vibrações mecânicas no interior do material, as quais darão origem às ondas ultra-sônicas.

Quanto menor for a espessura d do transdutor, maior será a frequência de vibração das moléculas do material. O efeito piezelétrico permite que o transdutor simultaneamente possa receber um eco ultra-sônico induzindo um sinal elétrico. Este sinal será processado e finalmente lido e interpretado.

A *intensidade* de uma onda ultra-sônica poderá ser:

- ♦ *baixa*, como é o caso das ondas utilizadas para obtermos informações de um meio;
- ♦ *alta*, como é o caso das ondas utilizadas em terapia médica ou para limpeza por cavitação. Essas ondas muito intensas caracterizam-se por produzir alterações no meio em que são aplicadas, como, por exemplo, a ruptura das células biológicas.

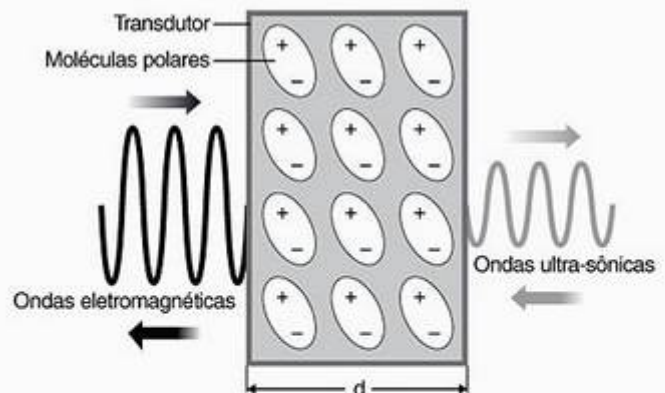


Figura 10.27 Cristal piezelétrico recebendo e emitindo energia elétrica. A espessura do transdutor varia, produzindo ondas ultra-sônicas com frequências diferentes.

Exemplo: Um transdutor gera uma onda ultra-sônica de 10^5 W/m^2 de intensidade.

- Qual é o nível de intensidade desta onda?
- Quanta energia incide sobre uma superfície de 1 cm^2 em 1 minuto?
- Qual é a amplitude da onda de variação de pressão?
- Se a onda se propagasse na água, mantendo a mesma amplitude de variação de pressão, qual seria agora sua intensidade?

Resolução:

- a) Utilizando a equação (10.19), achamos que o nível de intensidade dessa onda será $\beta = 10 \log(10^5/10^{-12}) = 170 \text{ dB}$. Esse valor, de acordo com a Figura 10.20, está acima do limiar da dor para o caso de um humano.

- b) Da equação (10.10), achamos que $\Delta E = I.A.\Delta t = (10^5 \text{ W/m}^2)(10^{-4} \text{ m}^2)(60 \text{ s}) = 600 \text{ J}$ é a energia que incide nessa superfície de 1 cm^2 .

- c) A amplitude da onda de variação de pressão é calculada a partir da equação (10.18)

$$y_p = [2I\rho_{\text{ar}}v_{\text{ar}}]^{1/2} = [2 \times 10^5 \text{ W/m}^2 \times 1,29 \text{ kg/m}^3 \times 340 \text{ m/s}]^{1/2} = 9,4 \times 10^3 \text{ Pa}.$$

Essa variação de pressão é aproximadamente equivalente a 0,093 atmosferas.

- d) Se a propagação da onda fosse na água, para esse valor de y_p , teríamos

$$I_{\text{água}} = y_p^2 / 2\rho_{\text{água}}v_{\text{água}} = \frac{(9,4 \times 10^3 \text{ Pa})^2}{2 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 1430 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 30,9 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Propriedades e algumas aplicações do ultra-som

Algumas propriedades físicas e formas de interação das *ondas ultra-sônicas* com a matéria são similares às das *ondas luminosas*, como é o caso da reflexão, refração, interferência, difração, espalhamento e absorção de energia. Com exceção da interferência, que pode aumentar ou diminuir a intensidade do feixe de ondas, as outras interações reduzem a intensidade do feixe, ou seja, a *onda é atenuada*.

Quando o ultra-som é utilizado para diagnóstico em medicina, geralmente é observada a reflexão dessas ondas na superfície que separa dois meios de impedâncias acústicas Z_1 e Z_2 diferentes⁽¹⁵⁾. A Figura 10.28 mostra as ondas refletida e transmitida quando uma onda incide normalmente em uma superfície que separa os meios. Algumas

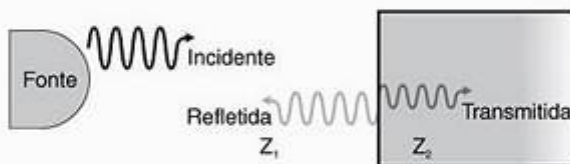


Figura 10.28 Reflexão e refração de uma onda ultra-sônica para uma incidência normal em uma superfície que separa dois meios de impedâncias acústicas Z_1 e Z_2 diferentes.

vezes, observamos o *deslocamento Doppler* produzido pelas partes de um meio que está em movimento.

Se a intensidade das ondas incidente, refletida e transmitida forem, respectivamente, I_0 , I_r e I_t , através de um cálculo laborioso, podemos encontrar a expressão explícita dos coeficientes de reflexão (R) e transmissão (T) da onda. Nesses cálculos, devemos ter em conta que a intensidade I da onda é proporcional ao quadrado da amplitude da onda (equação 10.18), e que a energia da onda se conserva, ou seja, $I_0 = I_r + I_t$. Podemos mostrar que, para uma *incidência normal*, teremos

$$\blacktriangleright \quad R = \frac{I_r}{I_0} = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad \text{e} \quad T = \frac{I_t}{I_0} = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}. \quad (10.24)$$

Z_1 e Z_2 são as impedâncias acústicas dos meios incidente e transmitido, respectivamente.

Se a diferença de impedâncias acústicas for pequena, a magnitude da onda refletida será pequena; enquanto, se essa diferença for apreciável, uma fração grande da onda será refletida. Como a transmissão e a recepção das ondas são feitas por um mesmo mecanismo, uma *deteção máxima* do eco refletido acontecerá se a onda tiver *incidência normal* na interface que separa os dois meios.

Exemplo: Considere as interfaces que separam os meios tecido-osso-tecido-ar. Se as impedâncias acústicas do tecido, do osso e do ar forem, respectivamente, $Z_t = 1,63 \times 10^6 \text{ kg/s.m}^2$; $Z_o = 7,8 \times 10^6 \text{ kg/s.m}^2$ e $Z_a = 4 \times 10^2 \text{ kg/s.m}^2$, determine os coeficientes de reflexão e transmissão em cada interface para uma incidência normal.

Resolução: Utilizando a equação (10.24), para determinar esses coeficientes em cada interface, de acordo com o esquema mostrado a seguir, encontramos:

♦ Para a interface tecido-osso:

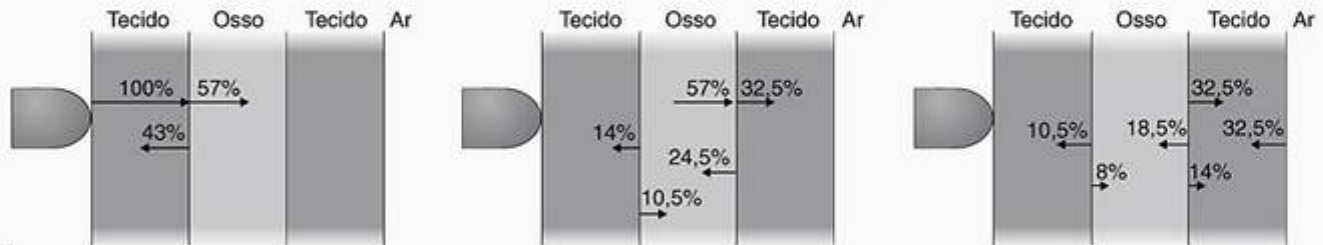
$$R_{to} = \frac{(Z_t - Z_o)^2}{(Z_t + Z_o)^2} = \frac{(-6,17)^2}{(9,43)^2} = 0,43 \text{ ou } 43\% \text{ e}$$

$$T_{to} = \frac{4Z_oZ_t}{(Z_t + Z_o)^2} = \frac{4 \times 1,63 \times 7,8}{(9,43)^2} = 0,572 \text{ ou } 57\%.$$

Procedendo de forma semelhante para o cálculo de R e T nas outras interfaces, temos:

- ♦ Para a interface osso-tecido: $R_{ot} = 43\%$ de $57\% = 24,5\%$ e $T_{ot} = 57\%$ de $57\% = 32,5\%$. O eco que volta à fonte terá um coeficiente $T'_{ot} = 57\%$ de $24,5\% = 14\%$.
- ♦ Para a interface tecido-ar: $R_{ta} = 100\%$ de $32,5\% = 32,5\%$ é transmitido ao meio osso $T'_{to} = 57\%$ de $32,5\% = 18,5\%$. O eco que volta à fonte será $T''_{ot} = 57\%$ de $18,5\% = 10,5\%$.

O esquema a seguir mostra a distribuição desses percentuais de energia.



Exemplo: Considere as interfaces que separam os meios músculo-gordura-músculo-ar. Se as impedâncias acústicas do músculo e da gordura são, respectivamente, $Z_m = 1,7 \times 10^6 \text{ kg/s-m}^2$ e $Z_g = 1,38 \times 10^6 \text{ kg/s-m}^2$, determine os coeficientes de reflexão e transmissão em cada interface para uma incidência normal.

Resolução: Utilizamos a equação (10.24) e procedemos de forma similar ao exemplo anterior. De acordo com o esquema mostrado a seguir, encontramos:

♦ Para a interface músculo-gordura:

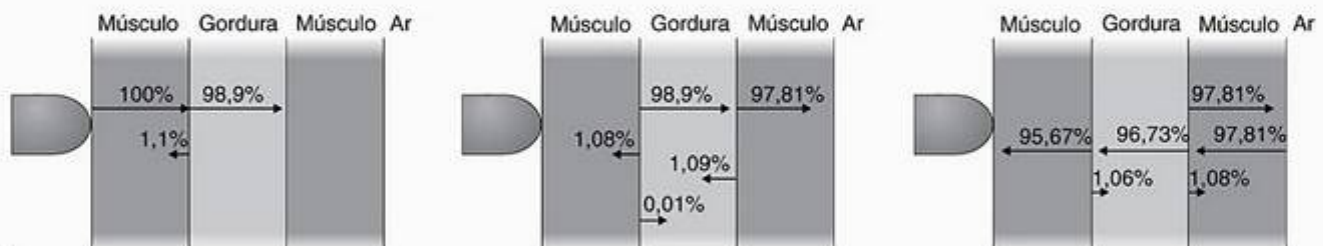
$$R_{mg} = \frac{(Z_m - Z_g)^2}{(Z_m + Z_g)^2} = \frac{(0,32)^2}{(3,08)^2} = 0,011 \text{ ou } 1,1\% \text{ e}$$

$$T_{mg} = \frac{4Z_m Z_g}{(Z_m + Z_g)^2} = \frac{4 \times 1,7 \times 1,38}{(3,08)^2} = 0,989 \text{ ou } 98,9\%.$$

♦ Para a interface gordura-músculo: $R_{gm} = 1,1\%$ de $98,9\% = 1,09\%$ e $T_{gm} = 98,9\%$ de $98,9\% = 97,81\%$. O eco que volta à fonte terá um coeficiente $T'_{gm} = 98,9\%$ de $1,09\% = 1,08\%$.

♦ Para a interface músculo-ar: $R_{ma} = 100\%$ de $97,81\% = 97,81\%$ é transmitido ao meio gordura $T'_{mg} = 98,9\%$ de $97,81\% = 96,73\%$. O eco que volta à fonte será $T''_{gm} = 98,9\%$ de $96,73\% = 95,67\%$.

O esquema a seguir mostra a distribuição desses percentuais de energia.



À exceção da reflexão, todas as interações que diminuem a intensidade de um feixe que incide em um material absorvedor são incluídas nos *processos de atenuação*. Na Figura 10.29 mostramos uma onda ultra-sônica de intensidade I_0 que incide sobre um meio absorvedor de espessura Δx . Se o coeficiente de atenuação do material for α , a intensidade da onda transmitida I , quando α se mantém constante, obedecerá à lei

$$I = I_0 \exp(-2\alpha x). \quad (10.25)$$

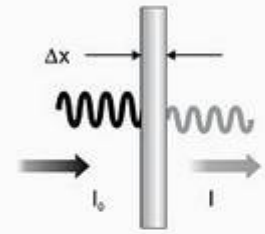


Figura 10.29 Meio absorvedor de coeficiente de atenuação α , atenuando uma onda ultra-sônica de intensidade I_0 .

Exemplo: O coeficiente de atenuação do osso é $1,2 \text{ cm}^{-1}$. Um feixe ultra-sônico de 1 MHz incide normalmente na superfície do osso. Para qual espessura do osso ocorrerão 90% de atenuação desse feixe?

Resolução: Como 90% do feixe incidente foi atenuado, a intensidade I do feixe transmitido é $0,1 I_0$. Logo, da equação (10.25), teremos $0,1 = \exp(-2,4\Delta x)$; portanto, $\Delta x = 0,96 \text{ cm}$.



10.6 ECOLOCALIZAÇÃO

A ecolocalização descreve um sistema de auto-informação, no qual um mesmo animal possui um órgão para *emitir* um sinal acústico e outro órgão para *receber* sinais que podem ser o eco do sinal emitido. A energia utilizada para se obter informações é gerada pelo próprio animal. Animais que têm a capacidade de captar o sinal refletido por um obstáculo de uma onda emitida por ele podem avaliar a distância do obstáculo. Se o sinal emitido varrer um certo setor, o animal poderá diferenciar o contorno de um obstáculo nesse setor. A Figura 10.30 mostra essa característica no caso de um morcego.

As características principais dos animais com capacidade de *ecolocalização* são:

- ♦ eles possuem um mecanismo evoluído para gerar sons (morcegos, cetáceos e pássaros);
- ♦ eles possuem uma grande extensão espacial para suas atividades (nadadores e voadores);
- ♦ eles consomem sua atividade diária em mais ou menos completa escuridão.

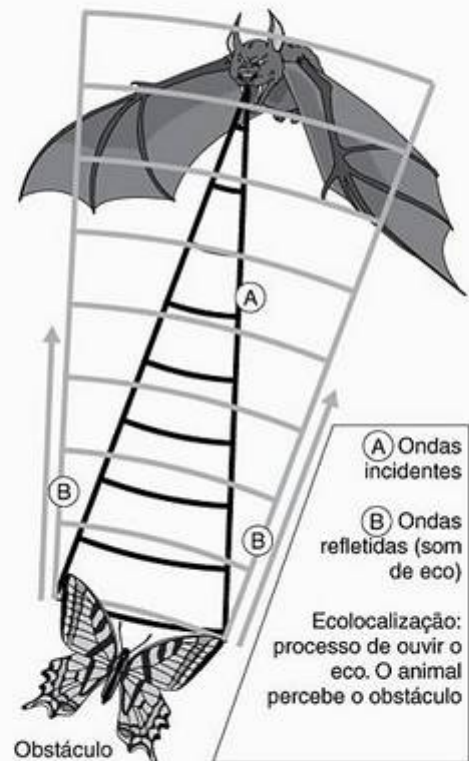


Figura 10.30 Morcego emitindo ondas ultra-sônicas.

A *ecolocalização* foi estudada detalhadamente em diversas espécies de morcegos⁽¹⁶⁾. Observamos que os sinais emitidos por esses animais são em forma de *pulsos ultra-sônicos ou estalidos*, de duração variável. No caso do *Myotis lucifugus*, a duração de um pulso varia de 1 ms a 5 ms.

Normalmente, quando o morcego está em *repouso*, ele emite poucos estalidos. Ao *preparar-se para voar*, o morcego emite em torno de 20 estalidos por segundo. Quando o animal *está voando*, a duração dos pulsos muda constantemente; e ela dependerá se o animal estiver voando para se alimentar ou se ele estiver passando perto de obstáculos pequenos ou perto do solo.

A Figura 10.31 mostra essa sequência quando um morcego vai se alimentar. Cada estalido emitido é acompanhado de um fraco som audível. Durante a emissão acelerada, esses sons fracos são mais frequentes, produzindo um débil zumbido.

Observamos que a intensidade dos pulsos emitidos por um morcego não é uniforme em todas as direções. Há um máximo na direção frontal ao animal. A Figura 10.32 mostra alguns espectros ultra-sônicos emitidos por uma espécie de morcego ao capturar seu alimento.

A fonte emissora dos sinais ultra-sônicos desses animais está localizada em seu *trato respiratório*⁽¹⁷⁾. Estudos anatômicos de morcegos têm mostrado que esses animais apresentam uma *laringe* muito grande, com estrutura altamente especializada. Com relação aos *ouvidos*, a fonte de detecção dos ecos ultra-sônicos, esses apresentam uma sensibilidade muito apurada, capazes de identificar os ecos das ondas emitidas por outros obstáculos em sua vizinhança, que, freqüentemente, são da mesma intensidade. A maioria das espécies de morcegos fica totalmente desorientada quando seus ouvidos são vedados ou fechados.

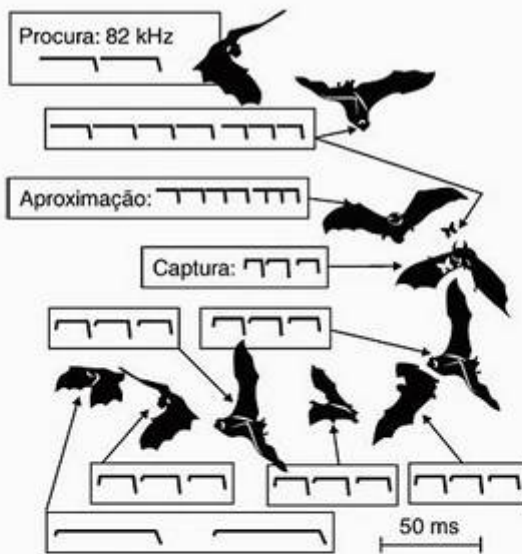


Figura 10.31 Morcego seguindo uma trajetória em forma de ferradura, utilizando a ecolocalização para alimentar-se. No instante em que ele alcança seu alimento, não é emitido nenhum som.

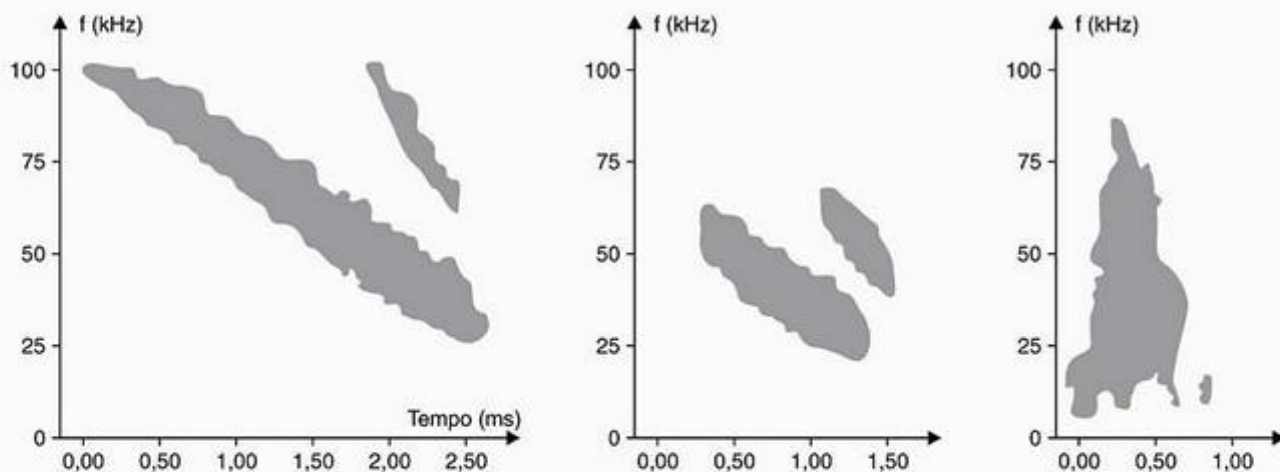


Figura 10.32 Sons de ecolocalização emitidos pelo morcego *Myotis myotis* nas fases em que ele procura, se aproxima e captura seu alimento, respectivamente.

À semelhança do ouvido humano, o pavilhão do ouvido externo desses animais serve para *focalizar o som*. Essa focalização varia com a frequência dos pulsos detectados. No ouvido interno, o órgão coclear dos morcegos é similar ao dos outros mamíferos⁽¹⁸⁾, com as seguintes importantes diferenças:

- ♦ a parte da cóclea próxima do ouvido médio, que é excitada por ondas de altas frequências, é *mais desenvolvida do que em outros mamíferos*⁽¹⁹⁾;
- ♦ a *janela redonda* está em contato com o fluido do ouvido interno de forma diferente dos outros mamíferos, ou seja, ela não está situada no extremo da cóclea, e sim *1 mm depois de sua 1ª espira*;
- ♦ nos mamíferos, a *base da membrana basilar* é menos larga e fracamente rígida. No caso dos morcegos, ela é mais grossa do que a parte aparentemente livre para vibrar em resposta aos sons de frequências mais baixas do que o normal.

Os morcegos, em geral, possuem um cérebro especializado relacionado com seu modo de vida. Em particular, a área da audição é altamente desenvolvida.

Outras espécies de animais também possuem *ecolocalização*, como, por exemplo:

- ♦ os vertebrados aquáticos, como os golfinhos e as baleias, apresentam um alto grau de desenvolvimento da ecolocalização. Como o som se propaga na água a 1 500 m/s, pelo sistema de ecolocalização, em 2 s, uma baleia pode *ver* objetos situados a 1 500 m de distância. Em geral, os odontocetáceos possuem sistema de ecolocalização. Na Figura 10.33, mostramos a ecolocalização de um golfinho no interior do oceano;

- ♦ os pássaros, como o *Steatornis caripensis*, que emite estalidos de 6,1 kHz a 8,75 kHz, e o *Collocalia brevirostris unicolor*, que emite estalidos de 3 kHz a 4 kHz. Essas duas espécies de pássaros se orientam utilizando também a visão, à semelhança da espécie de morcego *Rousettus*;

- ♦ os mamíferos, como o porco da Guiné (*Cavia cobaya*), emitem pulsos de até 54 kHz. O *Rattus norvegicus* emite pulsos de 19 kHz até 29 kHz, e seu som de bufar chega até os 80 kHz;

- ♦ os insetos, como o *Prodenio* e *Gyrinus*, emitem pulsos ultra-sônicos, mas desconhecemos se eles têm poder de ecolocalização.

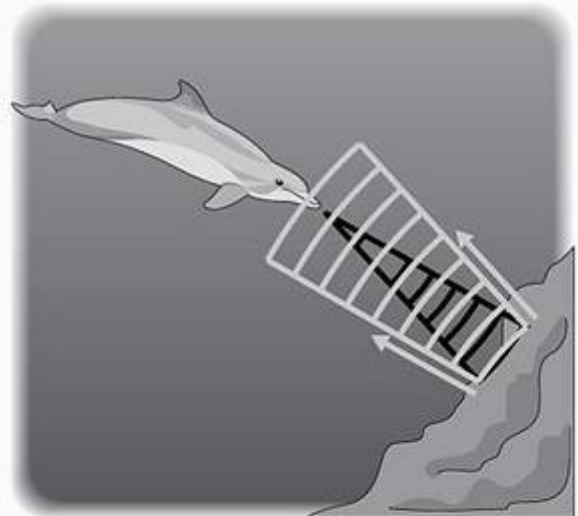


Figura 10.33 O golfinho, ao se aproximar de obstáculos, perceberá a posição desses obstáculos, emitindo e recebendo sons.

Exemplo: Um *morcego*, quando *procura* seu alimento, emite ondas ultra-sônicas de 10^4 W/m^2 , e, quando *captura* seu alimento, a intensidade da onda é reduzida a $5 \times 10^3 \text{ W/m}^2$.

- Qual é o nível de intensidade dessas ondas?
- Se a fase de *procura* durar 2,5 s e a fase de *captura* durar 0,5 s, quanta energia recebeu a *traça* (seu alimento) em cada fase?
- Qual é a amplitude da variação de pressão destas ondas?
- Se, em lugar do *morcego*, considerarmos um *golfinho* emitindo as mesmas ondas, sendo o seu alimento um peixe, qual será a intensidade dessas ondas ultra-sônicas, que têm a mesma amplitude de variação de pressão calculada em (c)?

Resolução:

- O nível de intensidade das ondas é determinado a partir da equação (10.19). Assim, para a fase de *procura* $\beta_p = 10 \log(10^4 \times 10^{12}) \text{ dB} = 160 \text{ dB}$ e para a fase de *captura* $\beta_c = 10 \log(5 \times 10^3 \times 10^{12}) \text{ dB} = 157 \text{ dB}$.
- A energia por unidade de área emitida pelo morcego na fase de *procura* é $\Delta E_p = (10^4 \text{ W/m}^2)(2,5 \text{ s}) = 2,5 \times 10^8 \text{ J/cm}^2$. Na fase de *captura*, ela será $\Delta E_c = (5 \times 10^3 \text{ W/m}^2)(0,5 \text{ s}) = 2,5 \times 10^7 \text{ J/cm}^2$.
- Da equação (10.18), temos $y_p = (2\rho_{ar}v_{ar}I)^{1/2}$; logo, para as ondas emitidas na fase de *procura*, teremos $y_{pp} = [2 \times 1,3 \times 344 \times 10^4]^{1/2} = 2\,991 \text{ Pa}$. Para a fase de *captura*, teremos $y_{pc} = [2 \times 1,3 \times 344 \times 5 \times 10^3]^{1/2} = 2\,115 \text{ Pa}$.
- Como o golfinho se desloca na água salgada ($\rho = 1,03 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$) e a velocidade da onda neste meio é $1\,478 \text{ m/s}$, pela equação (10.18), teremos que, na fase de *procura* $I_p = y_{pp}^2/2\rho v = (2\,991)^2/2 \times 1,03 \times 10^3 \times 1\,478 \text{ W/m}^2 = 2,94 \text{ W/m}^2$. Para a fase de *captura*, teremos $I_c = y_{pc}^2/2\rho v = (2\,115)^2/2 \times 1,03 \times 10^3 \times 1\,478 \text{ W/m}^2 = 1,47 \text{ W/m}^2$.

Concluindo, podemos dizer que existem classes diferentes de animais (ocasionalmente incluídos os humanos) que ouvem ruídos diretamente ligados a uma atividade normal, como caminhar, nadar, correr, espirrar etc.; e animais que ouvem sons especialmente emitidos para ecolocalização: morcegos, cetáceos e pássaros. Esses sons não são normalmente usados ou ligados a outras atividades.

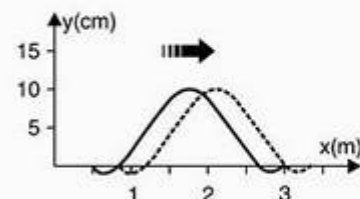


PROBLEMAS

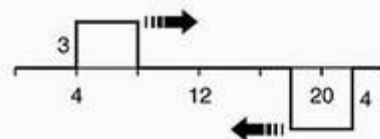
1. A figura ao lado mostra um pulso em uma corda nos instantes $t = 0$ e $t = 0,2$ s.

Determine:

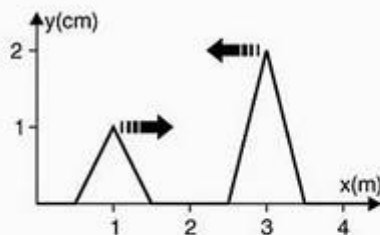
- a velocidade do pulso;
- a velocidade vertical do ponto P durante esse intervalo;
- a posição do pico no instante $t = 3,0$ s;
- o tempo que levará o pico do pulso para atingir a posição de 4 metros.



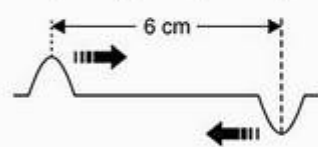
2. Dois pulsos se propagam em uma corda com velocidade de 1 m/s, e em sentidos opostos. No instante $t = 0$, os pulsos estão mostrados na figura ao lado. Faça o gráfico da configuração da corda nos instantes: $t = 4$ ms, 5 ms, 6 ms, 7 ms, 8 ms e 9 ms.



3. Dois pulsos se propagam em uma corda com velocidade de 0,5 m/s, e em sentidos opostos. No instante $t = 0$, os pulsos estão mostrados na figura ao lado. Faça o gráfico da configuração da corda nos instantes: $t = 1$ s, 2 s e 3 s.

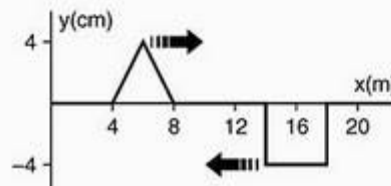


4. Dois pulsos se propagam em uma corda, com velocidade de 2,0 m/s, e em sentidos opostos, como mostra a figura ao lado. Os pulsos estão inicialmente separados 6,0 cm.

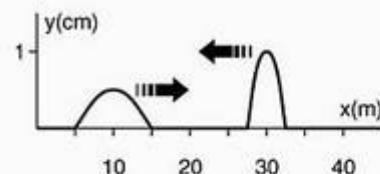


- Em que instante o deslocamento efetivo se anula?
- Um deslocamento nulo implica uma energia cinética nula? Explique.

5. Um pulso triangular e um quadrado se propagam ao longo de uma corda em sentidos opostos. A velocidade dos pulsos é de 2 cm/s, e a configuração inicial da corda está mostrada na figura ao lado. Determine a configuração da corda após 1,5 s; 2 s; 2,5 s; e 3 s.

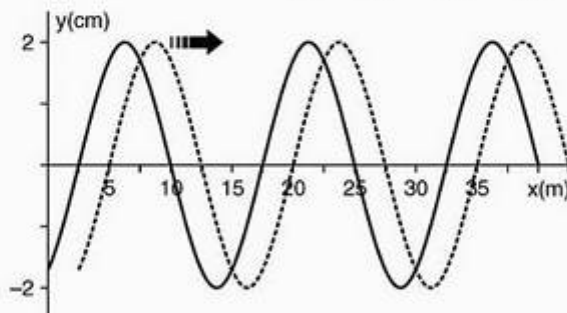


6. A figura ao lado mostra dois pulsos sobre uma corda no instante $t = 0$. A velocidade de cada pulso é de 40 cm/s. Desenhe a forma da corda nos instantes $t = 0,15$ s; 0,25 s; e 0,3 s.



7. A figura ao lado mostra uma onda senoidal propagando-se em uma corda; a curva sólida representa a forma da corda no instante $t = 0$, a curva tracejada representa a forma da corda no instante $t = 0,1$ s. Determine:

- a amplitude;
- o comprimento de onda;
- a velocidade;
- a frequência;
- o período da onda.



8. Em $t = 0$, a equação de uma onda senoidal é $y = 0,2 \sin(0,5\pi x)$. Onde y e x são dados em cm. Para essa onda, calcule:
 - a) a amplitude;
 - b) o comprimento de onda;
 - c) o deslocamento para $x = 0,50$ cm;
 - d) desenhe essa onda no intervalo de 0 cm a 2 cm;
 - e) se essa onda se deslocar para a direita com velocidade de 50 cm/s, calcule seu deslocamento vertical para $x = 0,66$ cm no instante $t = 6,6$ ms;
 - f) repita o item (e) para $t = 40$ ms e $x = 0,5$ cm.
9. Escreva a equação de uma onda senoidal cuja amplitude é 0,12 m, e o seu comprimento de onda é 30 cm.
10. Uma onda progressiva *transversal* em uma corda longa é descrita pela equação $y = 10\sin[\pi x/2 - \pi t]$. Sendo y dado em centímetros, x em metros e t em segundos. Desenhe a configuração da corda até $x = 4$ m para os instantes $\tau = 0, \tau/4, \tau/2, 3\tau/4$ e $t = \tau$. Determine a amplitude, a velocidade, o período (τ) e a frequência da onda.
11. O espectro de uma onda periódica contém as seguintes frequências: 12 Hz, 24 Hz, 48 Hz e 96 Hz. Quais as harmônicas intermediários que faltam?
12. A equação $y = A\sin(kx - \omega t)$ pode representar tanto uma onda progressiva *longitudinal* quanto uma onda progressiva *transversal*. Diga o significado de cada uma das variáveis x e y para cada um desses tipos de ondas.
13. Uma onda *transversal* se propaga em uma corda vibrante. O deslocamento y é dado por $y = 2 \sin(3x - 4t)$. Onde y e x são dados em cm e t em s. Determine a expressão da velocidade u de uma partícula da corda em função de x e de t .
14. Uma corda de guitarra tem uma densidade linear $\mu = 3,2 \times 10^{-3}$ Kg/m. Qual a velocidade das ondas *transversais* na corda quando esta é tencionada em 90 N?
15. Uma corda de 1,5 m de comprimento está fixa em ambas as extremidades. Sua densidade linear é 1,2 g/m.
 - a) Se a corda tem uma tensão de 12 N, qual é a frequência fundamental?
 - b) Que tensão é necessária, se o terceiro harmônico terá uma frequência de 500 Hz?
16. Duas ondas estacionárias possuem a mesma amplitude, comprimento de onda e velocidade de propagação. Qual deve ser a diferença de fase para que ocorram:
 - a) a interferência destrutiva;
 - b) a interferência construtiva.
17. A frequência mais baixa de um piano é 27,5 Hz. A corda do piano tem 2 m de comprimento e uma tensão de 300 N. Qual é a massa total da corda?
18. Uma corda de densidade linear 0,25 kg/m é esticada com uma tensão de 25 N. Uma das extremidades move-se seguindo uma variação senoidal com uma frequência de 5 Hz e amplitude de 0,01 m. Em $t = 0$, a extremidade tem um deslocamento zero e move-se na direção $+x$.

- a) Ache: velocidade, amplitude, frequência angular, período, comprimento de onda e número de onda.
 - b) Escreva a função que descreve a onda.
 - c) Determine o deslocamento do ponto $x = 0,25$ m em $t = 0,1$ s.
 - d) Ache a velocidade transversal do ponto $x = 0,25$ m em $t = 0,1$ s.
19. Uma corda de violão de 0,75 m de comprimento tem uma frequência fundamental de 440 Hz. A densidade linear da corda é 2,2 g/m.
- a) Quando se pulsa a corda fortemente, o harmônico fundamental vibra com um deslocamento máximo de 0,2 cm. Qual é a energia desse harmônico?
 - b) Qual é a energia do terceiro harmônico, se sua amplitude é 0,05 cm? (Lembre que a amplitude de uma onda estacionária é o dobro da amplitude de seu componente senoidal.)
20. Como uma onda distorce o meio em que ela se propaga, há energia potencial associada à onda. A Figura 10.6b, anteriormente, mostra um elemento da corda de comprimento original dx que é distendido por uma onda a um novo comprimento dl . A energia potencial dU do elemento de corda, devido à onda, é o trabalho realizado pela tensão T ao distender o elemento. Mostre que $dU/dx = \frac{1}{2} T(\partial y/\partial x)^2$.
21. O módulo de Young do aço é 2×10^{11} Pa. Qual a velocidade de uma onda sonora longitudinal em uma barra de aço? A densidade do aço é 7,8 g/cm³.
22. Dê uma explicação qualitativa de por que a velocidade do som no chumbo é menor do que no cobre.
23. A velocidade do som na água é aproximadamente de 1 480 m/s. Ache a frequência de uma onda sonora cujo comprimento de onda na água seja o mesmo que o de uma onda de frequência de 1 000 Hz no ar.
24. Golpeia-se uma das extremidades de um trilho no qual a velocidade do som é 5 000 m/s. Uma pessoa, na outra extremidade, escuta dois sons, um deles produzido pela onda que se propagou ao longo do trilho e outro produzido pela onda que se propagou no ar. O intervalo de tempo que separa a chegada dos dois sons é 10 s. Calcule:
- a) o comprimento do trilho;
 - b) o tempo gasto para o som atingir a outra extremidade através do ar.
25. Qual é a frequência:
- a) de uma onda sonora cujo comprimento de onda no ar é de 5 m; e
 - b) de uma onda no mar, com o mesmo comprimento de onda que a anterior?
26. Para obedecer aos requisitos legais, um fabricante desenhou seus carros com um ruído máximo de 80 dB, correspondente ao limite legal. Um teste na estrada com um desses carros revelou que o ruído máximo era de 90 dB. O fabricante afirma que a diferença entre a intensidade medida e o limite legal é desprezível. Calcule o aumento na intensidade do ruído e verifique a afirmação do fabricante.

27. Sons acima de 160 dB podem romper o tímpano.
- Qual é a amplitude de pressão de uma onda sonora no ar com um nível de intensidade de 160 dB?
 - Qual é a força exercida sobre um tímpano de $5,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ de área, devido a essa onda? Considere a densidade do ar igual a $1,2 \text{ Kg/m}^3$.
28. Um tubo de 1 m de comprimento é fechado em uma das extremidades. Um fio de 0,30 m de comprimento e 0,01 kg de massa, fixo em ambas as extremidades, vibra com sua frequência fundamental e está colocado transversalmente na extremidade aberta do tubo. Em consequência, a coluna de ar no tubo vibra em ressonância, também com a frequência fundamental. Determine:
- a frequência de vibração da coluna de ar no tubo;
 - a tensão do fio.
29. Um diapasão vibra com uma frequência de 500 Hz e é mantido acima de um tubo, contendo certa quantidade de água. A primeira ressonância ocorre quando a coluna de ar sobre o nível de água é 17 cm.
- Calcule a velocidade do som no ar.
 - De quanto deve ser a altura da coluna de ar para que ocorra a segunda ressonância?
30. A figura abaixo mostra um ouvinte alinhado com dois alto-falantes que emitem uma nota de 500 Hz. A intensidade de cada alto-falante no ponto em que está o ouvinte é 10^{-4} W/m^2 . Os alto-falantes oscilam em fase, isto é, o deslocamento dos elementos de volume do ar é igual a zero no instante $t = 0$ para ambos os alto-falantes. Determine:



- os dois menores valores de d para os quais o ouvinte não ouvirá qualquer som proveniente dos alto-falantes;
 - os dois menores valores de d para os quais o ouvinte ouvirá um som com a máxima intensidade;
 - o valor da máxima intensidade;
 - o nível de intensidade correspondente ao item (c).
31. Um foguete explode a uma altura de 400 m, produzindo, em um ponto no chão verticalmente abaixo dele, uma intensidade sonora média de $6,7 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2$ durante 0,2 s. Calcule:
- a intensidade média do som a uma distância de 10 m do foguete;
 - o nível do som a 10 m de distância do foguete;
 - a energia sonora total irradiada na explosão.
32. O ouvido externo consiste de uma parte externamente visível e do canal auditivo, o qual é a passagem do exterior para o tímpano.
- Encontre a frequência fundamental dessa passagem se o seu comprimento for de 2 cm.
 - Sugira o papel que essa cavidade representa na audição.

33. Um ônibus toca a buzina ao se aproximar de um ponto de parada. Um passageiro parado no ponto afirma que a frequência da buzina foi de 300 Hz; já o motorista do ônibus diz que ela foi de 280 Hz.
 - a) Ambos estão certos?
 - b) Determine a velocidade do ônibus.
34. Uma mulher em pé ao lado de uma rodovia assopra um apito (altura do som 800 Hz) para alertar três colegas que se encontram a 200 m de distância – uma ao norte, outra ao leste e outra ao sul. Uma quarta mulher dirige-se para o oeste a 40 m/s. Um vento constante, a 4,0 m/s, sopra do sul para o norte. Qual a frequência do som do apito ouvido por cada uma das quatro mulheres?
35. Os golfinhos e os morcegos emitem ondas ultra-sônicas com frequência superior a $2,5 \times 10^5$ e 10^5 Hz, respectivamente. Qual é o comprimento de onda de uma dessas ondas:
 - a) Na água?
 - b) No ar?
36. Uma onda ultra-sônica de 30 Hz de frequência, ao propagar-se em um meio, possui comprimento de onda igual a 2 dm. Ao passar para outro meio diferente, o comprimento de onda torna-se igual a 3 dm. Calcule a velocidade de propagação dessa onda ultra-sônica:
 - a) no meio onde $\lambda = 2$ dm;
 - b) no meio onde $\lambda = 3$ dm.
37. As ondas ultra-sônicas têm muitas aplicações tecnológicas e médicas pelo fato de altas intensidades poderem ser usadas sem dano ao ouvido. Considere uma onda de ultra-som com intensidade de 10 W/cm^2 . Calcule:
 - a) o nível de intensidade dessa onda;
 - b) a energia transmitida em uma superfície de 1 cm^2 em 1 min;
 - c) a amplitude da onda de variação de pressão no ar;
 - d) a intensidade na água de uma onda ultra-sônica com amplitude de pressão encontrada em (c). Dados: $\rho_{\text{ar}} = 1,29 \text{ kg/m}^3$; $\rho_{\text{água}} = 10^3 \text{ Kg/m}^3$; $v_{\text{ar}} = 343 \text{ m/s}$ a 20°C ; $v_{\text{água}} = 1\,500 \text{ m/s}$.
38. Compare a intensidade e o nível de intensidade do som audível que o ouvido humano tolera com os do ultra-som usado na diagnose médica e na fisioterapia.
39. Uma onda ultra-sônica de 1 MHz utilizada na diagnose está atravessando 1 cm de músculo e, a seguir, 1 cm de gordura até atingir o osso. A intensidade inicial do feixe incidente no músculo é de 10 mW/cm^2 . Para ultra-som de 1 MHz, os coeficientes de atenuação do feixe no músculo, na gordura e no osso são, respectivamente, $0,13 \text{ cm}^{-1}$, $0,05 \text{ cm}^{-1}$ e $1,2 \text{ cm}^{-1}$. Calcule a intensidade inicial transmitida na gordura e no osso e a intensidade do eco que atinge o transdutor proveniente da interação gordura-osso. Consulte a tabela a seguir.

Densidade e impedância acústica de alguns materiais e velocidade do ultra-som neles

Material	$\rho(\text{kg/m}^3)$	$v(\text{m/s})$	$Z(\text{kg/m}^2\cdot\text{s})$
Ar	1,29	331	430
Água	$1,00 \times 10^3$	1 480	$1,48 \times 10^6$
Músculo	$1,04 \times 10^3$	1 580	$1,64 \times 10^6$
Cérebro	$1,02 \times 10^3$	1 530	$1,56 \times 10^6$
Gordura	$0,92 \times 10^3$	1 450	$1,33 \times 10^6$
Osso	$1,90 \times 10^3$	4 040	$7,68 \times 10^6$

40. O efeito Doppler é usado para examinar o movimento das paredes do coração, principalmente dos fetos. Para isso, ondas ultra-sônicas de comprimento de onda de 0,3 mm são emitidas na direção do movimento da parede cardíaca. Se as velocidades de movimento dessa parede e do ultra-som no corpo humano forem, respectivamente, 7,5 cm/s e 1 500 m/s, calcule a variação de frequência observada devido ao efeito Doppler.
41. Morcegos podem examinar características de um objeto, tais como seu tamanho, forma, distância, direção e movimento, sentindo como os sons de alta frequência, emitidos por eles, são refletidos pelos objetos. Discuta cada um desses aspectos. (Veja *Information Content of Bat Sonar Echoes*, por Simmons, J. A. et al.)⁽²⁰⁾
42. Um morcego voa dentro de uma caverna, orientando-se mediante a utilização de *bips* ultra-sônicos (emissões curtas com duração de 1 ms ou menos e repetidas vezes por segundo). Suponha que a frequência da emissão do som do morcego seja de 39 000 Hz. Durante uma arremetida veloz diretamente contra a superfície plana de uma parede, o morcego desloca-se a 1/40 da velocidade do som no ar. Qual a frequência da onda, refletida na parede, que ele ouve?

Referências Bibliográficas

1. KINSLER, L. et al., *Fundamentals of Acoustics*. Monterrey: John Wiley and Sons, 1982.
2. BEHREND, O.; KOSSL, M.; SCHULLER, G. Binaural influences on Doppler shift compensation of the horseshoe bat *Rhinolophus rouxi*. *J. Comp. Physiol.* v. A185, n. 6, p. 529-538, Dec, 1999.
3. GRINNELL, A.D.; SCHNITZLER, H.U. Directional sensitivity of echolocation in horseshoe bat, *Rhinolophus ferrumequinum*. 2. Behavioral directionality of hearing. *J. Comp. Physiol.* v. 116, n. 1, p. 63-76, 1977.
4. SIMMONS, J.A.; SAILLANT, P.A.; DEAR, S.P. Through a bats ear. *IEEE Spectrum*. v. 29, n. 3, p. 46-48, Mar, 1992.
5. GROTHE, B.; NEUWEILER, G. The function of the medial superior olive in small mammals: temporal receptive fields in auditory analysis. *J. Comp. Physiol.* v. A186, n. 5, p. 413-423, May, 2000.
6. MULLER, M.; WESS, F.P.; BRUNS, V. Cochlear place-frequency map in the marsupial *Monodelphis domestica*. *Hearing Res.* v. 67, n. 1-2, p. 198-202, May, 1993.
7. GLASER, W. Hypothesis of optimum detection in bats echolocation. *J. Comp. Physiol.* v. 94, n. 3, p. 227-248, 1974.
8. KALKO, E.K.V. et al. Echolocation and foraging behavior of the lesser bulldog bat, *Noctilio albiventris*: preadaptations for piscivory? *Behav. Ecol. Sociobiol.* v. 42, n. 5, p. 305-319, May, 1998.
9. KIANG, N.Y.S.; MAXON, E.C. Tails of tuning curves of auditory-nerve fibers. *J. Acoust. Soc. Amer.* v. 55, n. 3, p. 620-630, 1974.
10. RAVICZ, M.E.; MELCHER, J.R.; KIANG, N.Y.S. Acoustic noise during functional magnetic resonance imaging. *J. Acoust. Soc. Am.* v. 108, n. 4, p. 1683-1696, Oct, 2000.
11. KREITHEN, M.L.; QUINE, D.B. Infrasonic detection by the homing pigeon – behavioral audiogram. *J. Comp. Physiol.* v. 129, n. 1, p. 1-4, 1979.
12. SUGA, N.; NEUWEILER, G.; MOLLER, J. Peripheral auditory tuning for fine frequency-analysis by CF-FM bat, *Rhinolophus ferrumequinum*. 4. Properties of peripheral auditory neurons. *J. Comp. Physiol.* v. 106, n. 1, p. 111-125, 1976.
13. SUGA, N.; O'NEIL, W.E. Neural axis representing target range in the auditory-cortex of the mustache bat. *Science*. v. 206, n. 4461, p. 351-353, 1979.
14. MISAWA, H.; SUGA, N. Multiple combination-sensitive neurons in the auditory cortex of the mustached bat. *Hearing Res.* v. 151, n. 1-2, p. 15-29, Jan, 2001.
15. HILL, C.R. *Physical Principles of Medical Ultrasonic*. England: Ellis Horwood Limited, 1986.
16. SIMMONS, J.A.; HOWEL, D.J.; SUGA, N. Information-content of bat sonar echoes. *American Scientist*. v. 63, n. 2, p. 204-215, 1975.
17. SCHÜLLER, G. Vocalization influences auditory processing in collicular neurons of the CF- FM-Bat, *Rhinolophus ferrumequinum*. *J. Comp. Physiol.* v. 132, n. 1, p. 39-46, 1979.
18. SANDERSON, M.I.; SIMMONS, J.A. Neural responses to overlapping FM sounds in the inferior colliculus of echolocating bats. *J. Neurophysiol.* v. 83, n. 4, p. 1840-1855, Apr, 2000.
19. BRUNS, V.; SCHMIESZEK, E. Cochlear innervations in the greater horseshoe bat – demonstration of an acoustic fovea. *Hear. Res.* v. 3, n. 1, p. 27-43, 1980.
20. SIMMONS, J.A.; HOWEL, D.J.; SUGA, N. Information-content of bat sonar echoes. *American Scientist*. v. 63, n. 2, p. 204-215, 1975.

Capítulo 11

Óptica Física e Geométrica, Biofísica da Visão e Instrumentos Ópticos



11.1 INTRODUÇÃO

A *visão* dos espécimes vivos acontece por meio dos olhos. O funcionamento dos olhos é uma resposta à ação da *luz visível* nesse órgão. Como vimos ao discutir o *espectro eletromagnético*, por luz visível entende-se a faixa de radiação eletromagnética correspondente a comprimentos de onda (λ) de 4×10^{-7} m a 7×10^{-7} m ou frequências (ν) de $7,5 \times 10^{14}$ Hz a $4,3 \times 10^{14}$ Hz. Esse intervalo de frequência contém as frequências correspondentes às cores que vão desde o violeta ao vermelho. O termo *luz* também é utilizado para designar a radiação eletromagnética *um pouco fora da faixa visível*. A *luz ultravioleta* é a radiação eletromagnética com $\nu > 4,3 \times 10^{14}$ Hz; e a *luz infravermelha* é a radiação com $\nu < 7,5 \times 10^{14}$ Hz. Essas radiações também ocupam uma faixa de frequências no espectro eletromagnético.

A luz propaga energia sem propagar massa, sendo importante para todo tipo de vida que existe na Terra. Ela proporciona aos espécimes informações sobre seu meio ambiente vitais para a sua sobrevivência. A luz também é muito utilizada em aplicações médicas, científicas, tecnológicas etc. Sua *natureza* pode ser:

- ♦ ondulatória, do tipo onda transversal;
- ♦ ou corpuscular, ou seja, consiste de *quantum* de energia.

Se a frequência da luz for ν , seu quantum de energia ΔE será definido como

$$\Delta E = h \cdot \nu = hc/\lambda. \quad (11.1)$$

h é a constante de Planck de valor $6,626 \times 10^{-34}$ J/s, e c é a velocidade da luz no ar ou no vácuo de valor constante 3×10^8 m/s. Como a luz visível é policromática, sua energia total será determinada a partir da integração dos quanta de energia correspondentes a cada frequência constituinte do espectro visível.

A velocidade v da luz em um meio que não seja ar ou vácuo depende das características desse meio. O *índice de refração* n é um parâmetro que caracteriza um meio óptico e é definido

$$n = c/v. \quad (11.2)$$

Como $c \geq v$ para qualquer meio óptico, então sempre teremos $n \geq 1$. Para o caso do ar ou vácuo, temos $n = 1$. Valores de n para outros meios estão relacionados na Tabela 11.1.

Tabela 11.1 Índice de Refração de Algumas Substâncias (Valores Correspondentes à Luz Amarela)

Substância	n	Substância	n	Substância	n
Ar (CNPT)	1,000	Diamante	2,4168	Crounglas	1,517
Água a 20°C	1,333	Cristal de quartzo	1,553	Cloreto de sódio	1,544
Acetona a 20°C	1,358	Quartzo fundido	1,458	Lente do olho	1,424
Etanol a 20°C	1,360	Flint glass	1,650	Humor vítreo	1,336

Exemplo: O comprimento de onda típico das microondas é 3 cm; da luz vermelha é 6500 Å; e dos raios x brandos é 0,37 Å. Determine o valor de um quantum de energia de cada uma dessas radiações eletromagnéticas. Comente o resultado.

Resolução: Na equação (11.1), substituindo os valores da constante de Planck e da velocidade da luz no vácuo, temos $\Delta E = (19,878 \times 10^{-26}/\lambda)J$, quando medimos λ em metros. Logo,

para as microondas com $\lambda = 3 \times 10^{-2}$ m, teremos $\Delta E_{mw} = 6,626 \times 10^{-24}$ J;
para a luz vermelha com $\lambda = 6,5 \times 10^{-7}$ m, teremos $\Delta E_{ver} = 3,058 \times 10^{-19}$ J;
e, para os raios x brandos com $\lambda = 0,37 \times 10^{-10}$ m, teremos $\Delta E_{rx} = 5,372 \times 10^{-15}$ J.

A unidade de energia mais utilizada no caso das radiações eletromagnéticas é o elétron volt (eV), que tem a seguinte equivalência: $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19}$ J. Em função dessa unidade, teremos $\Delta E_{mw} = 4,12 \times 10^{-5} \text{ eV} \ll \Delta E_{ver} = 1,91 \text{ eV} \ll \Delta E_{rx} = 3,35 \times 10^4 \text{ eV}$.

Exemplo: Calcule a velocidade da luz:

- na água;
- no vidro;
- no diamante.

O que você conclui desses resultados?

Resolução: Da Tabela 11.1, achamos os índices de refração de cada uma das substâncias; e, pela equação (11.2), achamos que a velocidade da luz é:

- Na água: $v_{\text{água}} = c/n_{\text{água}} = (3 \times 10^8/1,333)\text{m/s} = 2,25 \times 10^8 \text{ m/s}$.
- No vidro: $v_{\text{vidro}} = c/n_{\text{vidro}} = (3 \times 10^8/1,517)\text{m/s} = 1,98 \times 10^8 \text{ m/s}$.
- No diamante: $v_{\text{dia}} = c/n_{\text{dia}} = (3 \times 10^8/2,4168)\text{m/s} = 1,24 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Dessa maneira, concluímos que, nos meios opticamente mais densos do que o ar ou no vácuo, a luz propaga-se mais lentamente.

Reflexão e refração da luz

Toda vez que a luz *incide* sobre a superfície que separa dois meios ópticos, que são transparentes à luz, essa será *refletida e refratada*. O comprimento da onda refletida (λ_r) será o mesmo que o da onda incidente (λ_i); já o comprimento da onda refratada (λ_r) será diferente. De fato, como a luz incidente e a luz refletida encontram-se no mesmo meio óptico de índice de refração n , então, de acordo com a equação (11.2), a velocidade da luz incidente será a mesma da luz refletida. Logo, $v_i = c/n = \lambda_i v$ e $v_r = c/n = \lambda_r v$ implicam $\lambda_i = \lambda_r$. Quando acontece a refração, a luz incidente e a luz refratada encontram-se em meios ópticos diferentes de índices de refração n e n' , respectivamente. Portanto, no meio incidente, temos $n = c/v_i = c/\lambda_i v$ ou $n\lambda_i = c/v$; e, no meio refratado, $n'\lambda_r = c/v$; o que implica $n\lambda_i = n'\lambda_r$. Na Figura 11.1 é utilizada a natureza ondulatória da luz para deduzirmos as conhecidas leis da reflexão e refração.

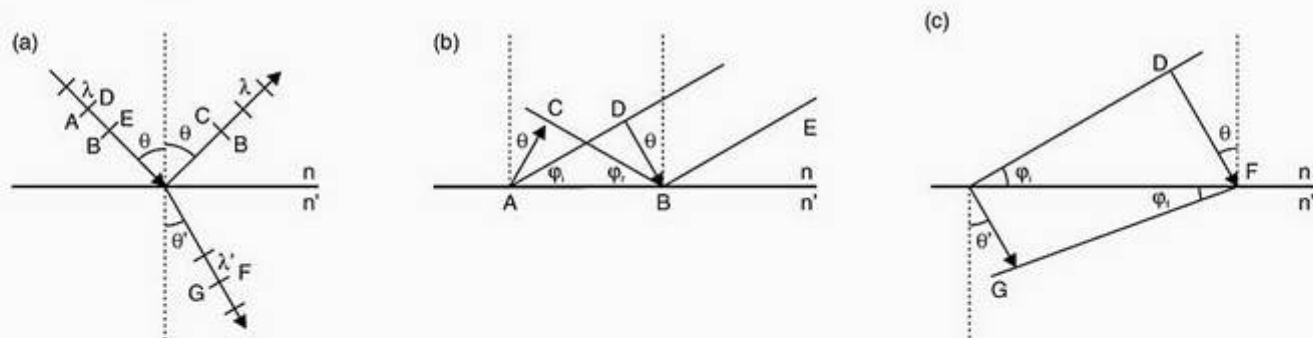


Figura 11.1 a) Raios de luz: incidente, refletida e refratada (transmitida) com as respectivas frentes de onda e meios ópticos de índices de refração n e n' .
b) Frentes de onda incidente AD e refletida BC ; ϕ_i e ϕ_r são os ângulos de incidência e reflexão, respectivamente.
c) Frentes de onda incidente AD e refratada CB ; ϕ_i e ϕ_t são os ângulos de incidência e refração, respectivamente.

v e v' são a velocidade da luz no meio n e n' , respectivamente; na Figura 11.1b os triângulos retângulos ADB e ACB são congruentes. Como $AC = BD = v\tau$ (τ é o período da onda), teremos $\phi_i = \phi_r = \theta$. Ou seja,

ângulo de incidência = ângulo de reflexão.

Essa propriedade é conhecida como a *lei da reflexão*. Na Figura 11.1c, temos

$DF = v\tau$ e $AG = v'\tau$, e, do triângulo retângulo ADF : $AF = \frac{DF}{\sin\phi_i} = \frac{v\tau}{\sin\theta}$. Do triângulo retângulo AGF : $AF = \frac{AG}{\sin\phi_t} = \frac{v'\tau}{\sin\theta'}$; logo, $\frac{v}{\sin\theta} = \frac{v'}{\sin\theta'}$, ou, pela equação (11.2), temos

$$\blacktriangleright \quad n \sin\theta = n' \sin\theta'. \quad (11.3)$$

Essa equação representa a *lei da refração* ou lei de Snell.

A partir dos valores relativos de n e n' , extraímos as seguintes propriedades:

♦ se $n = n'$, dizemos que o *meio é único* e não tem significado algum falarmos em luz refratada;

♦ se $n' \rightarrow \infty$, dizemos que o meio n' é compacto; neste caso, $\text{sen}\theta' \rightarrow 0$, e a refração não acontece;

♦ se $n' > n \Rightarrow \text{sen}\theta_i > \text{sen}\theta_t$ ou $\theta_i > \theta_t$, ou seja, a luz refratada *acerca-se* da normal à superfície que separa os meios;

♦ se $n > n' \Rightarrow \text{sen}\theta_i > \text{sen}\theta_t$ ou $\theta_i > \theta_t$, ou seja, a luz refratada *afasta-se* da normal à superfície que separa os meios.

A Figura 11.2 mostra dois meios ópticos de índices de refração n e n' . Esses meios são transparentes à luz. Quando a luz incidente é totalmente refletida pela superfície que separa esses meios, dizemos que houve *uma reflexão interna total*. Se $n > n'$ e o ângulo de refração é 90° , o correspondente ângulo de incidência denomina-se *ângulo crítico* θ_c (veja essa situação na Figura 11.2).

Pela aplicação da lei de Snell à Figura 11.2, achamos $n \text{sen}\theta_c = n' \text{sen}90^\circ$ ou $\text{sen}\theta_c = n'/n$.

Dessa forma, conhecendo-se os índices de refração n e n' , podemos determinar o ângulo crítico correspondente a esses meios. Toda vez que a luz incidir com um ângulo $\theta_i > \theta_c$, acontecerá uma reflexão interna total. Por exemplo, se o meio incidente é o vidro ($n = 1,5$) e o meio de refração é o ar ($n' = 1,0$), então $\text{sen}\theta_c = 1/1,5 = 0,667$ ou $\theta_c = 42^\circ$ para a superfície vidro/ar.

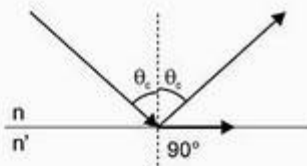
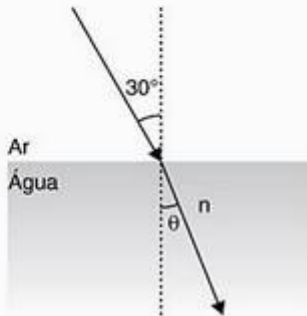


Figura 11.2 O ângulo crítico θ_c existe sempre que $n > n'$.

Exemplo: Um feixe de luz no ar incide sobre a água com um ângulo de 30° . Qual é o ângulo do feixe transmitido?



Resolução: Aplicando-se a lei de Snell (equação 11.3) à figura ao lado, teremos $\text{sen}30^\circ = n \text{sen}\theta$. Utilizando-se para n o valor da Tabela 11.1, temos $\text{sen}30^\circ = 1,333 \times \text{sen}\theta$. Portanto, $\text{sen}\theta = 0,375$, ou $\theta = 22^\circ$. Neste caso, por ser o índice de refração do meio transmitido *maior* do que o do meio incidente, o feixe refratado estará mais perto da normal que o feixe incidente.

Exemplo: Qual deve ser o ângulo crítico entre os meios água e ar, para termos reflexão interna total?

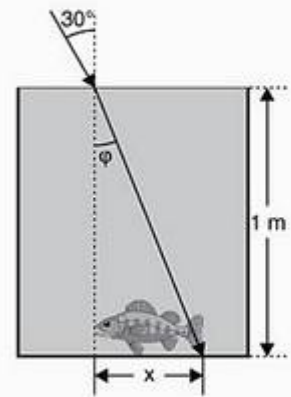
Resolução: Para termos *reflexão interna total*, o meio incidente deverá ter índice de refração maior do que o do meio transmitido. Pela definição de ângulo crítico e utilizando-se a lei de Snell, teremos $1,333 \text{sen}\theta_c = \text{sen}90^\circ$; logo, $\theta_c = 48,6^\circ$. Assim, para ângulos de incidência acima de $48,6^\circ$ não haverá feixe transmitido quando o meio de incidência for a água e o meio transmitido for o ar.

Exemplo: Um tanque retangular de 1 m de altura está cheio de água. Uma pessoa na parte externa ao tanque observa, com um ângulo de 30° , um peixe que se encontra no fundo do tanque. De quanto deverá ser o tamanho máximo do peixe, para que ele seja totalmente observado pela pessoa?

Resolução: A figura ao lado mostra como a pessoa enxerga o peixe. Sendo x o comprimento do peixe, aplicando-se a lei de Snell e conhecendo-se o índice de refração da água, teremos $\sin 30^\circ = n \sin \phi$. Como $n = 1,333$, então $\sin \phi = 0,375$.

Por outro lado, do triângulo retângulo no interior do tanque, temos $\sin \phi =$

$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0,375$. Resolvendo essa equação, encontramos que o tamanho máximo do peixe, no fundo do tanque, deverá ser $x = 40,45$ cm.



Fibras ópticas

As fibras ópticas são fios longos e flexíveis de vidro ou plástico transparente, com diâmetros da ordem de 2×10^{-3} cm = 20 μ m. A luz que incide em um dos extremos da fibra, como mostra a Figura 11.3, experimenta *reflexão total no interior da fibra*.

As *fibras ópticas* são bastante utilizadas na medicina, odontologia e principalmente na tecnologia de transmissões.



Figura 11.3 Esquema de uma fibra óptica.

Exemplo: O índice de refração do rabdoma de um omatídio de uma mosca do gênero *Calliphora* é 1,365 e do meio que o rodeia é 1,339. Qual o ângulo do vértice do cone que contém os raios luminosos que, ao atingir o rabdoma, sofrem reflexões internas totais e não escapam dele à semelhança de uma *fibra óptica*?

Resolução: Considere que o rabdoma tem forma cilíndrica e que o cone de luz incidindo em um de seus extremos tem um ângulo 2ψ , como mostra a figura ao lado. Para acontecer *reflexão interna total* no ponto P sobre a superfície do rabdoma, o ângulo de incidência θ deve satisfazer à lei de Snell: $n_1 \sin \theta = n_2 \sin 90^\circ$ ou $\sin \theta = n_2/n_1$.

Logo, $\sin \theta = 0,98$ ou $\theta = 78,8^\circ$; como $\theta + \psi = 90^\circ$, teremos $\psi = 11,2^\circ$. Dessa forma, todos os raios de luz que se encontram no cone de ângulo $2\psi = 22,4^\circ$ e que incidem no centro do extremo do rabdoma experimentarão *reflexão interna total*.

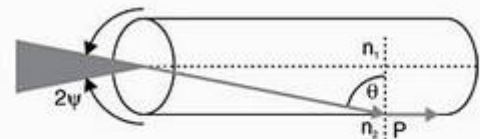




Figura 11.4 Espectro colorido de uma luz branca.

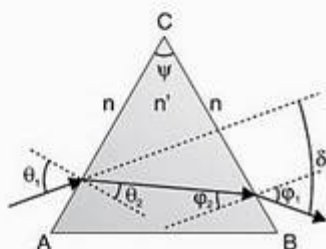


Figura 11.5 Prisma de ângulo ψ e índice de refração n' .

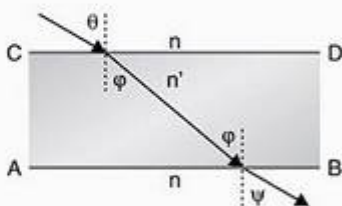


Figura 11.6 Vidro com faces paralelas e índice de refração n' .

Raios luz atravessando meios transparentes

♦ *Caso de um prisma de ângulo ψ* : Os prismas são peças encontradas em muitos instrumentos ópticos e bastante utilizadas em experiências com luz visível. Eles são triangulares e transparentes à luz. Quando uma *luz branca* incide sobre a face de um prisma, como mostramos na Figura 11.4, observamos que cada um dos comprimentos de onda que a constitui experimenta diferentes ângulos de desvio, dando como resultado um *espectro colorido*.

A Figura 11.5 mostra um prisma de índice de refração n' e ângulo ψ . Os outros ângulos do prisma são iguais. Um raio de luz incide na face AC com ângulo θ_1 e é transmitido no interior do prisma com um ângulo θ_2 . Esse raio incide na face CB com ângulo ϕ_2 e finalmente emerge com ângulo ϕ_1 . Aplicando-se a lei de Snell na superfície AC, temos

$$n \sin \theta_1 = n' \sin \theta_2 \Rightarrow \sin \theta_2 = (n/n') \sin \theta_1.$$

Dessa forma, conhecido o ângulo de incidência θ_1 , podemos determinar o ângulo refratado θ_2 . Por sua vez, conhecido θ_2 , determinamos $\phi_2 = \psi - \theta_2$. Aplicando-se a lei de Snell na superfície CB: $n \sin \phi_1 = n' \sin \phi_2$; logo, $\sin \phi_1 = (n'/n) \sin \phi_2$. Assim, conseguimos determinar ϕ_1 . $\therefore$ o *ângulo de desvio* do prisma será $\delta = \theta_1 + \phi_1 - \psi$.

♦ *Caso de uma lâmina de vidro com faces paralelas*: Na Figura 11.6, temos uma lâmina de vidro de índice de refração n' . As superfícies AB e CD da lâmina são paralelas. Aplicando-se a lei de Snell nas superfícies AB e CD, teremos, respectivamente,

$$n \sin \psi = n' \sin \phi \text{ ou } \sin \psi = (n'/n) \sin \phi;$$

$$n \sin \theta = n' \sin \phi \text{ ou } \sin \theta = (n'/n) \sin \phi.$$

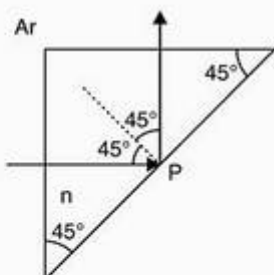
Logo, $\theta = \psi$, ou, *ângulo de incidência igual ao ângulo de emergência*.

Exemplo: Um feixe de luz incide normal na face de um prisma de índice de refração n . O feixe experimenta *reflexão interna total* na face direita do prisma.

- Qual é o valor mínimo de n para termos esta reflexão total?
- O prisma é imerso em um líquido de índice de refração 1,15 e continua a haver reflexão total, mas sua imersão em água ($n = 1,33$) a elimina. Com essas informações, limite os possíveis valores de n .

Resolução:

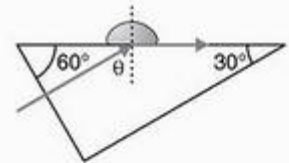
- No ponto P sobre a face direita do prisma acontece uma reflexão interna total, ou seja, o ângulo de reflexão nesse ponto é 90° . Aplicando-se a lei de Snell para um ângulo de incidência de 45° , teremos $n \sin 45^\circ = 1$, ou, $n = 1/\sin 45^\circ = 1,414$. Este será o valor mínimo do índice de refração do prisma para termos reflexão total.



- b) Quando o prisma é imerso em um líquido de índice de refração 1,15, ainda temos reflexão total. Para que isso aconteça, o índice de refração n' do prisma deve satisfazer a relação $n' \sin 45^\circ = 1,15$ ou $n' = 1,15 / \sin 45^\circ = 1,626$. Se o líquido fosse água, haveria um ângulo de refração ϕ para um ângulo de incidência de 45° . Nessa situação, o índice de refração n'' do prisma deve satisfazer a relação $n'' \sin 45^\circ = 1,33 \sin \phi$ ou $n'' = 1,33 \frac{\sin \phi}{\sin 45^\circ} = 1,886 \sin \phi$. Como $\phi < 90^\circ$, então, $\sin \phi < 1$; logo, $n'' < 1,886$. Portanto, prismas com índice de refração dentro da faixa de valores $1,414 \leq n < 1,886$ experimentarão reflexão total ao serem imersos em fluidos com índice de refração cujos valores vão de 1 até 1,333.

Exemplo: Um feixe de luz incide normal na face menor de um prisma de índice de refração 1,5. Colocamos uma gota de um líquido sobre a hipotenusa do prisma. Ache o valor do índice de refração do líquido, para que esse feixe de luz não consiga atravessar o prisma pela sua hipotenusa.

Resolução: Na hipotenusa do prisma, a reflexão interna total começa quando o ângulo de incidência θ toma o valor crítico θ_c . Pela lei de Snell, $1,5 \sin \theta_c = n \sin 90^\circ$; sendo n o índice de refração da gota. Para qualquer ângulo de incidência $\theta > \theta_c$, teremos reflexão total. Na figura acima $\theta_c = 60^\circ$, logo, $n = 1,5 \sin 60^\circ = 1,3$.



Coeficientes de reflexão e transmissão

A *fração de energia* da luz que é refletida e transmitida na interface entre dois meios ópticos diferentes é medida pelos coeficientes de reflexão (R) e transmissão (T), respectivamente. Os valores desses coeficientes dependem:

- ♦ do ângulo de incidência;
- ♦ do índice de refração dos meios ópticos;
- ♦ da polarização da onda eletromagnética incidente.

A Figura 11.7 representa uma situação com os feixes incidente, refletido e transmitido em um mesmo plano ou *plano de incidência*. Os vetores campo elétrico E_i , E_r e E_t de cada um desses feixes também se encontram neste plano, e os meios ópticos têm índice de refração n_1 e n_2 . Como podemos notar, a polarização desses vetores campo elétrico é *paralela* ao plano de incidência.

Para encontrarmos as expressões gerais de R e T, devemos ter em conta que a intensidade I da onda é proporcional ao quadrado de sua amplitude: $I \propto |E|^2$ ou $I \propto |B|^2$, sendo B o componente magnético da onda eletromagnética. É comum escolhermos o vetor campo elétrico E para o cálculo de I . Logo, para os feixes incidente, refletido e refratado, teremos, respectivamente, $I_i \propto |E_i|^2$, $I_r \propto |E_r|^2$ e $I_t \propto |E_t|^2$.

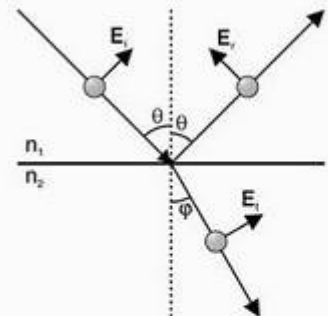


Figura 11.7 Plano de incidência contendo os feixes incidente, refletido e refratado.

O feixe luminoso é uma onda eletromagnética harmônica, que satisfaz a equação de onda (10.5). Tanto os vetores campo elétrico $\mathbf{E}$ ou campo magnético $\mathbf{B}$ satisfazem esta equação; logo, a forma matemática mais geral de $\mathbf{E}$ ou $\mathbf{B}$ será a parte real de

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \text{ ou } \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (11.4)$$

$\mathbf{k}$ é o vetor de onda ω , frequência angular da onda e $\mathbf{r}$ o vetor de posição. Se o vetor campo elétrico dos feixes incidente, refletido e transmitido tem, respectivamente, as amplitudes E_{0i} , E_{0r} e E_{0t} , então, podemos mostrar que

$$\blacktriangleright \quad \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n_1^2 \sin\theta \cos\varphi - n_2^2 \cos\theta \sin\varphi}{n_1^2 \sin\theta \cos\varphi + n_2^2 \cos\theta \sin\varphi}, \quad (11.5)$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n_1^2 \sin\theta \cos\theta}{n_1^2 \sin\theta \cos\varphi + n_2^2 \cos\theta \sin\varphi}. \quad (11.6)$$

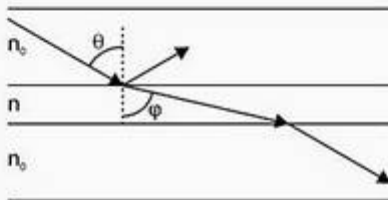
Com as equações (11.5) e (11.6), é simples obter os coeficientes de reflexão e transmissão. São eles

$$\blacktriangleright \quad R = \left| \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right|^2 \quad \text{e} \quad T = \frac{n_2}{n_1} \left| \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right|^2. \quad (11.7)$$

Quando a incidência é normal à superfície que separa os meios, temos

$$\blacktriangleright \quad R = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \quad \text{e} \quad T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2}. \quad (11.8)$$

I_0 , I_r e I_t são as intensidades do feixe incidente, refletido e transmitido, respectivamente. Pela conservação da energia $I_i = I_r + I_t$ ou $R + T = 1$.



Exemplo: Duas placas de vidro ($n = 1,5$) estão separadas por uma camada fina de um líquido de índice de refração n . Se $\theta = 60^\circ$ e o líquido for:

- água ($n = 1,33$), de quanto é o ângulo de refração?
- álcool ($n = 1,36$), qual é a intensidade da luz transmitida na placa inferior de vidro?

Resolução:

- Aplicando-se a lei de Snell, calculamos o ângulo de refração φ do feixe ao ser transmitido na água. De $1,5 \sin 60^\circ = 1,33 \sin \varphi$, achamos $\sin \varphi = 0,9743$ ou $\varphi = 76,98^\circ$.
- Na superfície que separa o álcool do vidro, o feixe incide com um ângulo ψ que satisfaz a relação $1,36 \sin \psi = 1,5 \sin 60^\circ$; logo, $\sin \psi = 0,9552$ ou $\psi = 72,78^\circ$. Se I_0 é a intensidade do feixe na placa superior de vidro, e I_t é a intensidade do feixe no álcool, então, $I_t = T I_0$. O coeficiente de transmissão T é calculado a partir das equações (11.6) e (11.7)

$$T = \frac{1,36}{1,5} \cdot \left[\frac{2 \times 1,5^2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ}{1,5^2 \cos 72,78^\circ \sin 60^\circ + 1,36^2 \sin 72,78^\circ \cos 60^\circ} \right]^2 = 0,956$$

Se I_2 é a intensidade do feixe na placa inferior de vidro, então $I_2 = T'I_1 = 0,956T'I_0$. O coeficiente de transmissão T' será

$$T' = \frac{1,5}{1,36} \cdot \left[\frac{2 \times 1,36^2 \sin 72,78^\circ \cos 72,78^\circ}{1,36^2 \sin 72,78^\circ \cos 60^\circ + 1,5^2 \cos 72,78^\circ \sin 60^\circ} \right]^2 = 0,566.$$

Logo, a intensidade da luz transmitida na placa inferior de vidro será $I_2 = 0,5411I_0$ ou 54,11% da intensidade da luz incidente.



11.2 BIOFÍSICA DA VISÃO

O mecanismo da visão acontece através dos olhos; e é a *incidência de luz visível nos olhos* que fornece a energia necessária para que células especializadas localizadas em seu interior sejam excitadas. O potencial de ação resultante pelos mecanismos conhecidos faz com que essa perturbação no olho, de origem externa, seja interpretada. A interpretação físico-biológica da excitação produzida por esta radiação eletromagnética depende da estrutura do receptor de luz ou do olho.

Olho composto de um inseto

O olho composto de um inseto é um órgão constituído por um número grande de pequenas facetas receptoras da luz. Cada faceta é denominada *omatídio*. Essas facetas ou protuberâncias da membrana celular contêm *fotopigmentos*, que absorvem fótons de luz. Por exemplo, o número de omatídios na libélula é da ordem de 28 000; na mutuca é da ordem de 7 000; na mosca é da ordem de 4 000 etc. Na Figura 11.8 mostramos um esquema detalhado da estrutura do olho de um inseto obtido das observações com microscópios óptico e eletrônico. Notamos que um *omatídio* tem vários componentes, destacando-se a parte denominada *rabdoma*, que é onde se encontram os pigmentos fotossensíveis.

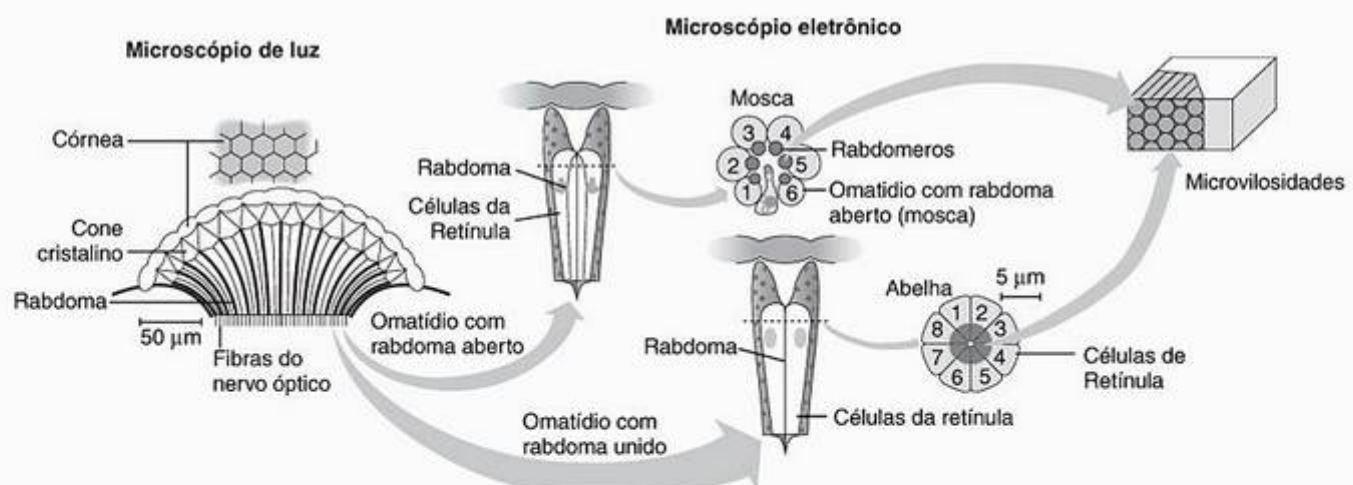


Figura 11.8 Nesta representação esquemática, são destacadas as formas do omatídio de uma mosca (rabdoma aberto) e de uma abelha (rabdoma compacto). Os fotopigmentos estão localizados em protuberâncias da membrana celular semelhante a dedos.

Transmissão da luz pelo rabdoma

A luz, ao incidir na córnea, atravessa após passar pelo cone cristalino e é focalizada sobre a extremidade do rabdoma. Esse conjunto (*córnea + cone cristalino*) é denominado *dispositivo dióptrico*. A luz, ao atravessar este dispositivo, o faz seguindo as regras da reflexão e da refração da luz através de meios ópticos transparentes, tal como mostra a Figura 11.9a. Notamos que, normalmente, os raios de luz que incidem na córnea ($n > 1$) encontram-se no ar ($n = 1$), e, ao transmitirem-se através do dispositivo dióptrico, eles tendem a convergir ao extremo do *rabdoma*. Esse efeito é reforçado pelo fato de o raio de curvatura das *lentes dos olhos* ser fixo; sendo, portanto, seu ponto focal fixo também.

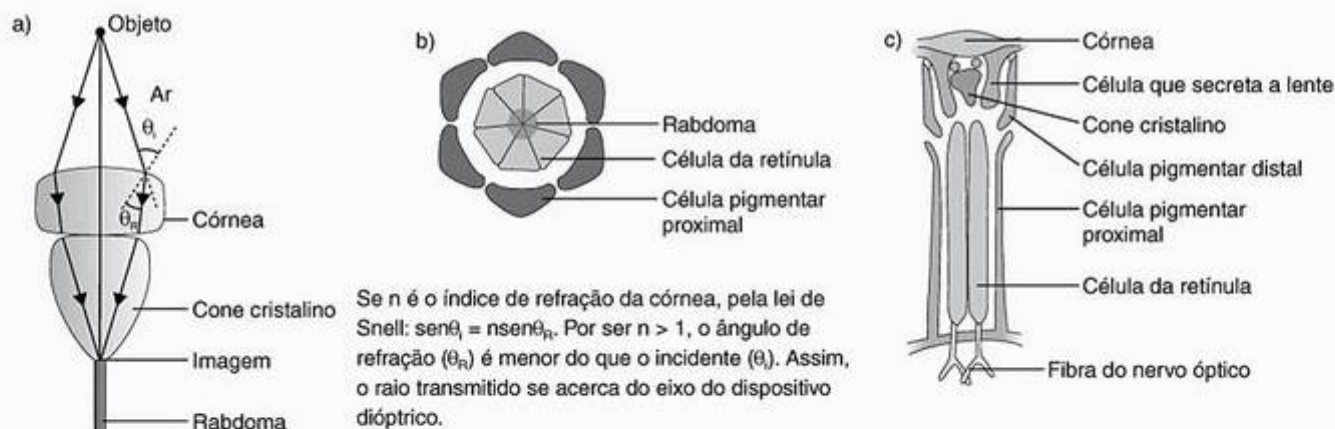


Figura 11.9 a) Dispositivo dióptico. b) Seção transversal de um rabdoma. c) Seção longitudinal de um rabdoma.

Normalmente, os *rabdomas dos insetos* medem de 100 μm a 600 μm , e eles têm um índice de refração (n) maior do que o do meio que o rodeia (n_0). Por exemplo, no caso da mosca: $n = 1,365$ e $n_0 = 1,339$. Nas figuras 11.9b e 11.9c mostramos as seções transversal e longitudinal de um rabdoma. E aqui é que encontramos os pigmentos fotossensíveis que absorvem fótons de luz. Para certos ângulos, os raios luminosos que chegam em um extremo do rabdoma experimentarão uma *reflexão interna total*, não conseguindo, portanto, escapar de seu interior (à semelhança do que acontece com uma fibra óptica).

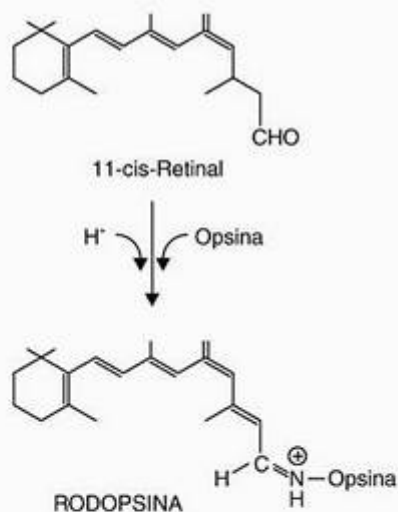


Figura 11.10 Formação da rodopsina a partir da ligação covalente do 11-cis-Retinal e da opsina.

Fotorreceptor óptico

Fotorreceptor óptico são células sensoriais *sensíveis à luz*; estas são encontradas no sistema de visão dos espécimes. Os organismos que possuem olhos contêm, em sua estrutura interna, a *molécula 11-cis-Retinal*, que é o elemento que absorve energia da luz. Essa molécula, ou pigmento visual, por si mesma *absorve muito pouca* energia da luz visível. Normalmente, a molécula 11-cis-Retinal tem uma ligação covalente com a *opsina*, que é uma proteína que *não tem capacidade de absorver energia da luz*. Essa ligação, tal como é mostrada na Figura 11.10, forma a molécula *ro-*

dopsina, que tem a capacidade de absorver energia de radiações eletromagnéticas com λ entre 300 nm a 650 nm. Essa faixa de valores de λ inclui a região da luz visível e uma parte da região de luz ultravioleta.

Os fotorreceptores da lula, dos artrópodes⁽¹⁾ (crustáceos, aranhas e insetos) e dos vertebrados^(2,3) são *células alongadas* encontradas na retina em forma de pacotes compactos (microvilosidades). O número de fótons que alcançam cada fotorreceptor *decrece* com a densidade do pacote.

Quando as células sensoriais são excitadas por um *fóton luminoso*, inicia-se um processo molecular que origina uma variação do potencial da membrana celular, tal como mostra a Figura 11.11. O *signal elétrico* criado dessa forma é transportado pelas fibras nervosas ao *cérebro* do espécime.

Podemos considerar uma célula fotorreceptora como um contador de fótons de alta sensibilidade. O intervalo dinâmico, ou de intensidade, dessa célula pode abranger até cinco ordens de magnitude.

Conhecemos como processo de adaptação das células o ajuste do intervalo dinâmico dessas células, de tal modo que tenham sensibilidade suficiente até para detectar a absorção de fótons muito energéticos.

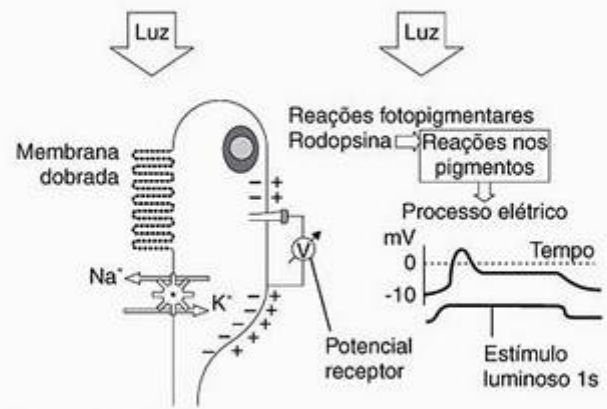


Figura 11.11 Diagrama funcional das células visuais de um invertebrado⁽⁴⁾ (camarão de água doce, por exemplo). A membrana contém moléculas de rodopsina. Também é representada uma bomba iônica Na-K.

Princípios físicos da fotorreceptividade

As moléculas que absorvem luz estão empacotadas em formatos cilíndricos muito finos e compridos com diâmetros próximos ao comprimento de onda da luz incidente. No caso do camarão de água doce, em cada célula visual, temos aproximadamente 10^5 microvilosidades. Essas criam, na membrana que contém moléculas de rodopsina, saliências em formas de dedos de aproximadamente 5 μ m de comprimento.

Vejamos o que acontece quando um feixe paralelo de luz monocromática incide sobre a lente de um olho com ângulo ϕ . Se n_0 é o índice de refração no meio entre a lente e seu plano focal (PF) a imagem se forma em um ponto (P) sobre esse plano, tal como é mostrado na Figura 11.12. Assumiremos que o fotorreceptor tem um formato cilíndrico, com diâmetro comparável ao comprimento de onda da luz incidente e que

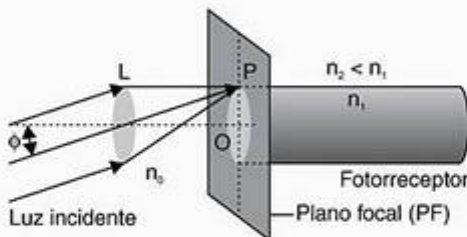


Figura 11.12 Esquema representativo do sistema lente-fotorreceptor. (P é ponto onde se forma a imagem.)

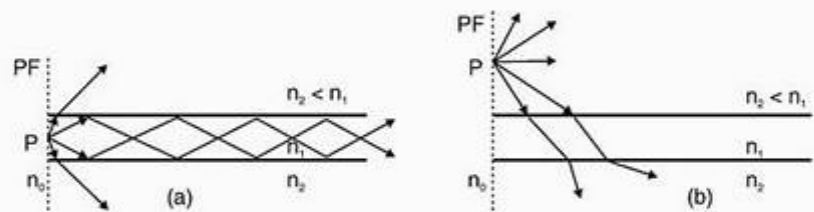


Figura 11.13 Imagem: (a) dentro da abertura do fotorreceptor; e (b) fora da abertura do fotorreceptor.

a superfície de entrada da luz se encontra em PF. A posição de P no PF dependerá do valor de ϕ ; ela poderá cair dentro da abertura do fotorreceptor ou fora dele como mostra a Figura 11.13. Como o índice de refração n_1 do fotorreceptor é maior do que o índice de refração n_2 do meio em volta dele, poderá acontecer *reflexão interna total* da luz que chega ao fotorreceptor. Logo, a *transmissão da luz através do fotorreceptor* dependerá da posição de P.

Função e formas das células da visão dos vertebrados

Os *estímulos* recebidos por um organismo através do *sentido da visão* são detectados pelas células fotossensórias. Essas células, além de terem como função interpretá-las na linguagem do sistema nervoso, podem ser consideradas como *amplificadores biológicos*; isto é, a energia liberada após sua excitação é proporcionada pelo próprio metabolismo da célula, e não pelo estímulo externo. Em geral, um único fóton pode ser suficiente para excitar uma célula. Quando a luz que incide no olho é muito intensa, a sensibilidade e, portanto, a amplificação da energia pela célula fotorreceptora, é baixa.

As células visuais dos vertebrados são de dois tipos: *bastonetes* ou *cones* e são encontradas na retina do olho (veja a Figura 11.14).

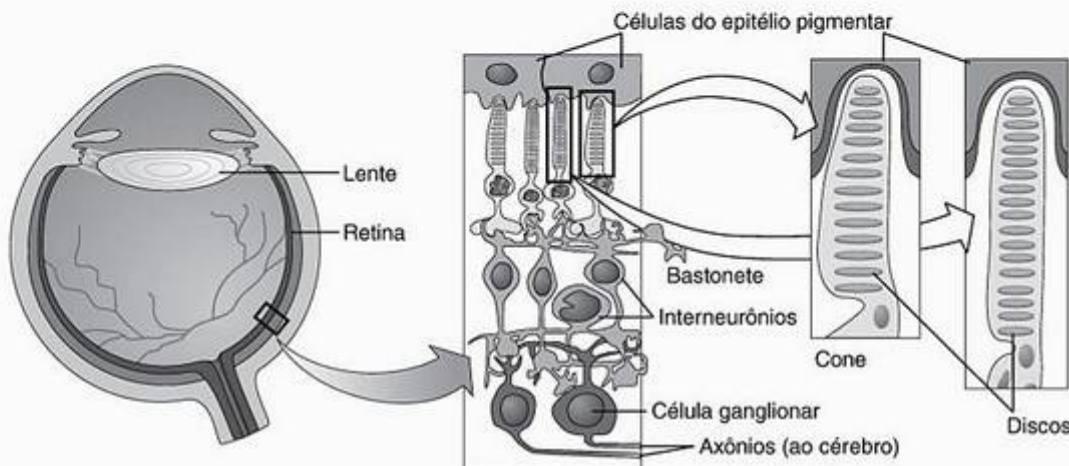


Figura 11.14 No olho dos vertebrados, as células visuais podem ser bastonetes ou cones.

A estrutura dessas células aparece na Figura 11.15, e ambas contêm segmentos externo e interno. O segmento externo do cone ou bastonete abrange um compartimento com a superfície de sua membrana bastante aumentada, e é aí que encontramos a *rodopsina* ou o *pigmento visual*. Esse compartimento, que funciona como uma antena que recebe fótons, *no caso dos bastonetes*, contém milhares de *discos*, sendo que moléculas de rodopsina estão contidas em cada disco. A distância entre os centros de dois discos adjacentes é próxima aos 30 nm.

Já no *segmento externo de um cone*, temos algumas centenas, ou, algumas vezes, até um milhar de envoltórios chatos cujo interior se comunica com o espaço extracelular. No caso da rã, os bastonetes têm diâmetros da ordem de 7 μm a 8 μm e

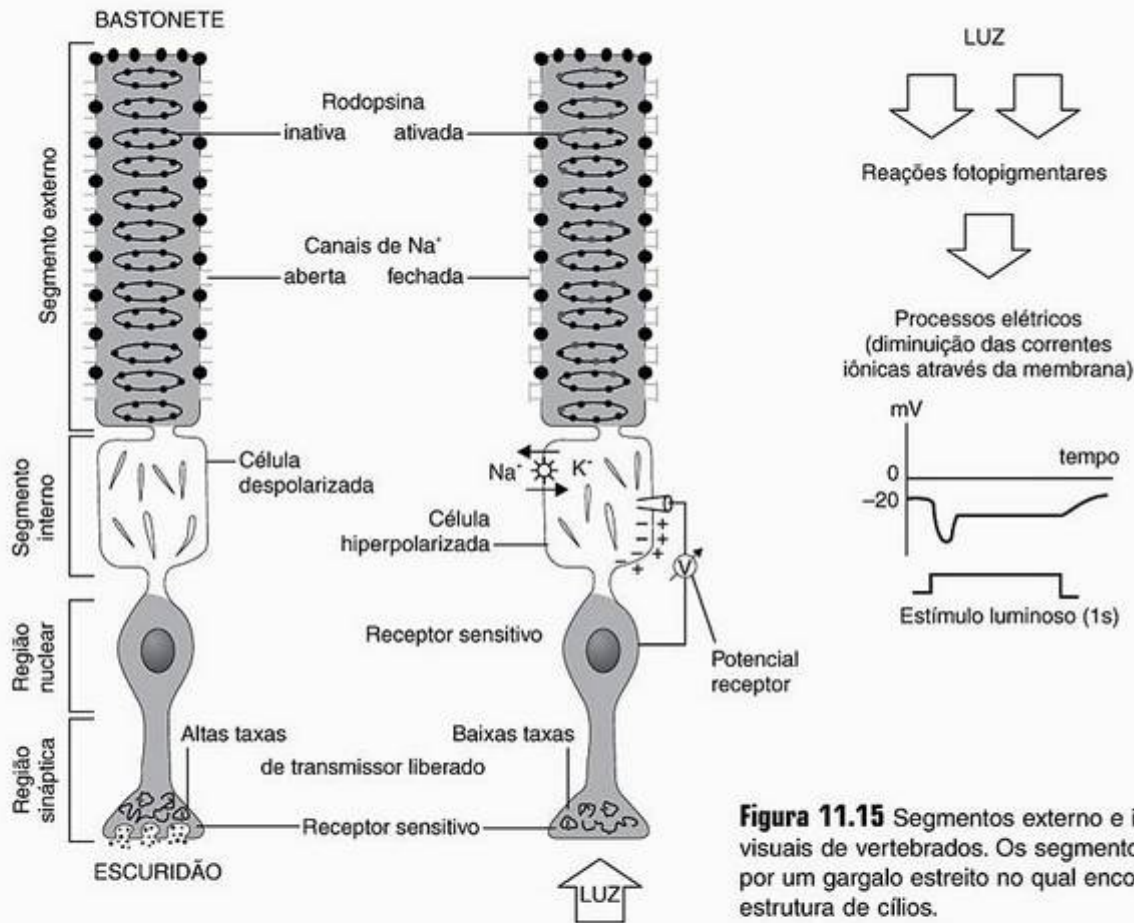


Figura 11.15 Segmentos externo e interno de células visuais de vertebrados. Os segmentos estão conectados por um gargalo estreito no qual encontramos uma estrutura de cílios.

comprimento aproximado de 80 μm , sendo que 30 μm a 40 μm correspondem ao segmento externo.

Devido ao empacotamento compacto dos discos, essas estruturas fotorreceptoras apresentam um índice de refração maior do que o de sua vizinhança. Assim, elas agem como verdadeiros guias de ondas luminosas.

A luz, ao incidir no olho, induz reações fotopigmentares nas células visuais, originando um processo elétrico devido à diminuição das correntes iônicas através da membrana. Esse mecanismo pode ser resumido da seguinte maneira: $h\nu + \text{moléculas rodopsina} \Rightarrow \text{reações nas células visuais} \Rightarrow \text{câmbios transientes do potencial elétrico através da membrana celular}$.

A Figura 11.16 mostra o mecanismo iônico de geração do potencial de ação de uma célula da visão.

Assumindo-se que a membrana dessas células tem uma permeabilidade definida e que sua dependência com a luz deve-se à existência de canais iônicos na membrana, a corrente induzida pela luz pode ser explicada postulando-se vários tipos de canais iônicos para a membrana fotossensória dos invertebrados, ou, no caso dos vertebrados, o mecanismo já estudado para as células excitáveis.

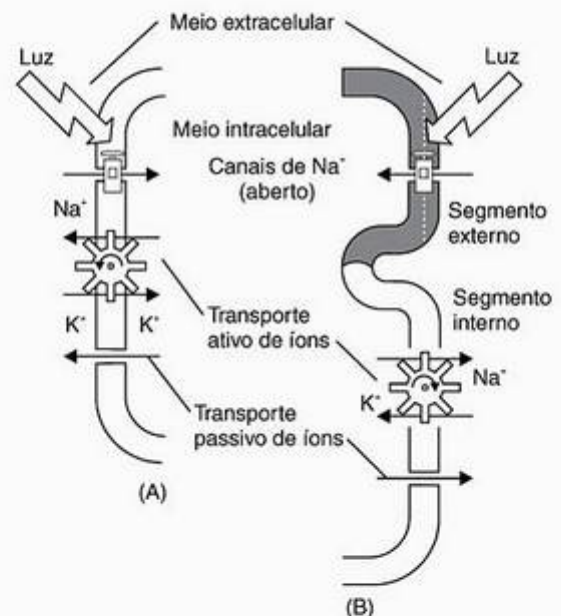
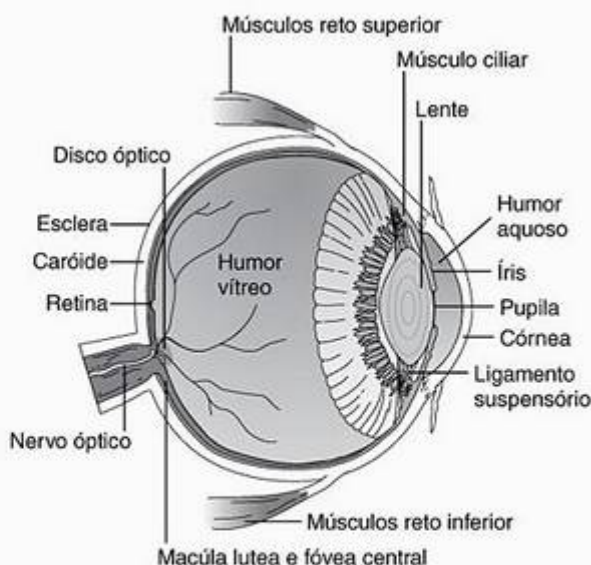


Figura 11.16 Diagrama simplificado do mecanismo iônico de geração do potencial de ação em uma célula da visão de um invertebrado (a) ou vertebrado (b). (Adaptado de Stieve⁽⁵⁾)

A intensidade do *potencial receptor* (sinal elétrico) depende da intensidade do estímulo luminoso de energia $h\nu$. O potencial receptor é processado no *receptor sensível* e é traduzido em uma sequência de impulsos de uma fibra nervosa que a conduz ao cérebro^(6,7).

Exemplo: Apesar de a lente do olho ter superfícies bastante curvas, o efeito de focalização da lente praticamente não é tão grande. A principal ação de focalização no olho deve-se à córnea. Se o meio externo ao olho é o ar, e se os índices de refração da lente e dos humores aquoso e vítreo são 1,424 e 1,336, respectivamente, explique, com o traçado de raios luminosos, este efeito de focalização.



Resolução: Para um raio de luz que incide com ângulo θ_1 sobre a superfície que separa o humor aquoso da lente, teremos um ângulo refratado θ_2 , que satisfaz a relação $\sin\theta_2 = 0,938 \sin\theta_1$; logo, $\theta_2 \geq \theta_1$. Na superfície que separa a lente do humor vítreo, teremos que um ângulo incidente θ_3 e um ângulo refratado θ_4 que satisfazem a relação $\sin\theta_4 = 1,067 \sin\theta_3$; logo, $\theta_4 \geq \theta_3$. Como podemos notar no diagrama da trajetória do feixe luminoso: $\theta_3 > \theta_2$, o que implica $\theta_4 > \theta_2$ e, finalmente, $\theta_4 > \theta_1$. Assim, como era de se esperar, os raios luminosos que vão da pupila ao humor vítreo experimentam uma convergência devido à ação da lente do olho.

C: córnea

L: lente

$n_0 = 1,000$

$n_l = 1,424$

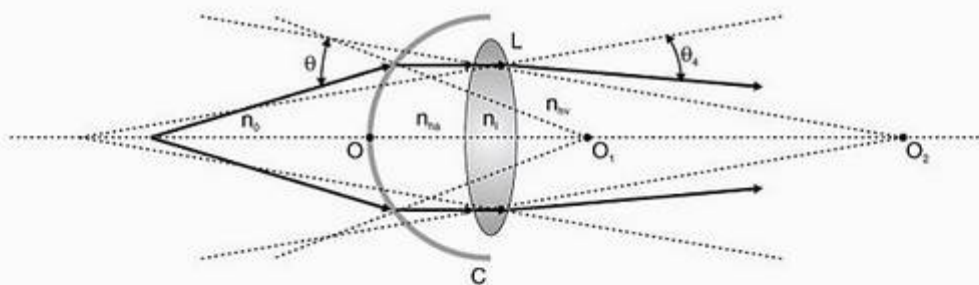
$n_{ha} = n_{hv} = 1,336$

θ = ângulo de incidência

θ_4 = ângulo de refração

O_1 : centro de curvatura de C

O_2 : centro de curvatura de L



Os feixes luminosos que incidem desde o ar com ângulo θ sobre a superfície curva da córnea experimentam uma refração de ângulo φ que satisfaz a relação $\sin\varphi = 0,75 \sin\theta$; logo, $\varphi < \theta$. Dessa maneira, todo feixe de luz que vai do ar à lente do olho experimenta uma convergência mais acentuada do que a produzida pela lente na passagem desse mesmo feixe ao humor vítreo.



11.3 DIFRAÇÃO E INTERFERÊNCIA DA LUZ

O fenômeno resultante da passagem de uma onda através de uma *fenda estreita* de abertura b é conhecido como *difração da onda*. A onda difratada, como mostra a Figura 11.17, experimenta uma *divergência angular* θ . A difração será:

- ♦ *fraca*, quando temos uma fenda com abertura $b \gg \lambda$.
- ♦ *acentuada*, quando temos abertura $b \approx \lambda$; neste caso, $\sin \theta \approx \lambda/b$.

Entendemos por *interferência* todo efeito ondulatório do princípio da *superposição*. Ou seja, se duas ou mais ondas encontram-se em um ponto, o deslocamento do meio é a soma dos deslocamentos de cada onda. Na Figura 11.18 mostramos esse efeito para a superposição de duas ondas esféricas.

As regiões nas quais as cristas (ou os vales) de ambas as ondas se cortam são de *interferência construtiva*; já as regiões nas quais as cristas de uma onda se cruzam com os vales da outra são de *interferência destrutiva*.

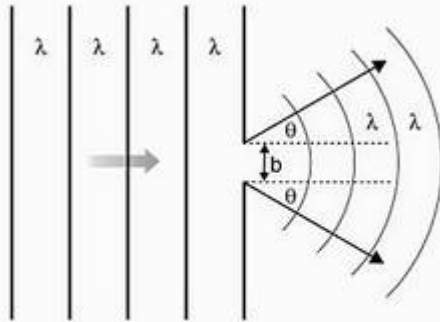


Figura 11.17 Difração através de uma fenda estreita de espessura b .

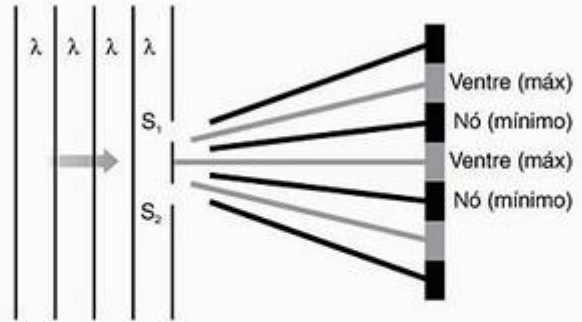


Figura 11.18 Modelo de interferência de duas ondas esféricas que emanam das fendas S_1 e S_2 . As fendas têm dimensões menores do que λ .

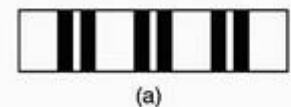
Se o número de ondas que se encontram em um ponto são mais de dois, as figuras de interferência dependerão da distância entre as fendas, porém, sua intensidade estará modulada pela difração. No espectro de interferência resultante (veja a Figura 11.19), teremos máximos secundários entre dois máximos principais sucessivos.

A primeira demonstração clara da *natureza ondulatória* da luz foi realizada por Young. Neste experimento, uma onda plana de comprimento λ incide em um painel com duas fendas estreitas separadas a uma distância $d \ll D$. Sendo D a distância entre o painel e o anteparo que mostrará a figura de interferência resultante.

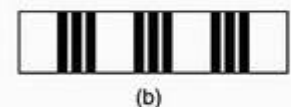
Como $d \ll D$, podemos considerar os raios AP e BP difratados pelas fendas A e B, respectivamente, *quase paralelos*. Na Figura 11.20 o ponto P encontra-se no anteparo a uma distância x do ponto O da linha de simetria QO. Se este ponto sobre o anteparo for *brilhante*, será por ser resultante de uma *interferência construtiva*. Para isso acontecer, a diferença de caminhos BC das ondas originadas nas fendas deverá ser um *número inteiro* n de comprimentos de onda λ . Ou seja,

$$BC = n\lambda \approx d \cdot \sin \theta.$$

Sendo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$



(a)



(b)

Figura 11.19 Figuras de interferência de: (a) três e (b) quatro fontes coerentes.

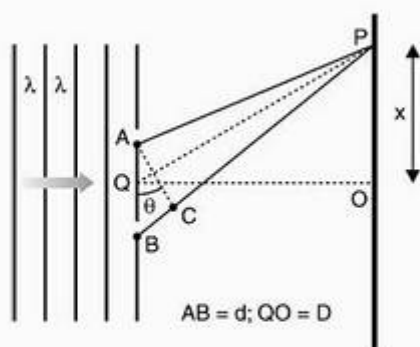


Figura 11.20 Geometria do experimento de Young, para o caso de duas fendas separadas a uma distância d .

Assim, no caso de *interferências construtivas*, devemos ter

$$\rightarrow \sin\theta = n \frac{\lambda}{d} \quad (11.9)$$

A linha que corresponde a $n = 0$ é o máximo central do espectro de interferência; os outros máximos serão linhas localizadas simetricamente do máximo central.

Teremos *interferência destrutiva* quando θ satisfizer a relação

$$\rightarrow \sin\theta = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d} \quad (11.10)$$

Como $d \ll D$, a distância $QP \approx D$; logo, $\sin\theta \approx \tan\theta = x/D$. Assim, a distância entre o máximo central e o máximo de ordem n será

$$\rightarrow x_n = n\lambda \frac{D}{d} \quad (11.11)$$

E a distância entre dois máximos consecutivos será

$$\rightarrow \Delta x = x_{n+1} - x_n = \lambda \frac{D}{d} \quad (11.12)$$

Se uma onda plana ilumina uma fenda retangular muito estreita de largura b , teremos uma *figura de difração* constituída de interferências construtivas e destrutivas, como a mostrada na Figura 11.21. Nesta figura, o máximo central é muito mais largo do que os outros máximos secundários simetricamente distribuídos em ambos os lados do máximo central.

Quando $L \gg b$, a franja de ordem n correspondente a uma *interferência destrutiva* satisfaz a relação

$$\rightarrow \sin\theta_n = n \frac{\lambda}{b} \quad (11.13)$$

$n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ e θ_n é o ângulo formado pela horizontal e a reta que une o centro da fenda e o centro da n -ésima franja de interferência destrutiva. Se $x_1 = L \frac{\lambda}{b}$ e $x_2 = 2L \frac{\lambda}{b}$ são as posições no anteparo da primeira e da segunda faixas de interferência destrutiva, respectivamente, medidas desde o centro do máximo principal, então $x_2 = 2x_1 \Rightarrow$ largura do máximo principal é o dobro da largura dos outros máximos.

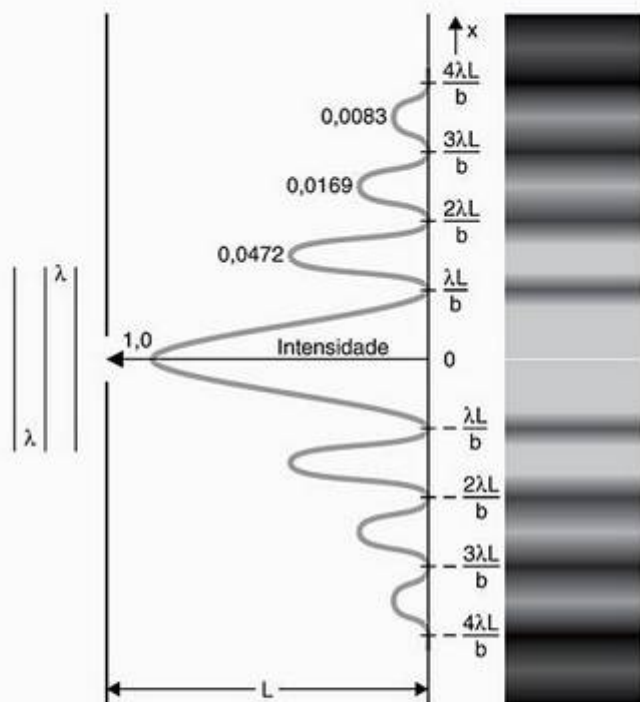


Figura 11.21 Difração de Fraunhofer em uma fenda simples de largura b .

Exemplo: Luz vermelha de $\lambda = 700$ nm experimenta *difração* por uma

fenda horizontal de $1,4 \mu\text{m}$ de largura.

- Qual deverá ser a frequência de uma onda sonora, para sofrer igual difração por uma porta de 1 m de largura?
- Essa onda pode ser ouvida por uma pessoa?

Resolução: A equação (11.13) dá a posição de cada franja escura do espectro de difração produzido por uma fenda simples. Logo,

$$\sin\theta_n = n \cdot \frac{7 \times 10^{-7} \text{ m}}{1,4 \times 10^{-6} \text{ m}} = 0,5 \text{ n.}$$

- a) Uma onda sonora que experimenta a mesma difração através de uma fenda de 1 m de largura deve satisfazer a relação $\lambda_{os} = (1 \text{ m}) \times 0,5 = 0,5 \text{ m}$. A frequência dessa onda sonora será $\nu_{os} = (343 \text{ m/s})/0,5 \text{ m} = 686 \text{ Hz}$.
- b) Essa frequência está dentro da faixa de audição dos humanos.

Exemplo: A luz que incide sobre um obstáculo opaco com duas fendas separadas 0,15 mm produz um espectro de *interferência* sobre um anteparo colocado a 2,5 m do obstáculo. A distância entre as franjas brilhantes do espectro é 7,6 mm. Qual é o comprimento de onda da luz que produz esse espectro?

Resolução: Como a separação entre as fendas é muito menor do que a sua distância ao anteparo, então, pela equação (11.12), a separação entre duas franjas brilhantes consecutivas é $7,6 \times 10^{-3} \text{ m} = \lambda \cdot \frac{2,5 \text{ m}}{1,5 \times 10^{-4} \text{ m}}$. Logo, $\lambda = 4,56 \times 10^{-7} \text{ m} = 456 \text{ nm}$.

Difração por uma fenda circular

Se uma onda plana iluminar uma *fenda circular* de raio a , obteremos uma figura de difração que consiste de franjas circulares claras e escuras correspondentes a interferências construtivas e destrutivas, respectivamente. A Figura 11.22 mostra esse espectro de difração; o círculo central do espectro é o máximo principal ou *disco de Airy*, e a primeira franja escura, ou primeiro mínimo, acontece quando

$$\sin\theta = 1,22 \frac{\lambda}{2a}.$$

Esse caso de difração tem importantes aplicações na resolução de instrumentos ópticos e no estudo dos olhos com formato esférico.

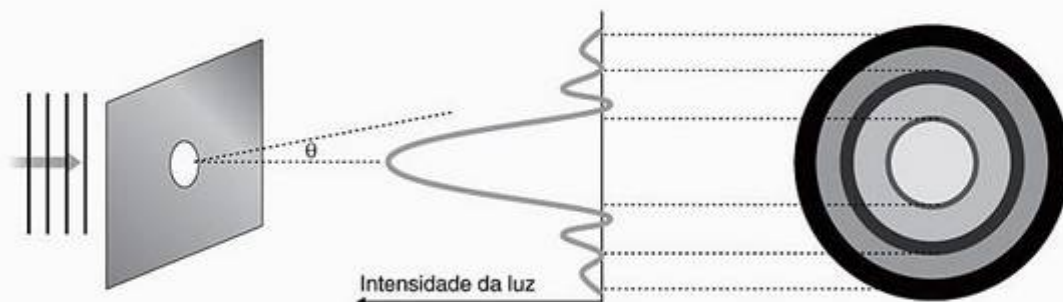


Figura 11.22 Difração de Fraunhofer por uma fenda circular de raio a .

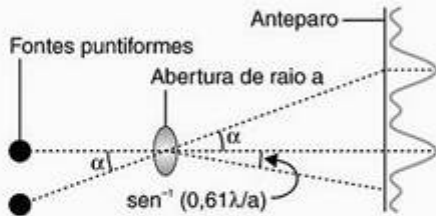


Figura 11.23 Os espectros de difração de duas fontes distantes da abertura são facilmente separadas quando $\text{sen}\alpha$ é maior do que $1,22\lambda/2a$.

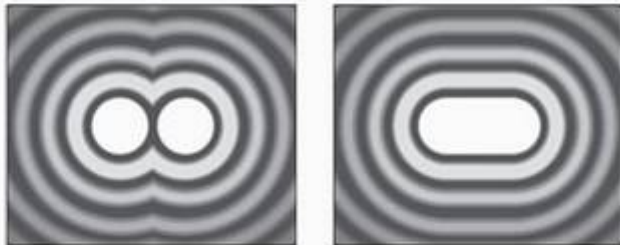


Figura 11.24 Figura de difração através de uma abertura circular de duas fontes incoerentes, quando: a) $\alpha \gg 0,61\lambda/a$; b) $\alpha \leq 0,61\lambda/a$.

Poder de resolução

Poder de resolução é a separação angular entre duas fontes de luz pontuais e incoerentes quando o máximo principal da figura de difração de uma fonte coincide com o primeiro mínimo da outra figura. Com isso, então, as duas fontes estão perceptivelmente separadas. Esse é o critério de resolução de Rayleigh, mostrado na Figura 11.23.

Quando o critério de Rayleigh se satisfaz, temos uma resolução máxima das fontes; isto é, para uma *separação angular crítica* α_c entre as fontes, onde $\alpha_c = \text{sen}^{-1} \left(\frac{1,22\lambda}{2a} \right)$. Logo, quando $\alpha > \alpha_c$, haverá uma pequena superposição das figuras de difração, e as fontes aparecerão distintas.

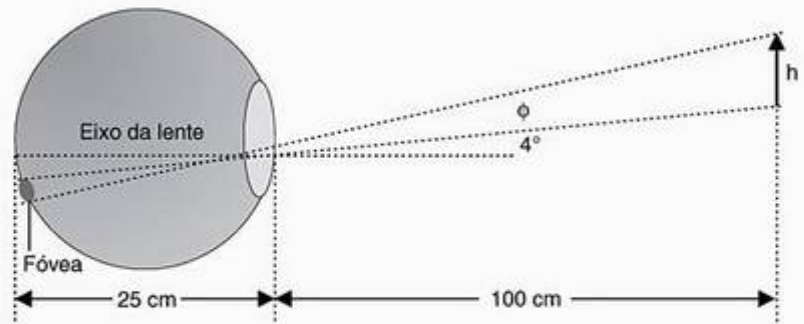
A Figura 11.24 mostra as figuras resultantes. No entanto, se α diminui, a superposição das figuras de difração aumenta, tornando-se difícil de distinguir as duas fontes.

Na natureza, encontramos um grande número de animais com seu sistema visual bastante evoluído^(8,9,10). Esses espécimes apresentam fotorreceptores com formato *fino e comprido* e com índice de refração muito maior do que o do meio que envolve o fotorreceptor. Esses sistemas visuais apresentam um *grande poder de resolução*.

Exemplo: Quando olhamos diretamente para um objeto, os raios de luz desse objeto convergem para a fóvea (a linha do centro da lente até a fóvea é denominada *eixo visual* e forma um ângulo aproximado de 4° com relação ao eixo da lente). A fóvea contém somente cones em um número aproximado de 10 000, e sua área é da ordem de $0,05 \text{ mm}^2$.

- Calcule a distância média entre os centros dos cones na fóvea.
- Para que a imagem que se forma na fóvea tenha um máximo poder de resolução, que ângulo é subtendido a partir do centro da lente?
- O objeto observado, cuja imagem se forma na fóvea, encontra-se a 100 m do olho; de quanto será sua dimensão linear?

Resolução: Se r é o raio médio de um cone, então $10\,000\pi r^2 \cong 0,05 \text{ mm}^2$ ou $r \cong 1,26 \times 10^{-3} \text{ mm}$.



- A distância média entre os centros dos cones será $2r \cong 2,52 \text{ nm}$.
- Considerando que a forma da fovea seja aproximadamente um círculo de raio a , teremos $\pi a^2 = 0,05 \text{ mm}^2$; logo, $a \cong 0,126 \text{ mm}$. Se a imagem formada na fovea tiver um comprimento igual a $2a$, então a fovea subtenderá um ângulo $\phi = \text{arco/raio} \cong 2 \times 0,126/250 = 0,001 \text{ rad} \cong 0,06^\circ \cong 3,6'$ medido desde o centro da lente.
- Por ser ϕ muito pequeno, desconsideraremos a pequena alteração de ϕ , no meio externo ao olho por efeito da refração experimentada. Logo, se h é a dimensão linear característica do objeto, cuja imagem tem o tamanho $2a$, teremos $\text{tg}\phi \cong h/100$, o que implica $h \cong 0,1 \text{ m}$.

Na discussão inicial sobre os *princípios físicos da fotorreceptividade*, foi considerado na Figura 11.12 que o extremo do fotorreceptor, que absorve a energia luminosa que a excitará, encontra-se no plano focal (PF) da lente do olho e que a luz que incide no PF é um ponto. Esta última consideração tem de ser aperfeiçoada, porque em uma *situação real* a luz, ao incidir no olho, passará a seu interior por uma pequena abertura, produzindo, assim, uma *figura de difração* no PF. De fato, como mostra a Figura 11.25, se a abertura tem um raio r , a figura de difração terá a forma da Figura 11.22; porém, somente o disco central da figura de difração será levado em conta, porque aqui se concentra 85% da luz. No meio de índice de refração n_0 , o compri-

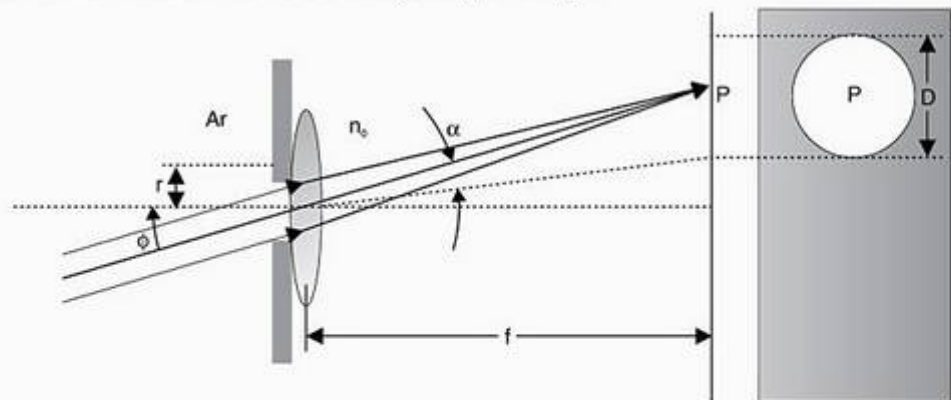


Figura 11.25 Disco central da figura de difração formada no plano focal da lente quando a luz passa através de uma abertura de raio r .

mento de onda da luz será $\lambda_0 = \lambda/n_0$, onde λ é o comprimento de onda no ar. Também $\text{sen}\alpha = 0,61 \frac{\lambda_0}{r} = 0,61 \frac{\lambda}{n_0 r}$. Se o diâmetro do disco é D com $D \ll f$, então teremos $\text{tg}\alpha \approx D/2f$; além disso, se $r \ll f$, o ângulo de incidência ϕ não poderá ser tão grande para obter-se um bom *poder de resolução* da figura de difração no PF. Com estas considerações $\text{tg}\alpha \approx \text{sen}\alpha$; logo,

$$\triangleright D = 1,22 \frac{\lambda}{r} \frac{f}{n_0}. \quad (11.14)$$

Como já mencionamos, o ponto P no PF pode cair dentro ou fora da entrada do fotorreceptor (veja Figura 11.13); então a situação no PF será algo semelhante ao mostrado na Figura 11.26. Em geral, o diâmetro d do fotorreceptor é $d \leq D$. Como o tamanho de D depende de r^{-1} , o tamanho de r regula o tamanho de D e o ângulo ϕ regula a posição do centro do disco no PF. Dessa forma, a *sensibilidade* do fotorreceptor que é proporcional à área de interseção destacada na Figura 11.26 dependerá de ϕ e de r . Pode-se mostrar que a sensibilidade é mais acentuada para valores do ângulo de incidência ϕ dentro do intervalo

$$\triangleright \Delta\phi = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2r}\right)^2 + \left(\frac{d}{f}\right)^2}. \quad (11.15)$$

No caso de um *olho composto*⁽¹¹⁾, se a lente possui um comprimento meio δ (por exemplo, nas abelhas $\delta \approx 5 \times 10^{-3}$ cm), o ângulo 2α subtendido pela lente até a entrada do rabdoma dependerá do raio R do olho ($2\alpha \approx \delta/R$). A Figura 11.27 mostra que para a abelha (R em cm) $\alpha \approx 2,5 \times 10^{-3}/R$. Dessa forma, para se ter uma *boa sensibilidade no fotorreceptor*, os ângulos de incidência ϕ sobre a lente deverão ser muito pequenos.

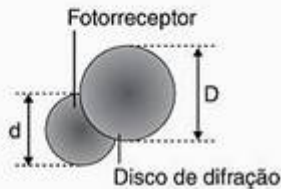


Figura 11.26 Cruzamento no plano focal do disco de difração e da abertura de um fotorreceptor.

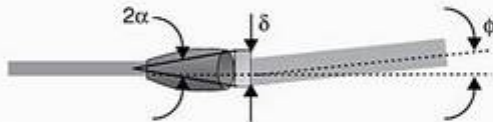
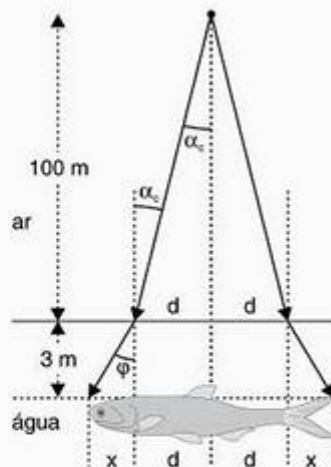


Figura 11.27 Omatídio de uma abelha com $\delta \approx 5 \times 10^{-3}$ cm.

Exemplo: O diâmetro da pupila de uma ave marinha é da ordem de 1 mm.

A ave está pairando no ar a 100 m da superfície do mar ($n = 1,333$) e enxerga um peixe que se encontra a 3 m de profundidade. Qual deverá ser o *tamanho mínimo* do peixe, se a luz que incide sobre o peixe tem comprimento de onda de 500nm?



Resolução: Essa situação corresponde ao caso de um sistema visual com *grande poder de resolução*. A resolução das fontes será máxima quando o critério Rayleigh for satisfeito. Na figura ao lado, se α_c for a separação angular crítica, então

$$\alpha_c = \arcsen(1,22 \times 5 \times 10^{-7} \text{ m} / 10^{-3} \text{ m}) = \arcsen(6,1 \times 10^{-4}).$$

$$\text{Portanto, } \text{sen}\alpha_c = 6,1 \times 10^{-4} \approx d/100 \text{ m} \Rightarrow d = 6,1 \text{ cm ou } 2d = 12,2 \text{ cm.}$$

Aplicando a lei de Snell na superfície que separa o ar do mar:

$$\text{sen}\alpha_c = 1,33 \text{sen}\phi, \text{ ou, } \text{sen}\phi = 4,575 \times 10^{-4}.$$

$$\text{Logo, } \text{sen}\phi \approx x/3 \text{ m} \Rightarrow x = 0,137 \text{ cm ou } 2x = 0,274 \text{ cm.}$$

Portanto, o tamanho mínimo do peixe deverá ser $2d + 2x = 12,5$ cm.



11.4 O OLHO HUMANO

O olho humano é um sistema óptico de primordial importância para o ser humano (veja suas partes principais na Figura 11.28). A luz atravessa o olho por uma abertura variável denominada *pupila* e é focalizada na *retina* pelo sistema córnea-cristalino.

A maior parte da refração ocorre na *córnea*, pois o cristalino tem índice de refração quase igual ao do meio em que está imerso. A espessura e a forma do cristalino podem ser ligeiramente alteradas pela ação do *músculo ciliar*. A retina recobre a superfície posterior do globo ocular e contém uma estrutura sensível, onde encontramos cerca de 125 milhões de receptores: *os cones e os bastonetes*. Estes são células que recebem a imagem e a transmitem ao *nervo óptico* através de cerca de um milhão de fibras.

Os *bastonetes* (veja a Figura 11.29) e os *cones*, nas diferentes partes da retina, têm formas e tamanhos diferentes. Os *cones* são células especializadas para a *visão da cor*, enquanto os *bastonetes* são células especializadas em *escurecer a luz*. O mecanismo de fotorrecepção de ambas as células é similar.

Analisaremos com mais detalhes uma célula bastonete. Essa célula tem uma estrutura que pode ser dividida em duas partes:

♦ O *segmento externo*, de formato cilíndrico, contém aproximadamente *mil discos* densamente empilhados. Os discos estão fisicamente separados da membrana desse segmento (veja sua estrutura na Figura 11.30).

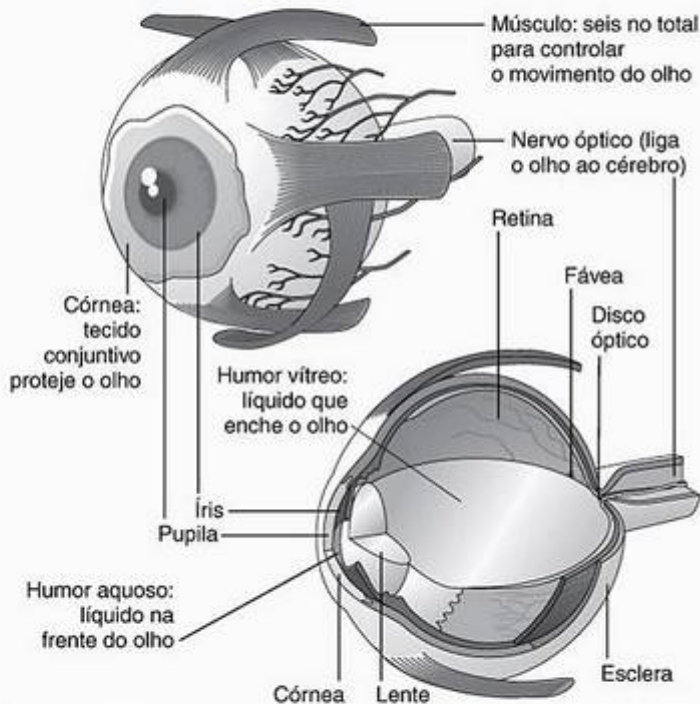


Figura 11.28 Corte esquemático do olho humano. A quantidade de luz que atinge a retina é regulada pela íris.

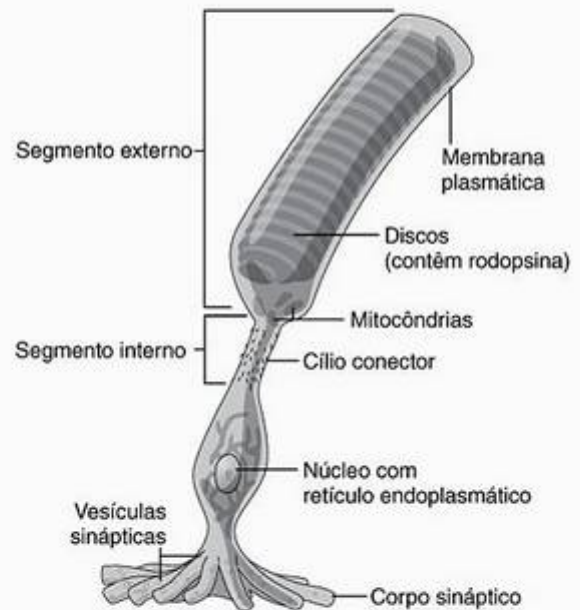


Figura 11.29 Estrutura de uma célula bastonete. Seus discos contêm compostos fotossensitivos. Seu corpo sináptico contém vesículas sinápticas que incluem neurotransmissores.

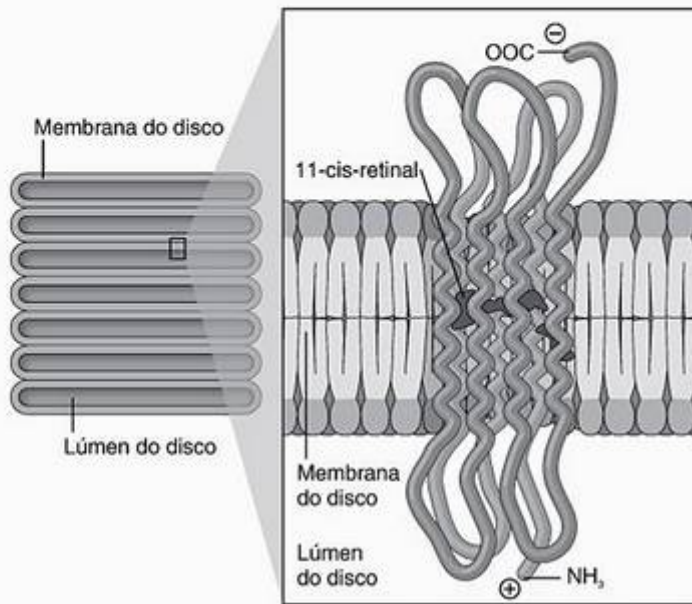


Figura 11.30 Estrutura da rodopsina. Esta proteína está embutida nas membranas em forma de discos. Aproximadamente, a metade de sua massa está no interior da membrana.

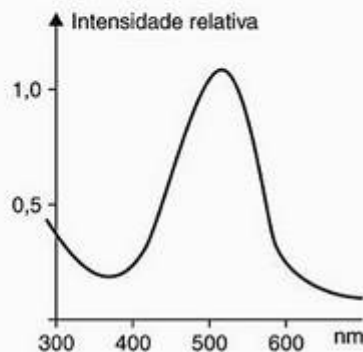


Figura 11.31 Espectro de absorção da rodopsina do olho humano.

O segmento externo está conectado por *cílios* ao segmento interno. Na membrana dos discos e do segmento externo do bastonete, encontramos a proteína denominada *rodopsina*. Essa proteína nas células visuais dos humanos tem um pico de absorção próximo a $\lambda \approx 500$ nm, como mostra a Figura 11.31.

Os bastonetes absorvem *luz verde* com maior eficiência do que outras cores do espectro eletromagnético. Em geral, a visão dos humanos é *tricromática* porque possui três tipos de receptores, os quais reagem com maior sensibilidade às cores: azul, verde e vermelha. Já as aves possuem quatro tipos de receptores; porém, o beija-flor teria uma visão *pentacromática* por possuir fotorreceptores sensíveis ao ultravioleta.

Visão noturna

Muitos animais diurnos não conseguem competir com os noturnos, principalmente quanto à visão, audição e tato. A coruja – assim como tantos outros animais noturnos – tem um *número de bastonetes* muito grande, o que lhe permite enxergar bem no escuro. A Figura 11.32 mostra os olhos de uma coruja. Notamos que, semelhante aos olhos de um humano, esses possuem em sua parte anterior uma lente, um cristalino que concentra a luz e bastonetes muito sensíveis à luz. Dessa maneira as corujas conseguem enxergar objetos pouquíssimo ou quase nada iluminados.

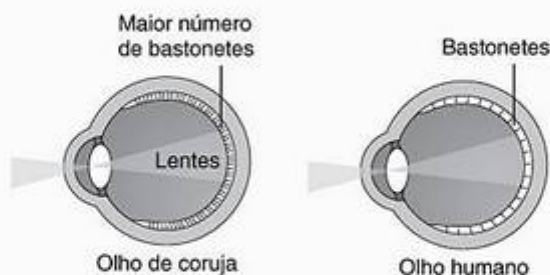


Figura 11.32 O número de bastonetes no olho da coruja é maior do que no do humano.

Alguns animais podem enxergar com muito *pouca luminosidade* porque seus olhos percebem cada raio de luz duas vezes. Como mostra a Figura 11.33, a luz incide nos bastonetes (A), a seguir reflete, como em um espelho, no fundo do olho (B) e sensibiliza novamente os bastonetes. Esse espelho é denominado *tapete*. Por esse motivo, no escuro, os olhos desses animais mostram um brilho bastante característico.

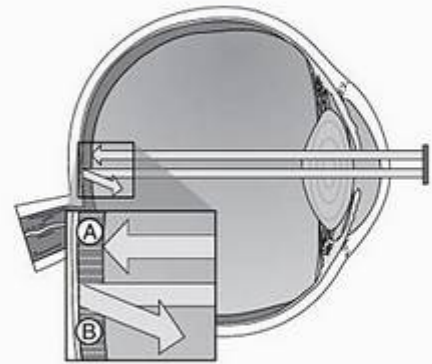


Figura 11.33 Tapete (B) do olho de alguns animais.

Visão do ultravioleta

A córnea, o cristalino e os demais meios ópticos transparentes do olho humano bloqueiam a chegada à retina de luz com $\lambda < 400$ nm (região ultravioleta). No entanto, eventualmente, se a luz ultravioleta chegasse à retina, as células fotorreceptoras *não seriam sensíveis* a essa radiação. Pensava-se que apenas os *invertebrados* seriam capazes de ver luz ultravioleta.

Em 1972, resultados de pesquisas mostraram que a visão de cores do pombo é afetada pela luz ultravioleta; porém, só em 1978, foram determinados os comprimentos de onda da luz ultravioleta para os quais suas células fotorreceptoras têm maior sensibilidade⁽¹²⁾.

Na década de 80, a visão ultravioleta foi descoberta em outras aves, lagartos e também em alguns peixes. Podemos concluir que, provavelmente, os vertebrados não-mamíferos tenham em comum essa capacidade⁽¹³⁾.

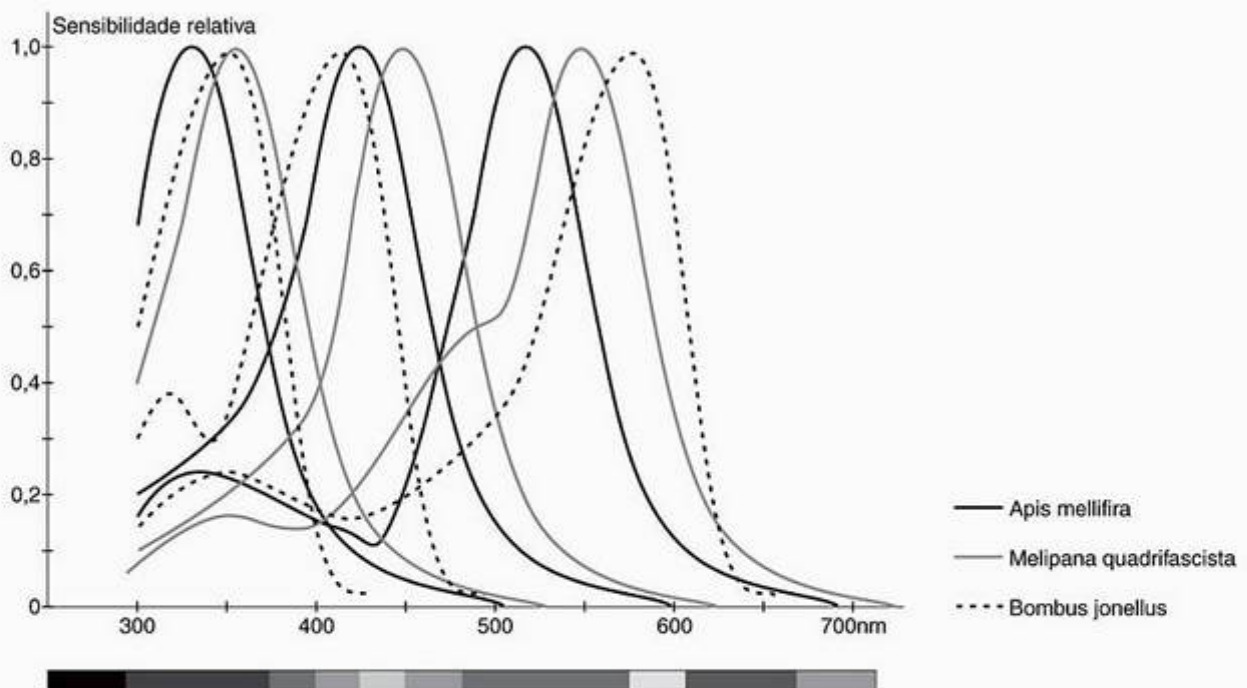


Figura 11.34 Curvas de sensibilidade espectral dos fotorreceptores de vários himenópteros.

Resultados publicados em 1981 mostraram que o *beija-flor* tem uma capacidade muito desenvolvida de discriminar cores. Outras experiências com o *beija-flor* fazem supor que eles possuem fotorreceptores sensíveis à luz ultravioleta. No entanto, não há ainda evidências de que as aves em geral possuam fotorreceptores sensíveis a esse tipo de luz. O que está comprovado é que as abelhas apresentam três tipos de fotorreceptores; cada um deles com sensibilidade máxima para luz ultravioleta, azul e verde, respectivamente. Na Figura 11.34, mostramos as curvas de intensidade luminosa dos fotorreceptores dos olhos compostos de vários himenópteros que visitam flores^(14,15).



11.5 POLARIZAÇÃO DA LUZ

Em geral, em uma onda eletromagnética, o vetor campo elétrico $\mathbf{E}$ tem todas as orientações transversais possíveis. Dizemos, então, que a onda *não está polarizada*. Para que a onda esteja polarizada, as vibrações do vetor $\mathbf{E}$ devem acontecer em uma mesma direção. Para que as ondas eletromagnéticas sejam polarizadas, utilizamos elementos denominados *polarizadores*. Na Figura 11.35 mostramos: a) luz não-polarizada; b) luz polarizada em duas direções; c) luz polarizada em uma direção; e d) um polarizador. Como a intensidade I da luz é $I \propto |\mathbf{E}|^2$, então, se I_0 for a intensidade da luz não-polarizada e I_1 , a intensidade da luz polarizada,

$$\blacktriangleright \quad I_0 \propto E_0^2 \text{ e } I_1 \propto E_1^2 \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} I_0, \quad (11.16)$$

sendo E_0 e E_1 as amplitudes máximas dos vetores campo elétrico da luz não-polarizada e polarizada, respectivamente.

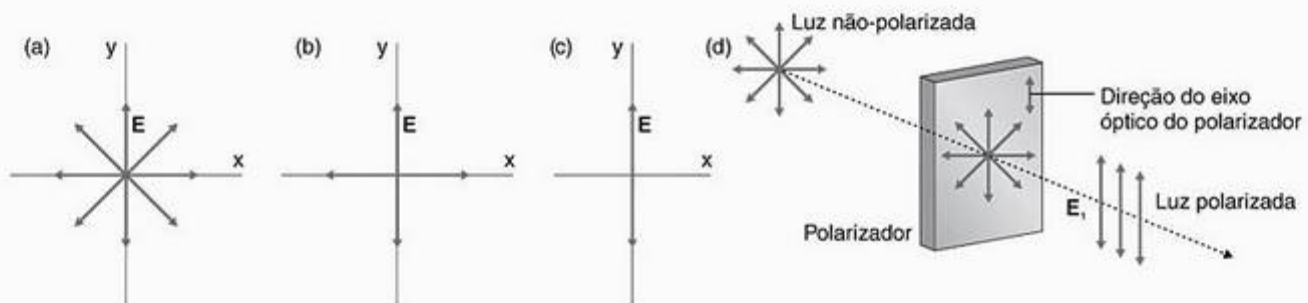


Figura 11.35 Vetor campo elétrico $\mathbf{E}$ para: a) luz não-polarizada; b) luz não-polarizada com todos os componentes de $\mathbf{E}$ nas direções x e y ; c) luz com polarização na direção y ; e d) produção de luz polarizada utilizando-se um polarizador. A intensidade da luz polarizada é 50% da luz não-polarizada.

Quando fazemos incidir um feixe de luz polarizada de intensidade I_1 sobre um segundo polarizador denominado *analisador* (veja a Figura 11.36) e cujo eixo óptico faz um ângulo θ com relação ao eixo do primeiro polarizador, então $E_2 = E_1 \cos \theta$. Logo, a intensidade da luz que atravessa o *analisador* será

$$\blacktriangleright \quad I_2 = E_2^2 = I_1 \cos^2 \theta. \quad (11.17)$$

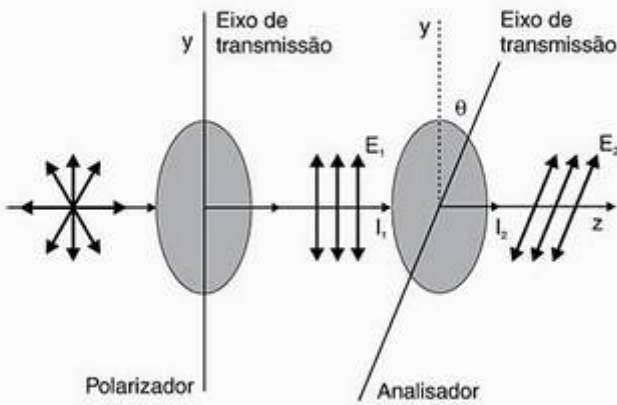


Figura 11.36 Dois polarizadores com seus eixos ópticos fazendo um ângulo θ .

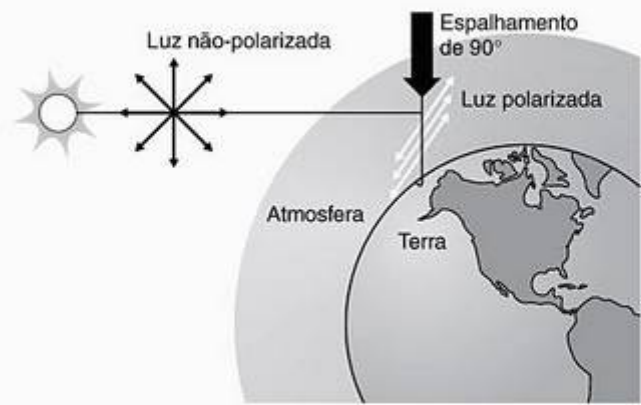


Figura 11.37 Luz solar não-polarizada é espalhada pelas moléculas da atmosfera. A luz espalhada é parcialmente polarizada.

Da equação (11.17), obtemos $\theta = 0 \Rightarrow I_2 = I_1$; $\theta = 90^\circ \Rightarrow I_2 = 0$; e $\theta = 45^\circ \Rightarrow I_2 = I_1/2$.

Como mostramos na Figura 11.37, a luz solar é espalhada e parcialmente polarizada pelas moléculas da atmosfera. Assim, em um ponto do céu, a intensidade e a direção da luz polarizada dependem da posição do ponto com relação ao Sol.

Quando o ângulo de espalhamento é 90° , o percentual de polarização é *máximo*, sendo aproximadamente de 70%.

Muitos experimentos com pássaros^(16,17,18,19) e com abelhas^(20,21,22) mostraram que eles têm a capacidade de detectar a polarização do céu; dessa maneira, as abelhas deduzem a posição relativa do Sol. Essa capacidade das abelhas deve-se, de acordo com a Figura 11.38, a cada rabdômero, que tem as células sensoriais linearmente arranjadas.

Experimentos com abelhas também mostraram que a direção de seu *movimento de dança*, além da dependência com o campo geomagnético, é realizada tomando-se como referência a posição relativa do Sol.

Para pesquisar se as abelhas são capazes de diferenciar cores, o etólogo austríaco Karl von Frisch criou um analisador que consistia de 8 lâminas polarizadoras em forma de triângulos, arranjados de maneira a formar um octógono, como mostra a Figura 11.39.

As abelhas, ao retornarem à colméia após colherem alimentos, *iniciam uma dança* que varia em rotação e direção de acordo com as diferentes posições da fonte de alimentos em relação ao Sol e à colméia. Um esquema desses movimentos para quatro posições relativas diferentes entre a fonte, a colméia e o Sol aparece na Figura 11.40. A dança da abelha permite localizar o lugar em que se acha o alimento. Parece certo que a abelha, com sua dança, fornece indicações de alimentos distantes até 3 km, com uma precisão de 50 m.

No experimento de Frisch com abelhas, elas foram condicionadas a voar na *direção leste* em uma colméia que, por meio do *analisador de Frisch*, somente lhes permitia ver uma parte do céu no leste (veja a Figura 11.41a).

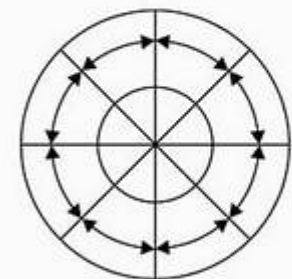


Figura 11.38 Rabdômero de uma abelha.

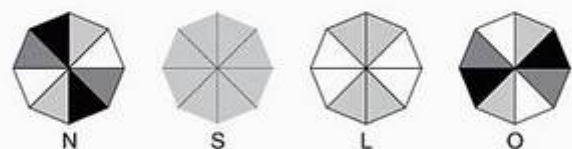


Figura 11.39 Diferentes regiões do céu vistas com um analisador de Frisch.

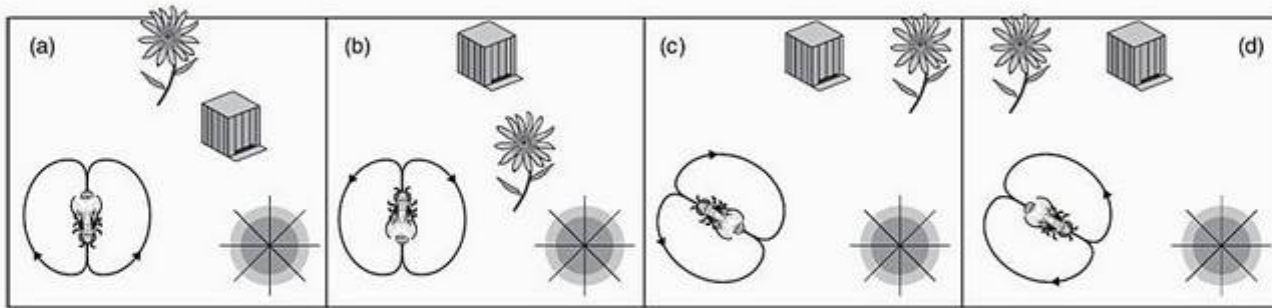


Figura 11.40 A direção da dança de uma abelha varia de acordo com a posição da fonte de alimento em relação à colméia e ao Sol.

A seguir foi colocada uma *lâmina polarizadora* sobre a colméia. Assim, com isso, e olhando através do analisador de Frisch, as abelhas se orientavam 35° ao sul do leste (veja a Figura 11.41b). Ao olharmos o céu 34° ao norte do leste com o analisador (veja a Figura 11.41c), observamos que a polarização do céu é a mesma que em (b). Portanto, as abelhas olhavam o leste através da lâmina polarizadora como se essa direção fosse 34° ao norte do leste.

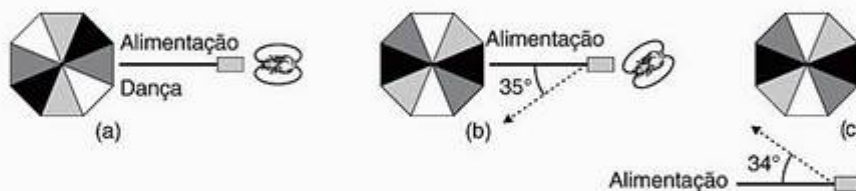


Figura 11.41 Experimento de Frisch para comprovar a habilidade das abelhas de navegar pela polarização do céu.

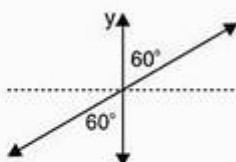
Exemplo: Luz não-polarizada de intensidade I_0 incide sobre um sistema polarizador-analisador. O eixo óptico do analisador faz um ângulo de 60° com o polarizador.

- Indique a direção de polarização da luz após o analisador.
- Qual é a intensidade de luz transmitida através do analisador?

Resolução: A intensidade da luz ao atravessar o polarizador será $I_p = (1/2)I_0 = 0,5I_0$.

- Considerando que a direção do eixo de transmissão do polarizador é a direção y , então a direção da polarização da luz, após o analisador, fará um ângulo de 60° com a direção y .

- A intensidade da luz transmitida pelo analisador será $I_a = I_p \cos^2 60^\circ = 0,125I_0$.

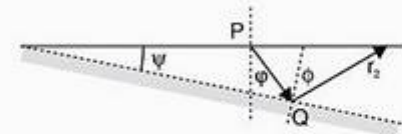
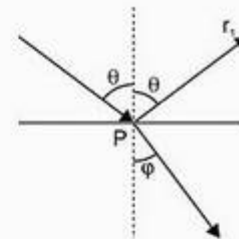
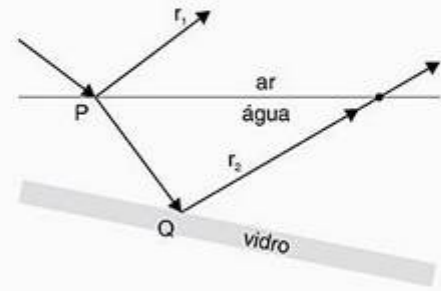


Exemplo: Toda vez que um feixe de luz *não-polarizada* incide sobre uma superfície que separa dois meios ópticos e seu raio refletido forma um ângulo de 90° com o refratado, então o raio refletido será *polarizado*. Na figura ao lado temos um bloco de vidro ($n = 1,5$) imerso em água ($n = 1,33$).

- Se o raio refletido r_1 estiver *polarizado*, qual será o ângulo de incidência?
- Se o raio refletido r_2 na superfície de vidro estiver *polarizado*, qual será o ângulo entre as superfícies vidro-água?

Resolução:

- No ponto P da superfície ar-água, por estar o raio r_1 polarizado, teremos $\theta + \phi = 90^\circ$; logo, $\sin\phi = \cos\theta$. Aplicando a lei de Snell neste ponto: $\sin\theta = 1,33 \sin\phi = 1,33 \cos\theta$. Portanto, $\tan\theta = 1,33$; o ângulo de incidência será $\theta = 53,13^\circ$; e o ângulo de refração será $\phi = 90^\circ - \theta = 36,87^\circ$.
- Aplicando a lei de Snell no ponto Q da superfície vidro-água, e lembrando que o raio refletido r_2 está polarizado, teremos $\tan\phi = 1,5/1,33 = 1,125$; portanto, $\phi = 48,36^\circ$. Da figura ao lado, $\phi = \phi + \psi$; logo, $\psi = 11,5^\circ$ será o ângulo entre as superfícies do vidro e da água.



11.6 LENTES E INSTRUMENTOS ÓPTICOS

Lentes e instrumentos ópticos são dispositivos ópticos feitos de material transparente (vidro, quartzo ou plástico) para deixar passar luz através deles. Nesses dispositivos, pelo menos uma de suas superfícies é circular. Geralmente, eles são de pequena espessura (*como as lentes delgadas*). A espessura da lente, ou seja, a distância entre suas bordas, é variável. As lentes podem ser:

- ♦ *convergentes ou positivas*: neste caso, pelo menos uma de suas superfícies é *convexa*, com raio de curvatura conhecido (veja a Figura 11.42a);
- ♦ *divergentes ou negativas*: neste caso, pelo menos uma de suas superfícies é *côncava*, com raio de curvatura conhecido (veja a Figura 11.42b).

Toda lente tem *dois pontos focais*; um deles é denominado *primário* e o outro, *secundário*. A distância entre o centro da lente e um dos pontos focais é denominada *distância focal f* da lente. Na Figura 11.43, mostramos os pon-

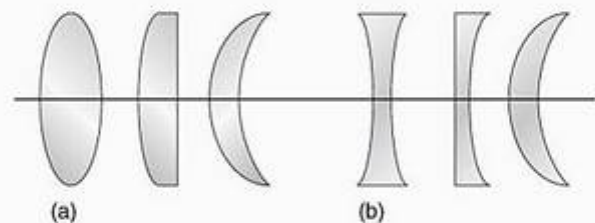


Figura 11.42 a) As três primeiras lentes são positivas; e b) as três últimas lentes são negativas.

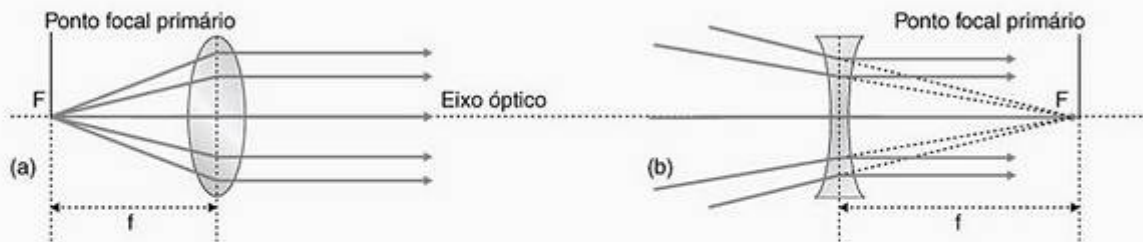


Figura 11.43 Ponto focal primário, eixo óptico e distância focal f de uma lente a) positiva; b) negativa.

tos focais de uma lente positiva e negativa; também é mostrado o eixo óptico da lente. Essa figura mostra que:

- ♦ todo raio de luz que passa por um ponto focal da lente, ao incidirem na lente os raios resultantes, tem *direção paralela* ao eixo óptico;
- ♦ todo raio de luz *paralelo* ao eixo óptico da lente, ao atravessá-la, deverá passar pelo ponto focal da lente.

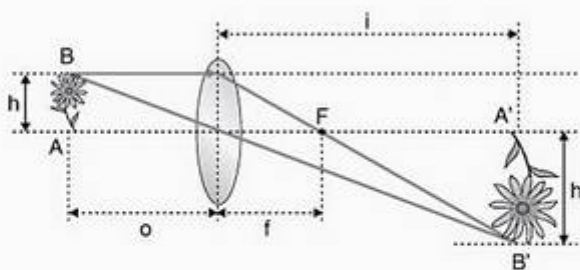


Figura 11.44 Imagem real fornecida por uma lente positiva de distância focal f .

Formação de uma imagem

Considere uma *lente positiva* de distância focal f . Um objeto AB se encontra a uma distância o da lente, e sua imagem $A'B'$ encontra-se a uma distância i (tal como mostra a Figura 11.44). Para determinar a imagem B' do ponto B , levamos em conta que:

- ♦ o raio que passa por B e pelo *centro da lente* não experimentará desvio algum ao atravessar a lente.

Se h e h' são os tamanhos do objeto e da imagem, respectivamente, então podemos mostrar que

$$\blacktriangleright \quad \frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}. \quad (11.18)$$

Essa equação é denominada *equação das lentes delgadas*. A *ampliação lateral* da imagem, ou aumento linear transversal, é definida como

$$\blacktriangleright \quad A = -(h'/h) = -(i/o). \quad (11.19)$$

A ampliação negativa significa que a *imagem é invertida* com relação ao objeto.

Exemplo: Um objeto se encontra a 4 cm na frente de uma lente de 6 cm de distância focal.

- a) Localize a posição da imagem.
- b) Que tipo de imagem é obtida?
- c) Qual é o aumento da imagem?

Resolução:

a) Da equação das lentes delgadas temos que

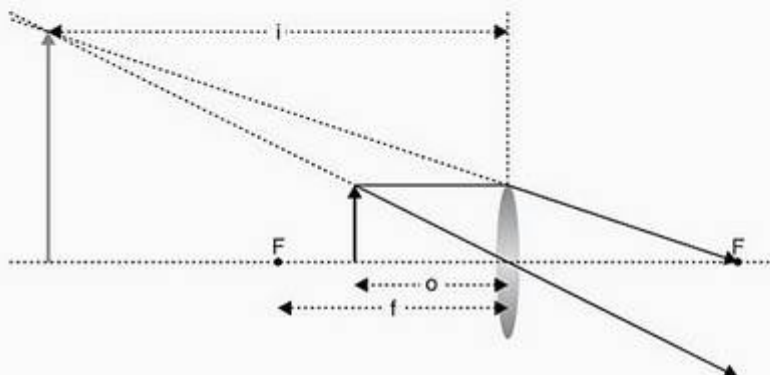
$$i = \frac{o \cdot f}{o - f} = \frac{4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}}{4 \text{ cm} - 6 \text{ cm}} = -12 \text{ cm}.$$

b) Essa imagem obtida é denominada *virtual*.

c) Pela equação (11.19), o aumento lateral da imagem será

$$A = -\left(\frac{-12 \text{ cm}}{4 \text{ cm}}\right) = 3.$$

Assim, a imagem é direita e maior que o objeto.



Exemplo: Uma câmara com uma lente de 50 mm de distância focal é utilizada para fotografar uma árvore de 25 m de altura. Se a imagem da árvore no filme tem 25 mm de altura, qual é a distância entre a câmara e a árvore?

Resolução: Pela equação (11.19), temos $(i/o) = (h'/h)$, sendo h e h' as alturas do objeto e da imagem, respectivamente. Logo, $\frac{1}{i} = \frac{1}{o} \cdot \frac{h}{h'}$.

Da equação das lentes delgadas $\frac{1}{o} + \frac{1}{o} \cdot \frac{h}{h'} = \frac{1}{f}$,

achamos $o = f \left(1 + \frac{h}{h'} \right) = 50,05 \text{ m}$.

Exemplo: Um naturalista quer fotografar um rinoceronte a 75 m de distância. O animal tem 4,0 m de largura, e sua imagem no filme deve ser de 1,2 cm de largura.

a) Que distância focal deveria ter a lente?

b) Qual seria o tamanho da imagem utilizando-se uma lente normal de 50 mm de distância focal?

Resolução:

a) Por um raciocínio similar ao do exemplo anterior, achamos que a distância focal da lente satisfaz a relação

$$f = \frac{o}{1 + \frac{h}{h'}} = \frac{75 \text{ m}}{1 + \frac{400}{1,2}} = 22,4 \text{ cm}.$$



b) Se, para fotografar o rinoceronte, utilizamos uma lente de $f = 50$ mm, então

$$\text{a distância da imagem seria } i = \frac{o \cdot f}{o - f} = \frac{7\,500 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}}{7\,500 \text{ cm} - 5 \text{ cm}} \approx 5 \text{ cm}.$$

A largura da nova imagem será

$$h' = h \cdot \frac{i}{o} = 400 \text{ cm} \cdot \frac{5 \text{ cm}}{7\,500 \text{ cm}} = 0,27 \text{ cm}.$$

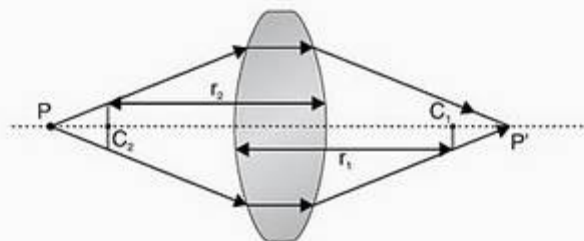


Figura 11.45 Lente biconvexa: as duas superfícies desviam os raios para o eixo.

Em geral, se considerarmos que uma *lente delgada* com índice de refração n encontra-se no ar, e se os raios de curvatura das superfícies da lente são r_1 e r_2 (como mostra a Figura 11.45), a distância focal f desta lente será

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (11.20)$$

Essa equação é conhecida como a *equação dos fabricantes de lentes*; isso porque dá a distância focal da lente delgada em função dos parâmetros da lente. Como $n > 1$, o

sinal de f dependerá dos sinais de r_1 e r_2 . As equações (11.18), (11.19) e (11.20) nos levam às seguintes observações:

- ♦ quando o objeto estiver longe da lente ($o \rightarrow \infty$), a imagem se formará no foco ($i = f$);
- ♦ quando o objeto se encontrar no foco ($o = f$), a imagem se formará longe da lente ($i \rightarrow \infty$);
- ♦ a ampliação lateral será *negativa* por ser a imagem invertida em relação ao objeto;
- ♦ a distância o será *positiva* quando h estiver no lado em que incide a luz (*objeto real*) e será *negativa* quando h estiver no lado oposto ao da incidência (*objeto virtual*);
- ♦ a distância i será *positiva* quando h' estiver no lado da lente oposto ao lado em que estiver incidindo a luz e será *negativa* se estiver no lado em que incidir a luz;

♦ o *raio de curvatura* será *positivo* se o centro de curvatura estiver à direita da superfície, que é o lado real; mas será *negativo* se o centro de curvatura estiver no lado esquerdo, ou virtual, da superfície.

Se escrevermos as distâncias objeto e imagem na forma: $o = xf$ e $i = yf$, onde x e y são números positivos ou negativos, a equação (11.18) tomará a forma:

- ♦ $(1/x) + (1/y) = 1$, para o caso das lentes positivas;
- ♦ $(1/x) + (1/y) = -1$, para o caso das lentes negativas.

O gráfico y em função de x dessas equações são curvas hiperbólicas, com simetria em relação à reta que passa pelos pontos $(0,0)$ e $(2,2)$. Essas curvas têm as assíntotas $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$.

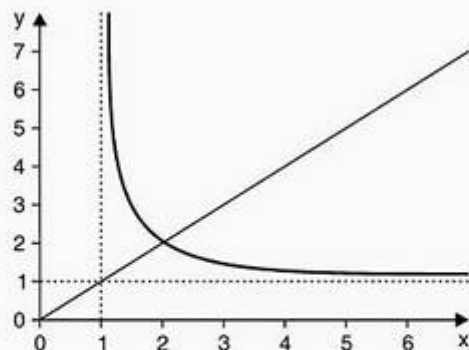


Figura 11.46 Gráfico da equação das lentes positivas.

Na Figura 11.46 mostramos o gráfico correspondente às *lentes positivas*. Nesse gráfico, um ponto de coordenadas (x,y) corresponde a uma distância objeto $o = xf$ e a uma distância imagem $i = yf$. Por exemplo, a coordenada $x = 3$ implica que $y = 1,5$; ou distância objeto $o = 3f$ e distância imagem $i = 1,5f$. Como se trata de uma *lente positiva*, então, $f > 0$; assim o e i serão sempre positivos.

O gráfico na Figura 11.46 tem as seguintes características, valores de:

- ♦ $x > 2$ implicam valores de $y < 2$;
- ♦ $x < 2$ implicam valores de $y < 2$;
- ♦ $x < 1$ não geram imagens reais.

Quanto menor é o valor de x , maior será o valor de y .

No caso de *lentes negativas*, o gráfico de y em função de x será no quadrante correspondente a valores negativos de x e y . Sua forma é similar ao gráfico das lentes positivas.

Exemplo: A distância entre a lente de um *projektor* e o diapositivo pode variar entre 20 cm e 30 cm. Se a distância focal da lente é 20 cm:

- a) Qual é a menor distância entre a lente e o anteparo, para focalizar a imagem?
- b) Discuta seu resultado no gráfico das lentes positivas (veja a Figura 11.46).

Resolução:

- a) Valores de distância objeto $20 \text{ cm} < o < 30 \text{ cm}$, para uma lente positiva de $f = 20 \text{ cm}$, implicam valores de x no intervalo $1 < x < 1,5$. Os correspondentes valores de y estarão dentro da faixa $\infty > y > 3$. Logo, a menor distância entre a lente e o anteparo para focalizar a imagem será $i_{\min} = y \cdot f = 3 \times 20 \text{ cm} = 60 \text{ cm}$.
- b) No gráfico da Figura 11.46 notamos que esse *projektor típico* toma valores (x,y) que se encontram no *extremo superior* da curva correspondente às lentes positivas.

Exemplo: Nas câmaras fotográficas mais comuns, normalmente a distância entre a lente e o filme é da ordem de 5 cm. Considere uma câmara com lente móvel de distância focal de 50 mm.

- a) A que distância deve-se posicionar um objeto para que sua imagem seja bem focalizada?
- b) Discuta seu resultado no gráfico das lentes positivas (veja a Figura 11.46).

Resolução:

- a) Para essa câmara, os valores de y estão em torno de $y = i/f = 1$. Os correspondentes valores de x serão muito grandes ($\rightarrow \infty$). O exato valor da dis-

tância objeto $o = x \cdot f$ dependerá do valor da distância imagem i . Normalmente, esses valores de o são da ordem de alguns metros.

- b) No gráfico da Figura 11.46, notamos que essa *câmara típica* toma valores (x,y) que se encontram no *extremo inferior* da curva correspondente às lentes positivas.

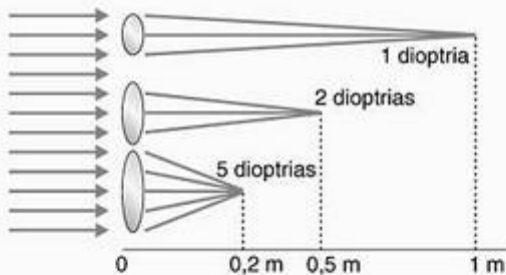


Figura 11.47 Convergência de lentes positivas.

Convergência de uma lente

Convergência de uma lente é a capacidade que uma lente tem de desviar os raios luminosos por refração. Se f é a distância focal da lente, a convergência C desta lente é dada por $C = 1/f$. Quando f é medido em metros, a convergência será medida em dioptrias (di). Três casos diferentes de convergência são mostrados na Figura 11.47.

No olho humano, a forma do cristalino pode ser ligeiramente alterada pela ação do *músculo ciliar*; logo, a convergência do olho é variável. Quando a vista é focalizada em um *objeto distante*, o músculo está relaxado, e o sistema cristalino-córnea tem a sua distância focal máxima, próxima a 2,0 cm, que é a distância entre a córnea e a retina (veja a Figura 11.48a). Quando o objeto está *próximo* da vista, o músculo ciliar se contrai, aumentando a curvatura do cristalino e diminuindo a distância focal do sistema. Assim, a imagem é focalizada, novamente, na retina (veja a Figura 11.48b).

O ponto mais próximo da vista em que o cristalino consegue focalizar a luz na retina é o *ponto próximo*. A distância entre o olho e o ponto próximo varia de pessoa para pessoa, e, em uma só pessoa, essa distância varia de acordo com a idade. Em geral, o valor do ponto próximo é *cerca de 25 cm*. Logo, se um objeto encontra-se no ponto próximo ($o = 25$ cm), para que sua imagem se forme na retina ($i = 2$ cm), a lente deverá ter $f = 1,85$ cm ou uma convergência $C_0 = 54$ di. Quando o objeto encontra-se no ponto distante ($o = \infty$), para que sua imagem se forme na retina ($i = 2$ cm), a lente deverá ter $f = 2$ cm ou uma convergência $C_\infty = 50$ di.

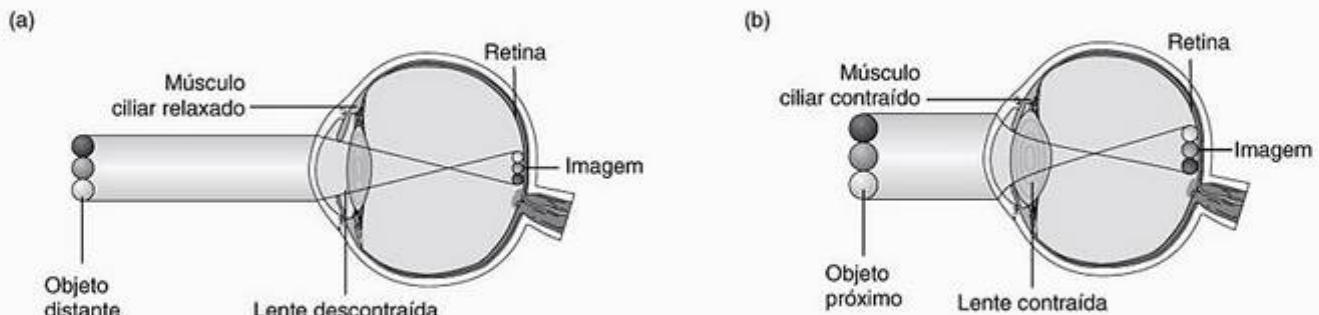


Figura 11.48 Convergência do olho humano.

Exemplo: Uma pessoa vê nitidamente objetos que se encontram a uma distância entre 25 cm a 400 cm de seus olhos. Determine o *poder de acomodação* do olho.

Resolução: Considere que o olho tem uma distância entre a lente e a imagem que se forma na retina de $i = 2$ cm.

Quando o objeto encontrar-se a uma distância $o = 400$ cm do olho, a lente terá uma distância focal $f_d = \frac{400 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}}{400 \text{ cm} + 2 \text{ cm}} = 1,99$ cm, ou uma convergência de $C_d = 100/1,99 = 50,25$ di.

Quando o objeto encontrar-se a uma distância $o = 25$ cm do olho, a lente terá uma distância focal $f_p = \frac{25 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}}{25 \text{ cm} + 2 \text{ cm}} = 3,52$ cm, ou uma convergência de $C_p = 100/3,52 = 54$ di. Assim, o *poder de acomodação* desse olho será $C_p - C_d = 3,75$ di.

Exemplo: Em um *olho normal*, todo objeto distante ($o = \infty$) forma uma imagem nítida na retina ($i = 2$ cm). Um certo olho apresenta o seguinte defeito: objetos a distância maiores do que 5 m não têm imagem nítida na retina. Que potência deverá ter uma lente que, ao ser colocada na frente do olho, corrige esse defeito?

Resolução: A lente corretora deverá formar a imagem de objetos muito distantes ($o = \infty$) a uma distância $i = -50$ cm. Logo, a distância focal dessa lente corretora será $f = i = -50$ cm $= -0,5$ m. Assim, a potência da *lente corretora negativa* é $C = 1/f = -2$ di.

Lente de aumento e lupa simples

A *lente de aumento* é um dispositivo óptico que consiste de uma lente positiva. O objeto é colocado frente à lente, de tal maneira que a imagem resultante é *direita, ampliada e virtual* (a Figura 11.49 mostra essa situação).

Para conseguirmos uma imagem com essas características, no gráfico das lentes devemos ter $x < l$ ou $o < f$.

Por exemplo, para uma lente com $f = 10$ cm e $o = 6$ cm ($o < f$), a distância imagem será $i = -15$ cm. Ou seja, a *imagem será virtual*. A ampliação lateral será $A = -i/o = 2,5$, o que corresponde a uma imagem direita e ampliada.

A *lupa simples* é uma lente positiva que aumenta o tamanho aparente de um objeto. Na Figura 11.50a temos um objeto de altura h em torno do *ponto próximo* do olho. O objeto subtende

um ângulo $\psi \cong g\psi = \frac{h}{25 \text{ cm}}$ com a vista desarmada.

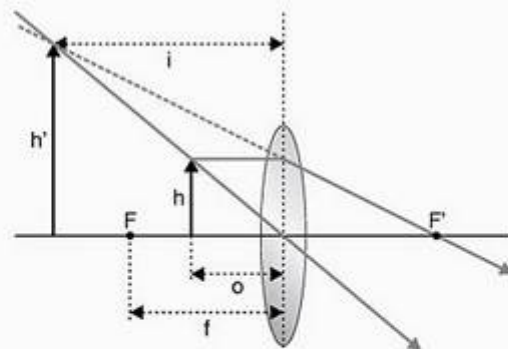


Figura 11.49 Toda vez que $o < f$ para uma lente positiva, a imagem produzida é direita e ampliada.

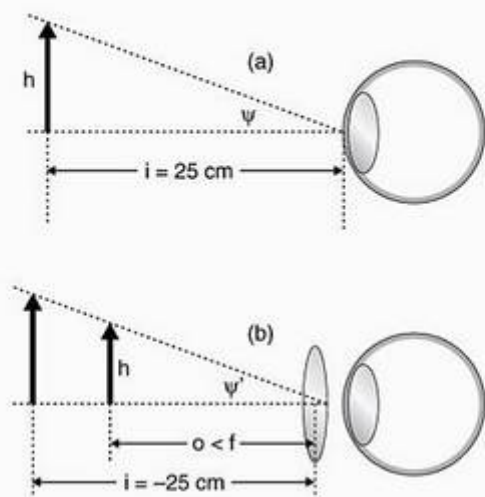


Figura 11.50 Objeto: a) no ponto próximo do olho; e b) próximo da lupa.

Se o objeto estiver no ponto focal de uma lente positiva de distância focal f menor do que a distância mínima de visão, que é próxima aos 25 cm, a imagem formada pela lente será virtual, direita, estará no infinito e poderá ser olhada pela vista relaxada.

Essa imagem subtende um ângulo $\phi \approx \tan \phi = h/f$.

A razão entre os ângulos ϕ/ψ é definida como o *aumento angular* M da lente. Logo, o aumento da lupa quando a imagem estiver no infinito será $M = \phi/\psi = 25 \text{ cm}/f$.

Se o objeto ficar próximo da lente de distância focal menor do que 25 cm (nessa situação a lente atua como uma lupa), a imagem também ficará mais próxima, e o ângulo subtendido ψ' crescerá (veja a Figura 11.50b). O maior aumento angular corresponde à posição mais próxima da imagem, que é no ponto próximo a 25 cm; logo,

$$\frac{1}{o} - \frac{1}{25} = \frac{1}{f} \quad \text{ou} \quad o = \frac{25f}{25 + f}.$$

Assim, quando a imagem estiver no ponto próximo, o ângulo subtendido será $\psi'' \equiv \tan \psi'' = h/o = \frac{(25 + f)h}{25f}$. Nessa situação física, o aumento angular da lupa será

$$\blacktriangleright \quad M = \frac{\psi''}{\psi} = 1 + \frac{25 \text{ cm}}{f}. \quad (11.21)$$

Exemplo: Qual é o aumento de uma lente que tem 20 dioptrias de potência?

Resolução: A distância focal dessa lente é $f = 1/C = 1/20 \text{ di.} = 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$. Pela equação (11.21), o aumento angular da lente será $M = 1 + (25 \text{ cm}/5 \text{ cm}) = 6$.

Exemplo: a) Qual é a distância focal de uma lupa com um aumento de 10?
b) A que distância tem que estar o objeto da lupa para obtermos esse aumento?

Resolução:

- a) Pela equação (11.21), a lupa com $M = 10$ corresponde a uma *lente positiva* de distância focal: $f = 25 \text{ cm}/9 = 2,78 \text{ cm}$.
- b) Para um olho normal, seu *ponto próximo* é aproximadamente 25 cm. Dessa forma, a imagem produzida pela lupa deverá se localizar a: $i = -25 \text{ cm}$, e o objeto estará localizado a: $o = \frac{i \cdot f}{i - f} = \frac{-25 \text{ cm} \times 2,78 \text{ cm}}{-25 \text{ cm} - 2,78 \text{ cm}} = 2,5 \text{ cm}$ do lado esquerdo da lente.

Microscópio óptico

O microscópio óptico é um instrumento óptico que, em sua forma mais simples, é constituído por *duas lentes convergentes*. A lente mais próxima do objeto é a *objetiva* e forma uma imagem real do objeto. A lente mais próxima à vista é a *ocular* e é utilizada como uma lupa para examinar a imagem formada pela objetiva. (Na Figura 11.51 mostramos o esquema básico de um microscópio.)

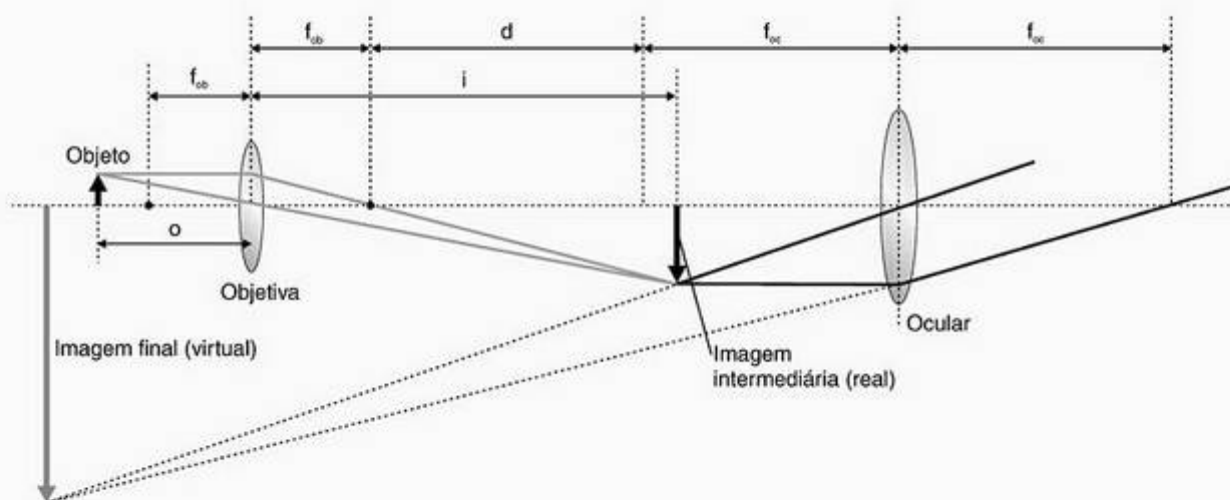


Figura 11.51 Microscópio óptico constituído de duas lentes positivas. A lente objetiva está perto do objeto cuja imagem final (virtual) será ampliada em tamanho; a lente ocular está perto da vista.

A *ampliação lateral* da objetiva será $A = |i/o| = (i - f_{ob})/f_{ob} = (i/f_{ob}) - 1$, enquanto o *aumento angular* da ocular dependerá da focalização da imagem final (virtual). Se a separação das lentes $\epsilon = d + f_{ob} + f_{oc}$ for ajustada até que

♦ a imagem virtual esteja no ponto próximo do olho, então, $M = 1 + 25 \text{ cm}/f_{oc}$, e o *aumento total* do microscópio será

$$\blacktriangleright \quad m = A \cdot M = \left(\frac{i}{f_{ob}} - 1 \right) \left(1 + \frac{25 \text{ cm}}{f_{oc}} \right); \quad (11.22)$$

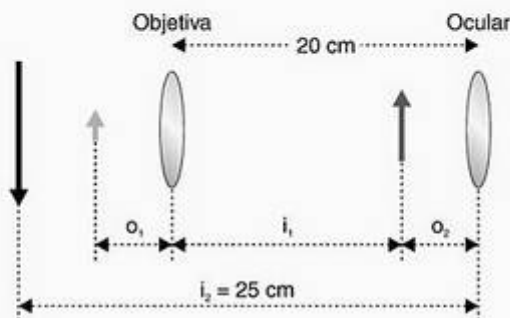
♦ a imagem real esteja no ponto focal da ocular, então, $M = 25 \text{ cm}/f_{oc}$, nesse caso, o *aumento total* do microscópio será

$$\blacktriangleright \quad m = A \cdot M = - \frac{d}{f_{ob}} \cdot \frac{25 \text{ cm}}{f_{oc}}. \quad (11.23)$$

Essa é a condição na qual o olho está descontraído, sendo a mais usual ao utilizarmos um microscópio.

Exemplo: Um microscópio está ajustado para produzir um aumento total de 100. Neste ajuste, a distância entre as lentes ocular ($f_{oc} = 12,5 \text{ mm}$) e a objetiva é de 20 cm. Se a imagem final se encontrar a 25 cm da ocular, determine:

- a) a distância focal da objetiva;
 b) a posição do objeto que é observado com o microscópio.



Resolução: A lente ocular atua como uma lupa; logo, pela equação (11.21), o aumento devido a essa lente será $M_{oc} = 1 + 25 \text{ cm}/1,25 \text{ cm} = 21$. Pela equação (11.22), achamos $(i_1/f_{ob}) - 1 = 100/21 = 4,762$, ou, $(i_1/f_{ob}) = 5,762$.

Com relação à lente ocular: $\frac{1}{o_2} + \frac{1}{i_2} = \frac{1}{f_{oc}}$; por ser $i_2 = -25 \text{ cm}$, teremos $o_2 = 1,19 \text{ cm}$.

Da figura ao lado concluímos que $i_1 = 20 \text{ cm} - 1,19 \text{ cm} = 18,81 \text{ cm}$.

- a) A distância focal da lente objetiva será $f_{ob} = 18,81 \text{ cm}/5,762 = 3,26 \text{ cm}$.
 b) A distância do objeto até a lente objetiva será

$$o_1 = \frac{i_1 \cdot f_{ob}}{i_1 - f_{ob}} = \frac{18,81 \text{ cm} \times 3,26 \text{ cm}}{18,81 \text{ cm} - 3,26 \text{ cm}} = 3,94 \text{ cm}.$$

Exemplo: A objetiva de um microscópio possui uma distância focal de 0,5 cm e está a 16 cm da ocular. Sabendo-se que o aumento total desse microscópio é 600 e que a imagem final é vista no infinito, determine:

- a) a distância focal da ocular;
 b) o aumento angular do microscópio.

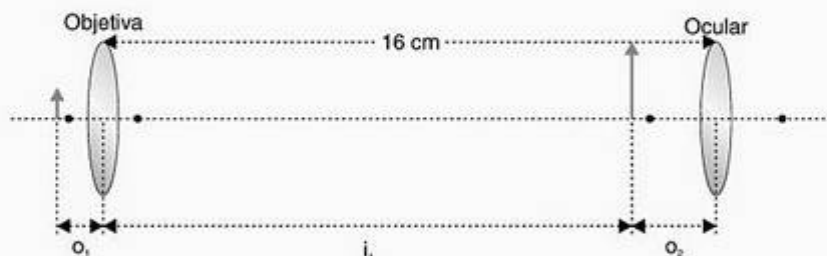
Resolução:

- a) Quando a imagem final encontra-se em $i_2 = \infty$, o aumento total é dado pela equação (11.23); logo, a distância focal f_{oc} da lente ocular será

$$f_{oc} = (25 \text{ cm}/600) (16 \text{ cm}/0,5 \text{ cm}) = 1,33 \text{ cm}.$$

- b) O aumento angular do microscópio para essa situação física é

$$M = 25 \text{ cm}/1,33 \text{ cm} = 18,75.$$





11.7 DEFEITOS VISUAIS DO OLHO HUMANO

Os fenômenos da visão de objetos seguem as três etapas seguintes:

- ♦ estímulo causado pela luz proveniente do objeto;
- ♦ recepção pelo olho, onde se forma a imagem na retina;
- ♦ e sensação de visão que corresponde ao processamento das informações transmitidas do olho para o cérebro.

Essas etapas estão mostradas na Figura 11.52.

Na maioria dos casos, os *defeitos visuais* referem-se à *focalização*, isto é, o olho não produz imagens nítidas dos objetos ou das cenas. Assim, é comum observarmos pessoas que *aproximam* os objetos dos olhos, enquanto outras procuram *afastá-los* para enxergá-los nitidamente. Um olho normal pode *focalizar nitidamente* objetos localizados em distâncias que vão desde o infinito até próximo aos 15 cm a sua frente. Isto é resultado da ação conjunta do *cristalino* e do *músculo ciliar* (veja a Figura 11.28, anteriormente). Esse processo de arranjo desses componentes do olho é denominado *acomodação visual*.

A posição do *ponto próximo* de um olho depende de quanto pode variar a curvatura do cristalino, mediante a acomodação. A idade de uma pessoa tem influência direta na variação da acomodação do olho; esta é a razão pela qual o ponto próximo afasta-se gradualmente à medida que a pessoa envelhece. Esse afastamento do ponto próximo com a idade é denominado *presbitismo* ou *presbiopia*, ou seja, não se enxerga bem a pequenas distâncias. Como isso acontece quase da mesma forma em todos os olhos normais, a *presbiopia* não é considerada um defeito de visão. A correção desse problema é obtida pelo uso de uma *lente convergente*; a lente deve ser bifocal: a parte inferior da lente é usada para a visão de objetos próximos, e a parte superior é usada para a visão de objetos distantes.

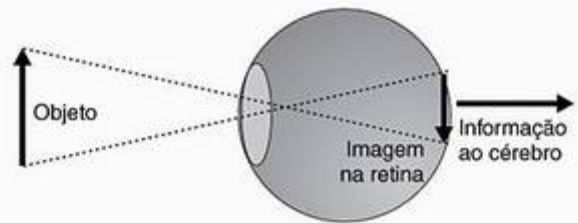


Figura 11.52 Na formação de uma imagem no olho, o estímulo externo produz potenciais de ação na retina que são transmitidos ao cérebro para serem interpretados.

Ametropias oculares

Vários defeitos de visão devem-se à desarmonia entre o sistema óptico do olho e seu comprimento axial, ou seja, há uma *relação incorreta* entre os diversos elementos que constituem o globo ocular. O olho normal, ou *emetropia*, quando está em

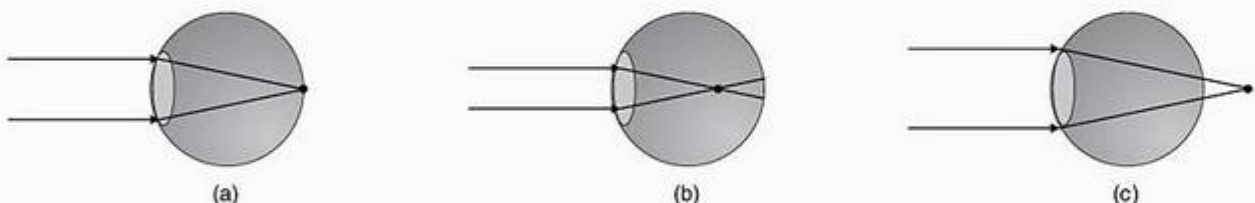


Figura 11.53 Ametropias oculares: a) emetropia; b) miopia; e c) hipermetropia.

repouso, forma na retina a imagem de objetos situados no infinito; tal situação é mostrada na Figura 11.53a.

O *olho amétrope* é aquele cujo ponto remoto não está situado no infinito e ele dá origem a dois tipos de defeitos visuais:

♦ a *miopia* (ou braquiometropia) está associada à dificuldade em enxergar-se objetos distantes. As imagens são focalizadas na parte anterior à retina, como é mostrado na Figura 11.53b. Para pessoas com esse defeito, os objetos mais afastados, e cuja imagem se forma na retina, não estão situados no infinito, ou seja, seu ponto remoto encontra-se a uma distância finita do olho. Em um olho míope, seu ponto próximo fica mais próximo do olho do que no de um olho normal;

♦ a *hipermetropia* está associada à dificuldade de enxergar-se objetos próximos; e as imagens são focalizadas atrás da retina, como é mostrado na Figura 11.53c. Se a capacidade de acomodação visual for normal, o ponto próximo de um olho hipermetrope estará mais distante do que o de um olho normal.

Esses dois defeitos estão relacionados com a *convergência* de um feixe de raios paralelos. Quando essa é *demasiadamente grande*, a imagem se forma antes da retina (miopia); e, quando é *insuficiente*, a imagem se forma após a retina (hipermetropia). Em ambos os defeitos, o olho pode ter suas dimensões axiais iguais às de um olho normal.

A *correção das ametropias* é feita utilizando-se lentes convergentes ou divergentes. Dessa maneira, um olho *míope* necessita de lentes *divergentes* para sua correção (veja a Figura 11.54a), enquanto um olho *hipermetrope* necessita de lentes *convergentes* (veja a Figura 11.54b).

As lentes utilizadas para correção das ametropias devem ter uma distância focal que coincida com o *ponto remoto* do olho em questão, ou seja, a imagem que a lente corretora fornece de um objeto situado no infinito deve ser formada no ponto remoto do globo ocular. Dessa maneira, um dos focos da lente deve coincidir com o ponto remoto do olho.

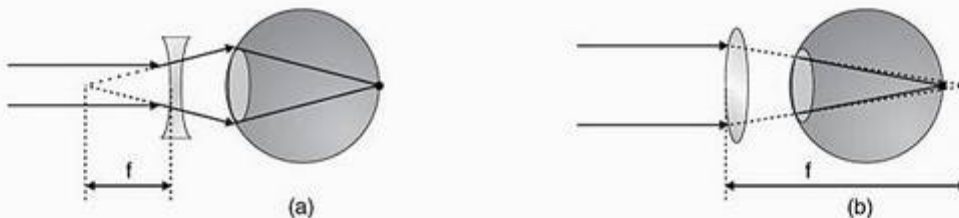


Figura 11.54 A correção da focalização é feita com uma lente: a) negativa para um olho míope; e b) positiva para um olho hipermetrope.

Exemplo: Qual é a potência dos óculos necessários para:

- um olho míope cujo ponto distante está a 50 cm?
- um olho hipermetrope com ponto máximo a 125 cm?

Resolução:

- a) A lente corretora para o olho míope deve formar a imagem de objetos distantes ($o = \infty$) a uma distância $i = -50$ cm. Logo, a distância focal da lente será $f = i = -50$ cm $= -0,5$ m; portanto, sua potência é $C = 1/f = -2$ di.
- b) Para o olho hipermetrope, a lente corretora formará a uma distância $i = -125$ cm a imagem de um objeto a $o = 25$ cm da lente (ponto próximo do olho normal).

$$\text{Logo, a distância focal da lente é } f = \frac{o \cdot i}{o + i} = \frac{-25 \text{ cm} \times 125 \text{ cm}}{25 \text{ cm} - 125 \text{ cm}} = 31,25$$

cm; portanto, sua potência será $C = 1/f = 3,2$ di.

O *astigmatismo* é um defeito da visão que consiste na perda de focalização em determinadas direções. Acontece quando o *cristalino* tem forma irregular ou a *córnea* tem curvatura irregular. A perda de esfericidade da córnea faz com que o raio de curvatura de sua superfície não seja o mesmo em todos os meridianos. As imagens se produzem distorcidas e/ou borradas na retina, pois essas se formam em diferentes posições do eixo óptico (veja a Figura 11.55).

Esse defeito é corrigido com o uso de lentes denominadas *cilíndricas*. Na oftalmologia são utilizados dois tipos de cilindros: os positivos e os negativos; ambos podem ser utilizados para a correção do astigmatismo.

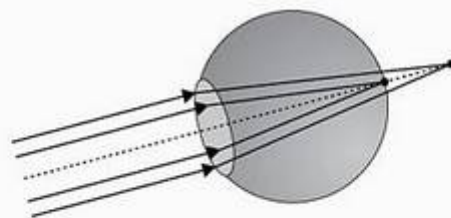


Figura 11.55 Raios de luz de um objeto no infinito, incidindo sobre um olho astigmático.

Exemplo: Para ler um livro colocado a 25 cm dos olhos, um *presbita* usa óculos com lentes cuja convergência é 2 di. Com o passar dos anos, sua presbiopia aumenta, e o livro deve ser colocado a 35 cm do olho para que ele possa ler, usando ainda os mesmos óculos.

- a) Para que a pessoa torne a ler um livro colocado a 25 cm de seus olhos, ela deverá usar lentes de que convergência?
- b) Qual será o ponto próximo da pessoa nas duas situações?

Resolução: Quando o objeto se encontra a $o = 35$ cm da lente, a imagem se forma na retina do olho ($i = 2$ cm). Logo, a distância focal da lente deverá ser

$$f = \frac{o \cdot i}{o + i} = \frac{35 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}}{35 \text{ cm} + 2 \text{ cm}} = 1,89 \text{ cm, ou, potência de } C = 1/f = 52,86 \text{ di.}$$

- a) A convergência do ponto próximo de um olho normal é 54 di; portanto, a correção será $54 \text{ di} - 52,86 \text{ di} = 1,14 \text{ di}$. Assim, a convergência das novas lentes deverá ser de $2 \text{ di} + 1,14 \text{ di} = 3,14 \text{ di}$.

- b) A convergência *inicial* do cristalino é $54 \text{ di} - 2 \text{ di} = 52 \text{ di}$, ou, distância focal de $f = 1/C = 1,92 \text{ cm}$. Nessas condições, o ponto próximo, para que a imagem se forme na retina ($i = 2 \text{ cm}$), é

$$o = \frac{i \cdot f}{i - f} = \frac{2 \text{ cm} \times 1,92 \text{ cm}}{2 \text{ cm} - 1,92 \text{ cm}} = 49,92 \text{ m}.$$

Com as novas lentes de distância focal: $f = 1/(54 \text{ di} - 3,14 \text{ di}) = 1,97 \text{ cm}$, para a imagem formar-se na retina ($i = 2 \text{ cm}$), o novo ponto próximo será

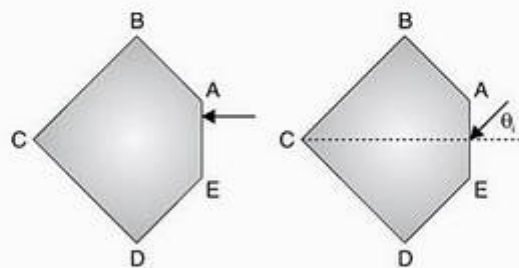
$$o' = \frac{i \cdot f}{i - f} = \frac{2 \text{ cm} \times 1,97 \text{ cm}}{2 \text{ cm} - 1,97 \text{ cm}} = 116,5 \text{ cm} = 1,16 \text{ m}.$$



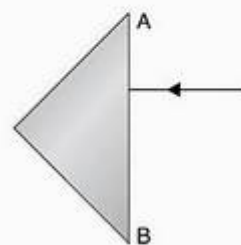
PROBLEMAS

- Qual é a velocidade da luz em um diamante? (Veja a Tabela 11.1.)
 - Se a velocidade da luz no topázio é $1,85 \times 10^8 \text{ m/s}$, qual é o índice de refração do topázio?
- Qual é a frequência da luz verde com um comprimento de onda de 525 nm ?
 - Quando essa luz penetra no vidro ($n = 1,50$), sua frequência não muda, mas, sim, sua velocidade e seu comprimento de onda. Qual é o comprimento de onda dessa luz no vidro?
- Um raio de luz incide em um espelho plano:
 - Se o espelho gira em um ângulo θ em torno de um eixo perpendicular ao plano de incidência, em quanto se altera seu ângulo de reflexão?
 - Se o espelho é giratório e o raio refletido incide em um espelho fixo localizado a 1 km de distância, calcular a velocidade angular do espelho, considerando que o raio que volta forma, após sua reflexão, um ângulo de $1'$ com o raio incidente inicial θ .
- Um recipiente de 10 cm de altura contém álcool ($n = 1,361$), enquanto outro recipiente idêntico contém uma capa de água ($n = 4/3$) sobre a qual flutua uma capa de óleo ($n = 1,473$). Ambos os recipientes estão cheios, se cada recipiente contém o mesmo número de ondas quando a luz o atravessa verticalmente, qual será a espessura da capa de óleo?
- Uma balsa quadrada de $3,05 \text{ m}$ de lado está flutuando em uma lagoa calma. Descreva o volume embaixo da balsa, no qual um peixe pode nadar, sem ser visto por alguém que se encontre acima da água ($n = 4/3$) e que esteja olhando a balsa.
- Faça um gráfico do ângulo de incidência em função do ângulo de refração para um feixe de luz amarela incidindo sobre uma interface água-ar, sendo $n_{\text{água}} = 1,33$. Comente.

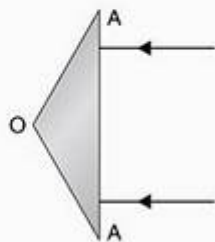
7. Um peixe olha o céu através da água de um lago calmo. No céu, há quatro estrelas em ângulos 25° , 45° , 65° e 85° ao zênite. Determinar os ângulos aparentes dessas estrelas, ao ser observado pelo peixe.
8. A seção longitudinal de um diamante lapidado ($n = 2,4$) tem a forma de um pentágono regular. Um feixe luminoso incide perpendicularmente sobre a face AE.
 - a) Determine a trajetória desse feixe até que ela saia do cristal. Justifique.
 - b) Qual deve ser o maior ângulo θ_i de incidência na face AE de forma que ainda ocorra reflexão total na face BC?
 - c) Um diamante lapidado é chamado brilhante; este nome se justifica?
9. Um tanque retangular de 2 m de altura está cheio de água ($n = 1,33$). Um raio luminoso incide na água em um dos lados do tanque com um ângulo de 60° . Determine a distância atingida no fundo pelo raio a partir desse lado.
10. As leis da reflexão e da refração são as mesmas para as ondas luminosas e sonoras. Define-se índice de refração de um meio como sendo a razão entre as velocidades da onda no ar e no meio. Dados: a velocidade do som na água = 1 500 m/s e a velocidade de som no acrílico = 2 800 m/s.
 - a) Calcule o ângulo crítico para que ocorra a reflexão total do som na interface ar-água de uma piscina.
 - b) Determine a trajetória do som supondo que o ângulo de incidência na água seja de $11,5^\circ$ e que as paredes da piscina sejam de acrílico.
 - c) Você poderia dizer por que dentro da piscina é tão silencioso? Justifique.
11. Para o som, o índice de refração de um meio também é definido como a razão entre as velocidades do som no ar (344 m/s) e no meio.
 - a) Determine o índice de refração da água, sabendo-se que a velocidade do som na água é 1 500 m/s.
 - b) Qual é o ângulo crítico para a reflexão total do som na interface ar-água?
12. O ângulo de incidência de um raio luminoso em uma lâmina de faces paralelas de espessura d vale θ_i . O índice de refração da lâmina é n_2 e ela está em um meio com índice de refração n_1 . Determine o ângulo do raio emergente da lâmina.
13. Considere uma janela de vidro ($n = 1,52$) de 3 mm de espessura. Um feixe de luz incide perpendicularmente sobre uma de suas superfícies. Determine a intensidade do feixe transmitido ao ar pela outra superfície.
14. Um prisma de índice de refração $\sqrt{2}$ que está no ar tem por seção reta um triângulo isósceles. O que acontece a um feixe que incide perpendicularmente à face AB?



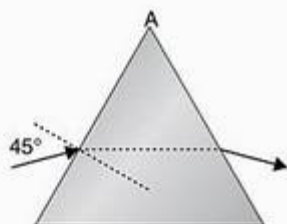
$$\hat{A} = \hat{E} = 135^\circ; \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$$



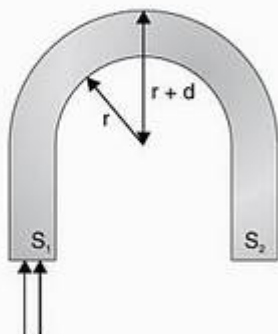
15. Um raio de luz incide com um ângulo de 30° sobre um prisma ($n = 1,5$) cujo ângulo do vértice superior é $\psi = 55^\circ$. Calcule os ângulos que formam o raio com os lados do prisma. Qual é o ângulo de desvio δ ?



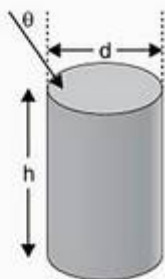
16. Um prisma colocado no ar tem um índice de refração igual a $\sqrt{2}$, e seus ângulos A são iguais a 30° . Considere dois raios de luz que incidem perpendicularmente à face maior.
- Calcule o ângulo entre os raios emergentes do prisma.
 - Qual deve ser o índice de refração do prisma para que haja reflexão total na face OA?



17. Um raio de luz incide sobre um prisma de vidro no ar. O ângulo interno do prisma é $A = 60^\circ$. O ângulo de incidência $\theta_i = 45^\circ$ é tal que o raio emergente também faz um ângulo θ_i normal à outra face.
- Qual é o índice de refração do vidro do prisma com relação ao ar?
 - Se o comprimento de onda da luz incidente for igual a $7000 \text{ \AA}$ (vermelha), qual será o comprimento de onda da luz no interior do prisma, sabendo-se que sua frequência não muda?



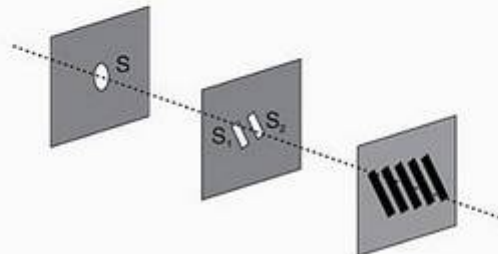
18. Um bastão de vidro ($n = 1,5$) de seção transversal retangular é dobrada na forma como mostra a figura ao lado. Um feixe de luz incide normal à superfície S_1 . Determine o valor mínimo de r/d , para que toda a luz que entra por S_1 atravesse o vidro e saia por S_2 .



19. Um raio de luz incide com um ângulo θ sobre o extremo de uma fibra óptica ($n = 1,3$). O ângulo de refração é ϕ e incide sobre a parede da fibra com um ângulo ψ . Qual é o maior valor de θ , para que o raio experimente reflexão total na parede da fibra?
20. Uma fibra óptica que se encontra no ar tem 2 m de comprimento e diâmetro de $2 \times 10^{-3} \text{ cm}$.
- Qual o maior ângulo de incidência de um raio de luz na extremidade da fibra para que ele seja totalmente refletido pela sua parede?
 - Para um ângulo de incidência $\theta_i = 40^\circ$, quantas reflexões ocorrerão antes de o raio emergir na outra extremidade da fibra, sendo $n_{\text{fibra}} = 1,30$?
21. Na prática, as fibras ópticas têm um revestimento de vidro ($n = 1,512$) para proteger a superfície óptica da fibra. Se a fibra tem um índice de refração $n = 1,7$, qual é o ângulo crítico para que se tenha reflexão total interna de um raio de luz dentro da fibra?

22. Luz de comprimento de onda de 589 nm incide sobre um par de orifícios e produz um diagrama de interferência no qual a separação entre as franjas brilhantes é 0,53 cm. Uma segunda luz produz um diagrama de interferência com uma separação de 0,64 cm entre as franjas. Qual é o comprimento de onda dessa segunda luz?

23. No experimento de Young, na figura ao lado, S é uma fonte de luz, S_1 e S_2 são duas aberturas em um anteparo opaco. Suponha que a experiência foi feita com uma fonte luminosa de $\lambda = 500$ nm e que o anteparo onde se observa a franja de interferência encontra-se a 1 m do anteparo com os dois furos. Se a distância entre os máximos é 0,5 mm, determine a distância entre S_1 e S_2 .



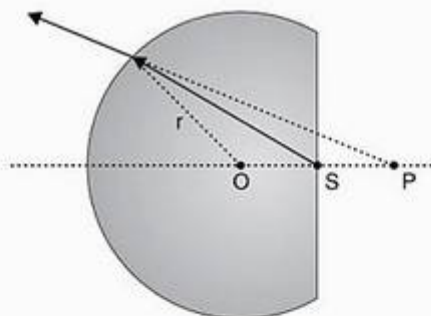
24. A luz de um laser de hélio-neônio (630 nm) incide sobre dois orifícios. No diagrama de interferência projetado sobre um anteparo que se encontra a 1,5 m dos orifícios, as franjas brilhantes estão separadas 1,35 cm. Qual é a separação entre os orifícios?
25. Uma abertura retangular de 1,4 μ m de largura é utilizada para produzir uma figura de difração de Fraunhofer. Calcule a meia largura angular da faixa central da figura de difração, quando utilizamos fontes monocromáticas de:
- 400 nm;
 - 700 nm.
26. Uma abertura retangular de 0,4 mm de largura é utilizada para produzir uma figura de difração de Fraunhofer no plano focal de uma lente com $f = 1$ m. A luz incidente contém dois comprimentos de onda λ_1 e λ_2 . Se o 4º mínimo correspondente a λ_1 e o 5º mínimo correspondente a λ_2 acontecem em um mesmo ponto a 5 mm do máximo central, determine λ_1 e λ_2 .
27. Calcule o raio do disco central da figura de difração da imagem de uma estrela formada por um objetivo:
- fotográfico de 2,5 cm de diâmetro e 7,5 cm de distância focal;
 - de luneta de 15 cm de diâmetro e 1,5 m de distância focal.
28. Um feixe monocromático de $\lambda = 600$ nm incide normal a um anteparo opaco que tem uma abertura circular de 0,5 mm de diâmetro. Descreva a figura de difração observada no plano focal de uma lente convergente de 2 m de distância focal e encostada próxima à abertura.
29. A luz entra no olho pela pupila cujo diâmetro é 7 mm. Qual é o ângulo de difração θ produzido quando um raio paralelo de luz amarela (589 nm) passa através da pupila?
30. Um astronauta em órbita a uma altura de 240 km disse que podia identificar as casas da cidade enquanto passava sobre elas. Pode-se dar crédito a isso? Suponha $\lambda = 5\,500$ Å e o diâmetro da pupila igual a 1 mm.
31. O diâmetro da pupila de uma águia mede 4 mm. A 1 km do chão, essa águia em vôo consegue enxergar um rato de 4 cm de comprimento? Considere $\lambda = 5\,500$ Å ou $\lambda = 550$ nm.

32. a) Calcule a separação angular mínima entre duas estrelas. Isso só é possível com um telescópio de 1 m que tenha filtros de luz vermelha ($\lambda = 650 \text{ nm}$) ou de luz azul ($\lambda = 400 \text{ nm}$).
- b) Determine a distância entre os centros das imagens das estrelas, se a lente objetiva do telescópio tem $f = 10 \text{ m}$.
33. A distância entre os centros dos faróis dianteiros de um carro é 1,5 m; o carro encontra-se a 6 km de um observador. Qual é:
- a) a distância entre os centros das imagens formadas na retina;
- b) o raio do disco central de difração de cada imagem;
- c) a distância máxima que pode separar os faróis; considere que o raio da pupila é 1 mm e $\lambda = 550 \text{ nm}$.
34. A distância entre os centros dos faróis dianteiros de um carro é 1,3 m; a resolução da imagem dos faróis na retina de um olho é determinada pela difração da luz ao passar pela pupila do olho ($r = 2,5 \text{ mm}$). Calcule a distância entre o carro e a pessoa para se ter um máximo poder de resolução, se $\lambda = 550 \text{ nm}$.
35. Qual é a distância mínima entre 2 pontos que apenas podem ser resolvidos pelo olho humano a 25 cm do olho sendo seu poder de resolução $1,3 \times 10^{-4} \text{ rad}$?
36. Um feixe paralelo de luz natural incide sobre uma superfície plana de vidro, formando um ângulo de 58° . O feixe refletido está completamente polarizado em um plano. Calcule:
- a) o ângulo de refração do feixe transmitido;
- b) o índice de refração do vidro.
37. Que altura sobre o horizonte deve ter o Sol, para que a luz procedente dele e refletida sobre uma superfície de água em repouso esteja polarizada.
38. Luz não-polarizada pode, em determinadas condições, ser refletida por uma superfície como luz polarizada. Constatou-se, experimentalmente, que isso ocorre quando os raios refletidos e refratados são perpendiculares entre si. Considere um feixe de luz incidindo sobre uma placa de vidro ($n = 1,5$). Determine o ângulo de polarização, ou seja, o ângulo de incidência para o qual é observada a polarização da onda refletida.
39. A amplitude de um feixe de luz polarizada forma um ângulo de 65° com o eixo de uma lâmina polarizadora. Que fração do feixe é transmitida através da lâmina?
40. Os eixos ópticos de um polarizador e de um analisador são orientados em ângulo reto entre si. Um segundo polarizador é colocado entre eles com seu eixo a 30° com o eixo do primeiro.
- a) Se uma luz não-polarizada de intensidade I_0 incidir sobre esse sistema, qual será a intensidade transmitida após cada lâmina polarizadora?
- b) Indique a direção de polarização da luz após cada polarizador.
- c) Qual a intensidade da luz transmitida quando se remove a lâmina intermediária?

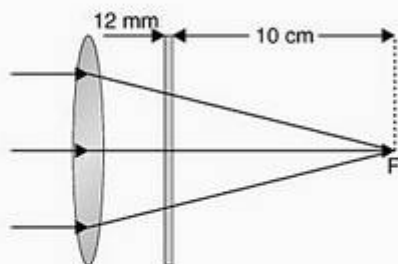
41. Suponha que o olho esteja cheio de uma substância homogênea com $n = 1,336$.
- Qual será o raio de curvatura da córnea, se o foco da lente encontra-se na retina a 25 mm do vértice da córnea?
 - Qual será o tamanho da imagem de um objeto de 10 cm de altura, situada a 2 m do olho?

42. Embora a lente do olho tenha superfícies fortemente curvadas (veja a Figura 11.28, anteriormente), o efeito de focalização da lente não é na realidade muito grande. Explique esse efeito e mostre-o com o traçado de raios luminosos, utilizando os valores 1,424 para o índice de refração da lente e 1,336 para o índice dos humores aquoso e vítreo.

43. Considere uma esfera de vidro de raio r e índice de refração n , cortada a uma distância d de seu centro por um plano perpendicular a OS (veja figura ao lado). Uma fonte pontual que se encontra em S emite luz que passa pelo vidro, tal que os raios emergem da esfera ao longo de linhas que divergem do ponto P. Se $OP = nr$, determinar a distância OS.



44. Comente sobre posição, natureza e tamanho da imagem formada por uma lente convergente quando o objeto (real) é colocado:
- no ponto focal;
 - entre o ponto focal e a lente;
 - além da distância focal.
45. Um objeto (real) é colocado a 15 cm de uma lente convergente de distância focal 5,0 cm. Do outro lado dessa lente, a 5,0 cm dela, é colocada uma lente divergente de distância focal 20 cm. Determine a posição, a natureza e o tamanho da imagem final formada.
46. a) Deduzir uma expressão semelhante à equação (11.20) para uma lente delgada de índice de refração n em um meio de índice n_0 .
- b) Se uma lente delgada de $n = 1,53$ tem $f = 25$ cm no ar e é submersa em água ($n = 4/3$), qual será o valor de f ?
47. Uma lente delgada biconvexa de vidro ($n = 1,5$) tem $f = 30$ cm no ar. A lente está montada em uma abertura feita na parede de um depósito cheio de água ($n = 4/3$). Na parede oposta do depósito há um espelho plano, a 80 cm da lente.
- Encontre a posição da imagem de um objeto localizado no exterior do depósito, no eixo da lente a 90 cm desta.
 - A imagem é real ou virtual?
 - A imagem é direita ou invertida?
48. Calcule a distância focal de uma lente delgada de vidro ($n = 1,5$) com superfícies plano-convexas.



49. A figura ao lado mostra uma lente objetiva de $f = 15$ cm e a imagem de um objeto que se encontra a 3 m da lente. Uma lâmina de vidro ($n = 1,5$) de 12 cm de espessura é colocada entre a lente e o ponto imagem.
- Determine a nova posição da imagem.
 - A que distância da lente o objeto deverá ser colocado para que a imagem se forme no ponto F, mantendo-se o vidro na mesma posição?
50. Uma lente com distância focal de 10 cm é usada como uma lupa simples por duas pessoas cujos pontos próximos estão, respectivamente, a 25 cm e 50 cm do olho. Considere o diâmetro do olho igual a 2 cm e o olho estando junto à superfície da lente. Calcule, para cada uma dessas pessoas:
- o aumento angular;
 - a relação entre o tamanho do objeto e o da imagem na retina quando elas estão usando a lupa.
51. Uma lente de aumento para leitura tem uma distância focal de 5 cm. Determine os aumentos lineares transversal e angular da lente.
52. Quais são os aumentos angulares, quando um objeto é visto através de uma lente de aumento com distância focal igual a 4,8 cm e colocado a 4 cm dela, nas condições em que o olho está:
- junto à superfície da lente?
 - a 10 cm da lente?
 - a 20 cm da lente?
53. Um projetor de diapositivos com uma lente de 10 cm de distância focal projeta uma imagem sobre um anteparo que se encontra a 2,5 m da lente.
- Qual é a distância entre o diapositivo e a lente?
 - Qual é o aumento da imagem?
 - Qual é a largura da imagem de um diapositivo de 35 mm?
54. A distância entre a lente de um projetor e o diapositivo pode variar entre 22 cm a 30 cm. Considere a distância focal da lente igual a 21 cm. Calcule:
- a menor e a maior distância entre a lente e o anteparo para que a imagem possa ser focalizada;
 - o aumento linear transversal da lente para cada caso.
55. Para fazermos fotos a pequenas distâncias (macrofotografia), utilizamos uma lente de 40 mm de distância focal.
- Se a lente pode estar no máximo a 5,20 cm do filme, qual será a menor distância (desde a lente) a qual se pode focar um objeto?
 - Qual é o aumento neste caso?
 - Se a lente não pode estar a menos de 5,0 cm do filme, qual será a menor distância a qual se poderá focar um objeto?
56. Uma câmara fotográfica com uma lente de distância focal de 5 cm é usada para fotografar uma árvore de 1,68 m de altura.

- a) A que distância da árvore deve ser posicionada a lente da câmara para que o tamanho da imagem no filme seja de 2 cm?
- b) Calcule a distância entre a lente e o filme.
57. As distâncias focais da objetiva e ocular de um microscópio são, respectivamente, 0,5 cm e 1,0 cm. Um objeto colocado a 0,52 cm da objetiva produz uma imagem virtual a 25 cm do olho.
- a) Calcule a distância de separação das duas lentes.
- b) Qual é o aumento total do microscópio?
58. Um microscópio dispõe de lentes objetivas cujas distâncias focais são 16 mm, 4 mm e 1,9 mm e de lentes oculares de aumentos angulares $5\times$ e $10\times$. Quais os valores máximo e mínimo de aumento total que se pode obter, sendo que cada lente objetiva forma uma imagem localizada 16 cm além de seu ponto focal?
59. A objetiva de um microscópio possui uma distância focal de 0,3 cm e uma ocular de distância focal de 2,0 cm.
- a) Onde deve estar a imagem formada pela objetiva, para que a ocular produza uma imagem virtual 25 cm diante da ocular?
- b) Se as lentes estão separadas 20 cm, que distância separa a objetiva do objeto que está sendo observado?
- c) Qual é o aumento total do microscópio?
60. A lente objetiva de um microscópio tem $f = 16$ mm e uma ocular de $f = 2,5$ cm, e a separação entre ambas é 22,1 cm. A imagem final formada pela ocular encontra-se no infinito.
- a) Qual deve ser a distância da objetiva ao objeto examinado?
- b) Qual é o aumento lateral produzido pela objetiva?
- c) Qual é o aumento total?
61. Encontre a localização do ponto:
- a) próximo de um olho para o qual estão prescritas lentes com potência de +2 dioptrias;
- b) remoto de um olho para o qual estão prescritas lentes com potência de -0,5 dioptrias.
62. Uma pessoa usa óculos com lentes de 1,33 dioptrias. Onde se localiza o ponto próximo dessa pessoa quando ela não estiver usando óculos?
63. Um livro é colocado a 25 cm de distância de um olho relaxado. Que tamanho tem na retina a imagem de uma letra do livro, se a altura da letra é 2 mm?
64. Uma pessoa com lentes de distância focal de -200 cm vê nitidamente objetos localizados entre 25 cm e o infinito.
- a) Onde se situam os pontos próximo e distante de seus olhos quando ele não está usando as lentes?
- b) Qual é o poder de acomodação de seu olho?

65. O intervalo de visão nítida de uma pessoa é de 175 cm a partir de 75 cm de seus olhos.
- De que tipo de lente corretora ela precisa para ver objetos a grandes distâncias e ler livros a 25 cm de seus olhos?
 - Determine o intervalo em que sua visão não é muito nítida, quando essa pessoa usa os óculos corretores.
66. Lentes bifocais com distâncias focais de 40 cm e -300 cm são prescritas a um paciente.
- Para que serve cada uma das partes dessas lentes?
 - Descreva a localização e calcule a convergência de cada uma das partes dessas lentes.
 - Determine os pontos próximo e distante do olho desse paciente sem os óculos.
67. Uma pessoa vê nitidamente somente objetos colocados entre 25 cm e 400 cm de seus olhos.
- Determine o poder de acomodação do olho dessa pessoa.
 - Qual deve ser a convergência das lentes corretoras para essa pessoa?
 - A que distância mínima dos olhos o livro deve ser colocado para que ele possa ser lido pela pessoa utilizando esses óculos?

Referências Bibliográficas

1. STIEVE, H. *Transduction of light energy to electrical signal in photoreceptor cells*. Proc. of Symp.: The Biology of Photoreceptors. Cambridge Univ. Press, Sept, 1981.
2. RITZ, T; DOMMER, D.H.; PHILLIPS, J.B. Shedding light on vertebrate magnetoreception. *Neuron*. v. 34, n. 4, p. 503-506, May, 2002.
3. PHILLIPS, J.B, et al. The role of extraocular photoreceptors in newt magnetic compass orientation: Parallels between light-dependent magnetoreception and polarized light detection in vertebrates. *J. Exp. Biol.* v. 204, n. 14, p. 2543-2552, Jul, 2001.
4. STIEVE, Op. Cit.
5. STIEVE, Op. Cit.
6. PHILLIPS, J.B.; BORLAND, S.C. Behavioral evidence for the use of a light-dependent magnetoreception mechanism by a vertebrate. *Nature*. v. 359, n. 6391, p. 142-144, Sep, 1992.
7. BRENNER, D.; WILLIAMSON, S.J.; KAUFMAN, L. Visually evoked magnetic fields of human brain. *Science*. v. 190, n. 4213, p. 480-482, 1975.
8. GOULD, J.L. Sensory bases of navigation. *Curr. Biol.* v. 8, n. 20, R731-R738, Oct 1998.
9. ADLER, K.; TAYLOR, D.H., Extraocular perception of polarized-light by orienting salamanders. *J. Comp. Physiol.* v. 87, n. 3, p. 203-212, 1973.
10. WILTSCHKO, W. et al. Pigeon homing – The orientation young birds that had been prevented from seeing the sun. *Ethology*. v. 76, n. 1, p. 27-32, Sep, 1987.
11. KIEN, J.; MENZEL, R., Chromatic properties of interneurons in optic lobes of bee. 2. Narrow-band and color opponent neurons. *J. Comp. Physiol.* v. 113, n. 1, p. 35-53, 1977.
12. KREITHEN, M.L.; EISNER, T. Ultraviolet-light detection by homing pigeon. *Nature*. v. 272, n. 5651, p. 347-348, 1978.
13. PHILLIPS, J.B.; ADLER, K.; BORLAND, S.C. True navigation by an amphibian. *Anim. Behav.* v. 50, p. 855-858, Sep, 1995.
14. VON FRISCH, K. *The Dance Language and Orientation of Bees*. Cambridge, M.A: Harvard University Press, 1967.
15. VON FRISCH, K. Decoding language of bee. *Science*. v. 185, n. 4152, p. 663-668, 1974.
16. ABLE, K.P. Skylight polarization patterns at dusk influence migratory orientation in birds. *Nature*. v. 299, n. 5883, p. 550-551, 1982.
17. ABLE, K.P. Skylight polarization patterns and the orientation of migratory birds. *J. Exp. Biol.* v. 141, p. 241-256, Jan, 1989.
18. ABLE, K.P.; ABLE, M.A. Daytime calibration of magnetic orientation in a migratory bird requires a view of skylight polarization. *Nature*. v. 364, n. 6437, p. 523-525, Aug, 1993.
19. WILTSCHKO, R. et al. Orientation in migratory birds: time-associated relearning of celestial cues. *Anim. Behav.* v. 62, p. 245-250, Aug, 2001.
20. VON FRISCH, K. Die sonne als kompass in leben der bienen *Experientia*, v. 6, n. 6, p. 210-221, 1950.
21. VON FRISCH, K.; LINDAUER, M.; DAUMER, K. Liber die wahrnehmung polarisierten lightes durch das bienenauge. *Experientia*. v. 16, n. 7, p. 289-301, 1960.
22. VON FRISCH, K. The language of bee (reprinted from science progress). *Bee World*. v. 74, n. 2, p. 92-98, 1993.

Apêndice A

UNIDADES DERIVADAS DO SI

Grandeza	Nome da unidade	Símbolo
Área	metro quadrado	m^2
Volume	metro cúbico	m^3
Velocidade	metro por segundo	$m \cdot s^{-1}$
Aceleração	metro por segundo quadrado	$m \cdot s^{-2}$
Força	Newton	$N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$
Torque	metro-Newton	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$
Pressão	Pascal	$Pa = N \cdot m^{-2}$
Energia	Joule	$J = N \cdot m$
Potência	Watt	$W = J \cdot s^{-1}$
Densidade	quilograma por metro cúbico	$kg \cdot m^{-3}$
Entropia	Joule por Kelvin	$J \cdot K^{-1}$
Viscosidade	Newton-seg. por metro quadrado	$N \cdot s \cdot m^{-2}$
Calor específico	Joule por quilograma-Kelvin	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
Condutividade térmica	Watt por metro-Kelvin	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
Carga elétrica	Coulomb	$C = A \cdot s$
Densidade de corrente	Ampère por metro quadrado	$A \cdot m^{-2}$
Potencial elétrico	Volt	$V = W \cdot A^{-1}$
Resistência elétrica	Ohm	$\Omega = V \cdot A^{-1}$
Condutância elétrica	Siemens	$S = \Omega^{-1}$
Resistividade elétrica	Ohm-metro	$\Omega \cdot m$
Condutividade elétrica	Siemens por metro	$S \cdot m^{-1}$
Capacitância	Farad	$F = A \cdot s \cdot V^{-1}$
Indutância	Henry	$H = V \cdot s \cdot A^{-1}$
Fluxo magnético	weber	$Wb = V \cdot s$
Indução magnética	Tesla	$T = Wb \cdot m^{-2}$
Intensidade magnética	Ampère por metro	$A \cdot m^{-1}$
Frequência	Hertz	$Hz = s^{-1}$
Luminância	candela por metro quadrado	$cd \cdot m^{-2}$
Intensidade radiante	Watt por esterorradiano	$W \cdot sr^{-1}$
Fluxo luminoso	lúmen	$lm = cd \cdot sr$
Iluminância	lux	$lx = lm \cdot m^{-2}$
Razão de desintegração	Becquerel	$Bq = s^{-1}$
Dose absorvida	Gray	$Gy = J \cdot kg^{-1}$

CONSTANTES

Grandeza	Símbolo	Valor
Constante de Boltzmann	k	$1,380658 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Constante de Planck	h	$6,626075 \times 10^{-34} \text{ J/s}$
Carga do elétron	e	$1,602177 \times 10^{-19} \text{ C}$
Massa do elétron	m_e	$9,109389 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Massa do próton	m_p	$1,672623 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Massa do nêutron	m_n	$1,674928 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Velocidade da luz no vácuo	c	$2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$
Permeabilidade magnética do vácuo	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$
Permissividade elétrica do vácuo	ϵ_0	$8,85418782 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
Número de Avogadro	N_A	$6,022136 \times 10^{23} \text{ Moléculas/g.mol}$
Constante molar dos gases	R	$8,314510 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Apêndice B

FATORES DE CONVERSÃO DE UNIDADES

Comprimento

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 3,281 \text{ pés} = 39,37 \text{ pol}$$

$$1 \text{ cm} = 0,3937 \text{ pol}$$

$$1 \text{ pé} = 0,3048 \text{ m}$$

$$1 \text{ pol} = 2,54 \text{ cm}$$

$$1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m} = 10^{-8} \text{ cm} = 10^{-1} \text{ nm}$$

Massa

$$1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g} = 0,0685 \text{ slug}$$

$$1 \text{ slug} = 14,59 \text{ kg}$$

$$1 \text{ uma} = 1,661 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Área

$$1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2 = 10,76 \text{ pés}^2$$

$$1 \text{ pé}^2 = 144 \text{ pol}^2 = 0,0929 \text{ m}^2$$

Tempo

$$1 \text{ dia} = 86,400 \text{ s}$$

$$1 \text{ ano} = 3,156 \times 10^7 \text{ s}$$

Volume

$$1 \text{ litro} = 10^3 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3 = 0,0351 \text{ pés}^3$$

$$1 \text{ pé}^3 = 0,02832 \text{ m}^3 = 7,477 \text{ galões}$$

Força

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ din} = 0,2247 \text{ lb}$$

Energia

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ ergs} = 0,239 \text{ cal}$$

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$$

$$1 \text{ Btu} = 1055 \text{ J} = 252 \text{ cal}$$

$$1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Pressão

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 1,451 \times 10^{-4} \text{ lb} \cdot \text{pol}^{-2}$$

$$1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa} = 14,7 \text{ lb} \cdot \text{pol}^{-2}$$

$$1 \text{ lb} \cdot \text{pé}^2 = 47,85 \text{ Pa}$$

Potência

$$1 \text{ hp} = 746 \text{ W} = 550 \text{ pés} \cdot \text{lb} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$1 \text{ Btu} \cdot \text{h}^{-1} = 0,293 \text{ W}$$

TABELA DE CONVERSÃO DE ENERGIA

eV	J	K	Hz
1,0000	$1,6020 \times 10^{-19}$	$1,1605 \times 10^4$	$2,4180 \times 10^{14}$
$6,2422 \times 10^{11}$	1,0000	$7,2446 \times 10^{15}$	$1,5094 \times 10^{26}$
$8,6163 \times 10^{-5}$	$1,3804 \times 10^{-23}$	1,0000	$2,0834 \times 10^{10}$
$4,1357 \times 10^{-15}$	$6,6252 \times 10^{-34}$	$4,7998 \times 10^{-11}$	1,0000

UNIDADES DE RADIAÇÃO

Grandeza	Unidades antigas	Unidades novas
Exposição	Roentgen (R) = $2,58 \times 10^4$ C/kg	C/kg = 1
Dose absorvida	Rad (rad) = 100 erg/g	Gray (Gy) = 1 J/kg = 100 rad
Dose equivalente	Rem (rem) = rad·F·Q	Sievert (Sv) = 1 J/kg = 100 rem
Kerma	Rad (rad) = 0,01 J/kg	Gray (Gy) = 1 J/kg = 100 rad
Atividade	Curie (Ci) = $3,7 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$	Becquerel (Bq) = 1 s^{-1}

EQUIVALÊNCIAS MASSA-ENERGIA

Massa do próton = 938,2111 MeV	Massa do hidrogênio = 1,0081423 uma
Massa do elétron = 0,5109767 MeV	Unidade de massa atômica = 931,1411 MeV
Quilograma = $8,988 \times 10^{16}$ J	Elétron-volt = $1,073 \times 10^{-9}$ uma

Apêndice C

RELAÇÕES MATEMÁTICAS ÚTEIS

Álgebra

$$x^{-n} = 1/x^n$$

$$x^{(m+n)} = x^m x^n$$

$$x^{(m-n)} = x^m/x^n$$

$$\text{Se: } ax^2 + bx + c = 0;$$

$$x = [-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}]/2a$$

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3}y^3 + \dots$$

Logaritmo

$$\log x + \log y = \log(x \cdot y)$$

$$\log x - \log y = \log(x/y)$$

$$\log(x^n) = n \cdot \log x$$

Geometria

Perímetro de círculo de raio r:

$$C = 2\pi r$$

Área do círculo de raio r:

$$A = \pi r^2$$

Superfície de uma esfera de raio r:

$$S = 4\pi r^2$$

Volume de uma esfera de raio r:

$$V = 4\pi r^3/3$$

Trigonometria

$$\text{sen } \theta = y/r$$

$$\text{cos } \theta = x/r$$

$$\text{tg } \theta = y/x$$

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$$

$$\text{sen} 2\theta = 2\text{sen } \theta \text{cos } \theta$$

$$\text{cos} 2\theta = \text{cos}^2 \theta - \text{sen}^2 \theta = 2\text{cos}^2 \theta - 1$$

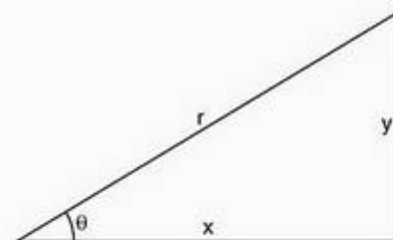
$$\text{sen}(\theta \pm \varphi) = \text{sen } \theta \text{cos } \varphi \pm \text{cos } \theta \text{sen } \varphi$$

$$\text{cos}(\theta \pm \varphi) = \text{cos } \theta \text{cos } \varphi \mp \text{sen } \theta \text{sen } \varphi$$

$$\text{sen } \theta + \text{sen } \varphi = 2\text{sen } \frac{1}{2}(\theta + \varphi) \text{cos } \frac{1}{2}(\theta - \varphi)$$

$$\text{cos } \theta + \text{cos } \varphi = 2\text{cos } \frac{1}{2}(\theta + \varphi) \text{cos } \frac{1}{2}(\theta - \varphi)$$

$$\text{sen } \frac{1}{2}(\theta) = [(1 - \text{cos } \theta)/2]^{1/2} \quad \text{cos } \frac{1}{2}(\theta) = [(1 + \text{cos } \theta)/2]^{1/2}$$



Cálculo diferencial

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sen} az = a \cos az$$

$$\frac{d}{dz} e^{az} = a e^{az}$$

$$\frac{d}{dz} \cos az = -a \operatorname{sen} az$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Ln} az = 1/z$$

Cálculo integral

$$\int z^n dz = z^{n+1}/(n+1)$$

$$\int \operatorname{sen} az dz = -(1/a) \cos az$$

$$\int e^{az} dz = (1/a) e^{az}$$

$$\int \cos az dz = (1/a) \operatorname{sen} az$$

$$\int dz/z = \operatorname{Ln} z$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{z}{a}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{a^2 + z^2})$$

$$\int \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

$$\int \frac{z dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

Vetores e operadores vetoriais

Produto escalar dos vetores **A** e **B**:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta$$

Produto vetorial dos vetores **A** e **B**:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} \text{ onde } |\mathbf{C}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta$$

θ : ângulo entre **A** e **B**.

Gradiente de uma função escalar φ :

$$\operatorname{grad} \varphi = \hat{i}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{i}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{i}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Divergência de uma função vetorial **F**:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$